Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Ejemplos Consistentes en el Problema de Malykhin

T E S I S

que para obtener el grado de:

Licenciado en Física y Matemáticas con Especialidad en Matemáticas

presenta:

C. Cristo Daniel Alvarado

Director de tesis

Dr. David José Fernández Bretón

Agosto 2025

Instituto Politécnico Nacional

Resumen

Uno de los principales problemas en Topología General es el problema de metrizabilidad, es decir, dado un espacio topológico encontrar una métrica tal que la topología generada por dicha métrica coincida con la topología del espacio. En el contexto de Álgebra Topológica, específicamente con grupos topológicos, resulta relevante conocer condiciones necesarias y suficientes para determinar la metrizabilidad de los mismos, hecho que está caracterizado por el Teorema de Birkhoff-Kakutani, el cual nos dice que todo grupo topológico (T_0) es metrizable si y solo si es primero numerable.

Naturalmente, surge la siguiente pregunta: ¿es posible debilitar la condición de primero numerabilidad? Una forma de debilitar la condición de primero numerabilidad es con la propiedad de Fréchet-Urysohn (o simplemente Fréchet) e imponer la condición de separabilidad, con lo cual Malykhin en 1978 se planteó la siguiente pregunta: ¿Existe un grupo topológico T_0 Fréchet-Urysohn y separable que no sea metrizable?

En esta tesis construimos un grupo topológico de Fréchet-Urysohn numerable que no es metrizable en dos modelos de ZFC distintos.

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor el Dr. David José Fernández Bretón por haber sido una guía imprescindible al momento de escribir esta tesis, pues sin sus amplios conocimientos en el tema me habría resultado completamente imposible hacer avances significativos en este documento. Agradezco también a mis sinodales: el Dr. Pablo Lam Estrada, la Dra. Flor de María Correa Romero, el M. en C. Jesús Octavio Fabián Lóyzaga Mendoza y al Dr. Miguel Ángel Valencia Bucio, ya que algunos de ellos fueron mis profesores a lo largo de mis estudios de licenciatura y han sido una gran fuente de inspiración para elaborar este documento y, más aún, se han tomado la molestia de leer y analizar este trabajo desde su mirada experta.

Además, quiero agradecer a mis amigos Mauricio, Iris, Salvador, Damián, Rodrigo, Leonardo, Judá, Kevin, Melissa, los Fernandos (Acosta y Acevedo), Asa, Daniel, Óscar, Jorge Emilio, Mitsao, Edgar, Ivar, Memo, Luis y al pequeño Neumann (posiblemente se me estén pasando muchos otros) por siempre haber sido un apoyo incondicional en las noches de desesperación y por haber aportado su grano de arena para este documento.

También quiero agradecer a mis tíos, primos, conocidos, en particular al M. en C. Bulmaro Javier Espinoza de los Monteros Díaz por haberme siempre motivado a leer, estudiar y conocer más del bello mundo de las Matemáticas.

A mi padre el Dr. José Jesús Alvarado Cabral por ser una fuente inagotable de inspiración y superación, a mi madre la M. Ed. Claudia Gabriela Lazalde Valdez por siempre haberme apoyado, por ser la primera en darme porras y ánimos cuando más lo necesitaba, por no dejarme atrás sin importar las circunstancias; a mi abuela materna María Teresa de Jesús Valdez Borján por siempre darme su apoyo incondicional y sus palabras de aliento. Y sobre todo, quiero dar gracias a mi hermana Eli del Mar Alvarado Espinoza de los Monteros por haber sido mi motivación a seguir, a siempre inspirarme a ser mejor persona y nunca rendirme, dando igual sean cuales sean las circunstancias. Finalmente, a mi abuela paterna (sit tibi terra levis) Juana Francisca Cabral Simental, que aunque ya no se encuentre, siempre encuentro en ella motivos para seguir adelante.

Para Eli,
Gabriela,
Teresa
y Jesús

现在人们知道，没有不散的宴席，一切都有个尽头。

(Hoy sabemos bien que no hay banquete que no termine, y que todo llega a su fin)

— 刘慈欣，⟨死神永生⟩

(Liŭ Cíxīn, *El fin de la muerte*, 2010)

Tabla de Contenidos

Convenciones y Notación

A lo largo del texto, adoptaremos la siguiente notación: ω denotará a $\omega_0 = \aleph_0$, el primer ordinal infinito (o la cardinalidad de un conjunto numerable) y $\mathfrak{c}$ será el cardinal del conjunto potencia de ω, denotado por $\mathcal{P}(\omega)$.

Sea X un conjunto, definimos los subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$, el conjunto potencia de X:

$$[X]^{\omega} = \left\{ A \in \mathcal{P}(X) \middle| \, |A| = \omega \right\}, \quad [X]^{<\omega} = \left\{ A \in \mathcal{P}(X) \middle| \, |A| < \omega \right\}$$

y

$$[X]^{\leqslant\omega} = [X]^{\omega} \cup [X]^{<\omega}.$$

Si A es un conjunto y $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos, entonces $\mathcal{F} \restriction A$ denota a la familia:

$$\mathcal{F} \restriction A = \left\{ F \cap A \middle| F \in \mathcal{F} \right\}.$$

Si $f : X \to Y$ es una función con $A \subseteq X$, entonces $f \restriction A$ denota a la restricción de f al conjunto A. Además, $f[A]$ y $f^{-1}[A]$ denotan a la imagen e imagen inversa del conjunto A bajo la función f, respectivamente. En caso de que A cuente con un solo elemento, digamos $A = \{a\}$, denotaremos a la imagen inversa de este conjunto simplemente por $f^{-1}[a]$.

Dados A, B conjuntos, ${}^{A}B$ denota al conjunto de todas las funciones de A en B, esto es:

$${}^{A}B = \left\{ f : A \to B \middle| f \text{ es función} \right\}.$$

Se denotará de forma usual a un espacio topológico como la dupla (X, τ). Dado el subespacio (X, τ), la notación $\overline{Z}^{Y}$ y $\mathring{Z}^{Y}$ denotarán la cerradura e interior de Z en el subespacio topológico (Y, τ_Y) de (X, τ), respectivamente. En caso de que no haya confusión convenimos en que $\overline{Z}^{X} = \overline{Z}$ y $\mathring{Z}^{X} = \mathring{Z}$.

Por $\forall^{\infty}$ denotaremos al cuantificador *para casi todo salvo una cantidad finita.* El símbolo $\#_c$ denota que se ha llegado a una contradicción.

Si X es un conjunto tal que $|X| \leqslant \omega$, diremos que X es *a lo sumo numerable.* Si es tal que $|X| = \omega$, diremos que es *numerable.*

Si $a, b < \omega$, entonces $[\![a, b]\!]$ denotará al conjunto $\left\{ n < \omega \middle| a \leqslant n \leqslant b \right\}$. En este contexto y más adelante en el texto convendremos en que $\mathbb{N} = \omega \setminus \{0\}$.

Introducción

En Topología General el problema de metrizabilidad es uno de los problemas más estudiados del siglo XX. Uno de los resultados fundamentales en la teoría es el Teorema de Metrización de Urysohn, que nos da condiciones suficientes para garantizar la metrizabilidad de un espacio topológico. Más adelante, J. Nagata e Y. Smirnov encontraron (de forma independiente) condiciones necesarias para que un espacio sea metrizable, en el llamado Teorema de Metrización de Nagata-Smirnov.

En el contexto de Álgebra Topológica y en específico, en Grupos Topológicos resulta natural hacernos la misma pregunta, tomando en cuenta la estructura adicional de grupo que tiene el espacio, si es posible debilitar las condiciones para garantizar la metrizabilidad del grupo. Justamente el Teorema de Birkhoff-Kakutani nos proporciona condiciones necesarias y suficientes para que un grupo topológico (T_0) sea metrizable, y es que basta con el que el grupo sea primero numerable.

A inicios del siglo XX, posterior al desarrollo de la topología de los números reales por Cantor, hubo varios intentos de generalizar la noción de topología (usando lo conocido en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$). M. R. Fréchet en 1904 en su artículo *Généralisation d'un théorème de Weierstrass*, en uno de los intentos de formalizar esta noción desarrolla lo que él llama los L-espacios, que son básicamente espacios construidos a partir de sucesiones.

La noción actual que uno tendría de este espacio consiste en lo siguiente: un L-espacio es una dupla (E, F), donde E es un conjunto y $F : S \to E$ es una función, siendo S el conjunto de todas las sucesiones de E, que cumple lo siguiente:

(1) Si x es un punto del espacio E, entonces $F\left((x)_{n=1}^{\infty}\right) = x$.

(2) Si $\left(x_{\alpha(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces $F\left(\left(x_{\alpha(n)}\right)_{n=1}^{\infty}\right) = F\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right)$.

Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es un elemento de S, entonces $F\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right)$ es llamado el **límite de la sucesión** $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Por notación lo anterior se denota simplemente por $\lim_{n\to\infty} x_n$. Lo interesante de estos espacios es lo siguiente: si $A \subseteq E$ y $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de A, entonces decimos que $F\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\right)$ es **punto límite** de A. Se denomina por A_λ al **conjunto de puntos límite de** A (el cual cumple que $A \subseteq A_\lambda$) y decimos que A es **cerrado** si $A = A_\lambda$. Lo que Fréchet pretendía era generalizar la noción de conjunto cerrado que se tenía en el espacio euclidiano. Con el paso del tiempo el mismo Fréchet se dio cuenta de que esto no bastaba para generalizar la noción de topología. Como dato interesante, en su trabajo *Sur quelques points du Calcul fonctionnel* introduce el concepto de espacio métrico. Kuratowski más adelante en 1920 en su artículo *Sur l'opération* $\overline{A}$ *de l'Analysis Situs* introduce formalmente el concepto conocido hoy en día de espacio topológico mediante la operación cerradura.

A pesar de que los L-espacios no fueron de gran impacto en su momento, con el desarrollo de la Topología General el concepto se rescató y actualmente se denomina como propiedad de **Fréchet-Urysohn** en espacios topológicos: un espacio topológico (X, τ) es de **Fréchet-Urysohn** (a veces simplemente **Fréchet**) si para cada $A \subseteq X$ se tiene que para todo $x \in \overline{A}$ existe una sucesión de elementos de A que converge a x. Resulta que todo espacio primero numerable es de Fréchet-Urysohn, por lo que es natural preguntarnos si en el Teorema de Birkhoff-Kakutani es posible debilitar la primera numerabilidad por la propiedad de ser Fréchet-Urysohn.

Desafortunadamente, la respuesta es negativa, ya que existen grupos topológicos (T_0) de Fréchet-Urysohn que no son metrizables. Malykhin en 1978 se hizo la pregunta de si es posible, dando más control a las sucesiones (esto por medio del concepto de separabilidad), mostrar la existencia (o no) de un grupo topológico (T_0) de Fréchet-Urysohn y separable que no sea metrizable. Esta fue la pregunta planteada por Malykhin:

¿Existe un grupo topológico T_0 Fréchet-Urysohn y separable (equivalentemente, numerable) que no sea metrizable?

El propio Malykhin tenía conocimiento que, asumiendo $\omega_1 < \mathfrak{p}$, todo subgrupo numerable y denso de $\{0,1\}^{\omega_1}$ es Fréchet-Urysohn y no metrizable, como lo menciona A.V. Arkhangel'skii en *Classes of topological groups*. En 1992 P. J. Nyikos en su artículo *Subsets of* ${}^{\omega}\omega$ *and the Fréchet-Urysohn and* α_i*-properties* asumiendo que $\omega_1 < \mathfrak{p}$ o $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ construye un espacio vectorial topológico (en particular, grupo topológico) que es Fréchet-Urysohn y separable, pero no es metrizable. No surgieron muchos avances significativos en la dirección negativa hasta que en 2014 M. Hrušák y U. A. Ramos-García probaron en el artículo *Malykhin's Problem* que es consistente con ZFC que todo grupo topológico T_0 Fréchet-Urysohn numerable es metrizable.

Un problema que tal vez un estudiante con nociones básicas de Topología General que haya tomado algunos cursos de Álgebra Abstracta puede plantearse resulta ser increíblemente complicado de responder. Lo más increíble de dicho problema es que en ZFC no podemos dar respuesta a la pregunta anterior. En esta tesis se da una respuesta positiva al problema de Malykhin en dos modelos de ZFC.

El primer capítulo está dedicado a probar propiedades básicas de grupos topológicos. En particular, en la última sección se prueba el Teorema de Birkhoff-Kakutani.

En el segundo capítulo se abordan cuestiones de Topología General, como lo son filtros, ideales y ultrafiltros. En la parte de ideales se habla sobre la cofinalidad de un ideal y el ideal ortogonal, esto con el objetivo de probar varias caracterizaciones de los espacios de Fréchet, entre ellas, a partir de ideales.

El tercer capítulo es por mucho el más extenso de los cuatro. En él se desarrolla parte de la Teoría de Conjuntos con el objetivo de construir los números ordinales y cardinales. Seguido de ello se hace una introducción de los cardinales regulares y singulares, que resultarán relevantes en el problema de Malykhin, y el Lema de Fodor el cual es un lema importante en Teoría de Conjuntos y nos será útil en el último capítulo. Finalmente, se habla de los cardinales $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{b}$.

En el cuarto capítulo se habla sobre el Problema de Malykhin, se construye una topología, a partir de un ideal $\mathcal{I}$, sobre el grupo $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$ y con ella se da una respuesta asumiendo $\omega_1 < \mathfrak{p}$ y otra asumiendo $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$. Con ambas respuestas se hace una discusión sobre la relevancia de dicho problema y se dan conclusiones.

En el primer anexo se habla sobre recursión transfinita y en el segundo de la relación entre los conjuntos bien ordenados y los ordinales para finalizar con una consecuencia del axioma de elección.

Capítulo 1

Grupos Topológicos

Se desarrollarán en este capítulo resultados sobre la teoría de grupos topológicos. Gran parte de ellos fueron obtenidos de [Tka97] y [Tka98]. El primer objetivo de esta sección es dar una introducción a esta estructura algebraica para luego analizar algunas de sus propiedades y finalizar con una forma de construir grupos topológicos dado un grupo.

§1.1 Preliminares

Definición 1.1 (**Grupo Topológico**)
Sea G un conjunto no vacío dotado de una operación binaria (denotada por $\cdot$) y una familia τ de subconjuntos de G. La tripleta $(G, \cdot, \tau)$ es llamada **grupo topológico** si:

(1) $(G, \cdot)$ es un grupo.

(2) (G, τ) es un espacio topológico.

(3) Las funciones $g_1 : G \times G \to G$ y $g_2 : G \to G$ dadas por $(x, y) \mapsto x \cdot y$ y $x \mapsto x^{-1}$, respectivamente, son continuas, siendo x^{-1} el inverso de x en G.

Observación 1.1
En el caso de la función $g_1 : G \times G \to G$ dada en el inciso *(3)*, consideramos que el espacio $G \times G$ está dotado de la topología producto.

Se denotará a la operación $\cdot$ por yuxtaposición, es decir $x \cdot y = xy$. En caso de que no haya confusión se denotará a un grupo topológico simplemente por G en vez de $(G, \cdot, \tau)$.

Observación 1.2
Sea G un grupo topológico. Denotamos por $\mathcal{N}(x)$ a la **familia de todas las vecindades de** $x \in G$. Una equivalencia de la condición *(3)* en la definición anterior es la siguiente:

(4) Si $x, y \in G$, entonces para cada $U \in \mathcal{N}(xy)$ existen vecindades $V \in \mathcal{N}(x)$ y $W \in \mathcal{N}(y)$ tales

que $V \cdot W \subseteq U$, donde:

$$V \cdot W = \left\{vw \in G \middle| v \in V \text{ y } w \in W\right\}$$

y, para cada $U \in \mathcal{N}(x^{-1})$ existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que $V^{-1} \subseteq U$, siendo:

$$V^{-1} = \left\{v^{-1} \in G \middle| v \in V\right\}.$$

En ocasiones, si no hay confusión con la operación del grupo, se denotará simplemente por VW en vez de $V \cdot W$ al conjunto de la observación anterior.

La equivalencia de la observación anterior se sigue de la definición de continuidad de una función en un espacio topológico.

Observación 1.3
El símbolo e_G denotará a la identidad de un grupo G.

Resulta que en el inciso *(3)* de la definición de grupo topológico es equivalente a pedir que la función $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ sea continua, como lo muestra el siguiente resultado:

Lema 1.4
Sean $(G, \cdot)$ un grupo, y τ una topología sobre G. Entonces, $(G, \cdot, \tau)$ es un grupo topológico si y solo si la función:

$$\begin{aligned} g_3 : G \times G &\to G \\ (x, y) &\mapsto xy^{-1}, \end{aligned}$$

es continua.

Demostración:
Probaremos la doble implicación:

$\Rightarrow)$: Supongamos que G es un grupo topológico. Entonces, las funciones g_1 y g_2 son continuas (por la condición *(3)* de la definición anterior). Notemos que:

$$g_3(x, y) = g_1(x, g_2(y)), \quad \forall x, y \in G,$$

por ende, g_3 es continua por ser la composición de las funciones continuas g_1 y $(x, y) \mapsto (x, g_2(y))$.

$\Leftarrow)$: Supongamos que la función g_3 es continua. Se tiene que:

$$g_2(x) = g_3(e_G, x), \quad \forall x \in G.$$

Como g_3 y $x \mapsto (e_G, x)$ son continuas, se sigue que g_2 también lo es. Además:

$$g_1(x, y) = g_3(x, g_2(y)), \quad \forall x, y \in G,$$

al ser g_2 continua se sigue que la función $(x, y) \mapsto (x, g_2(y))$ también lo es, luego, g_3 compuesta con esta función también es continua. Así que g_1 es continua. Por tanto, G es grupo topológico. ■

Ejemplo 1.5 ($\mathbb{R}$ **es Grupo Topológico**)
Consideremos al grupo $(\mathbb{R}, +)$ dotado de la suma usual. Afirmamos que $(\mathbb{R}, +, \tau_u)$ es grupo topológico, siendo τ_u la topología usual de $\mathbb{R}$. En efecto, se cumple que:

(1) $(\mathbb{R}, \cdot)$ es grupo.

(2) $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es espacio topológico.

Veamos que:

(3) La función $g_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \mapsto x - y$ es continua. En efecto, sea $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto no vacío. Si $(x_0, y_0) \in g_3^{-1}[U]$, se tiene que:

$$x_0 - y_0 \in U.$$

Dado que τ_u tiene como una base a la familia de bolas abiertas $\left\{B(x, \varepsilon)\middle| x \in \mathbb{R} \text{ y } \varepsilon > 0\right\}$, donde:

$$B(x, \varepsilon) = \left\{y \in \mathbb{R}\middle| |x - y| < \varepsilon\right\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0,$$

entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0 - y_0, \varepsilon) \subseteq U$. El conjunto $V = B(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) \times B(y_0, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $(x_0, y_0) \in V$ y, para todo $(x, y) \in V$ se cumple que:

$$|x_0 - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |y_0 - y| < \frac{\varepsilon}{2},$$

por lo cual:

$$|(x_0 - y_0) - (x - y)| \leqslant |x - x_0| + |y - y_0| < \varepsilon,$$

así que $x - y \in B(x_0 - y_0, \varepsilon) \subseteq U$. Se sigue así que $(x_0, y_0) \in V \subseteq g_3^{-1}[U]$. Como este punto fue arbitrario y V es abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, se sigue que $g_3^{-1}[U]$ es abierto. Por tanto, g_3 es continua.

Por los tres incisos anteriores se tiene que $(\mathbb{R}, +, \tau_u)$ es grupo topológico. Este grupo topológico será denotado simplemente por $\mathbb{R}$ siempre que no haya confusión.

Ejemplo 1.6 (Grupo Discreto)
Sea $(G, \cdot)$ grupo. Podemos dotar de G a la topología discreta $\tau_D = \mathcal{P}(G)$, con la cual se cumple que:

(1) $(G, \cdot)$ es grupo.

(2) (G, τ_D) es espacio topológico.

(3) La función $g_3 : G \times G \to G$ dada por $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ es continua, pues, para todo abierto $U \subseteq G$ se tiene que $g_3^{-1}[U] \subseteq G \times G$ es abierto, ya que este espacio es discreto por ser producto de dos espacios discretos.

Por los tres incisos anteriores se tiene que $(G, \cdot, \tau_D)$ es grupo topológico, el cual no necesariamente es abeliano, a diferencia del dado en el ejemplo anterior.

Una de las primeras ventajas que surgen en el estudio de los grupos topológicos es que ciertas propiedades locales se vuelven globales desde el punto de vista de la topología.

Teorema 1.7 (Traslaciones por la Derecha e Izquierda, e Inversión)
Sea G un grupo topológico. Si $g \in G$ es un elemento arbitrario fijo, entonces, las funciones φ_g y

σ_g de G en sí mismo dadas por:

$$\varphi_g(x) = xg \quad \text{y} \quad \sigma_g(x) = gx,$$

para todo $x \in G$, son homeomorfismos. Además, la inversión $f : G \to G$ definida por $f(x) = x^{-1}$, para todo $x \in G$, también es un homeomorfismo.

Las funciones φ_g y σ_g son llamadas **traslaciones por la derecha e izquierda**, respectivamente.

Demostración:

Por la definición de grupo topológico, las funciones φ_g, σ_g y f son continuas. Veamos que son homeomorfismos de G en G:

(1) La función φ_g tiene como inversa izquierda y derecha a $\varphi_{g^{-1}}$, pues:

$$\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}}(x) = (xg^{-1})g = x \quad \text{y} \quad \varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g(x) = (xg)g^{-1} = x,$$

para todo $x \in G$. Por tanto, φ_g es biyección con inversa $\varphi_{g^{-1}}$, la cual es continua, luego es homeomorfismo.

(2) Para σ_g el caso es análogo a φ_g cambiando el orden del producto.

(3) Para f el resultado es inmediato, pues es biyectiva y su inversa es ella misma.

■

Los resultados siguientes nos permitirán estudiar las propiedades topológicas locales de un grupo topológico G en un solo punto, que por simplificar siempre tomaremos la identidad e_G del grupo. Para ello, introducimos la siguiente definición:

Definición 1.2 (Espacio homogéneo)
Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que el espacio es **homogéneo** si para todo $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $f : X \to X$ tal que $f(x) = y$.

Ejemplo 1.8 (Todo Espacio Discreto es Homogéneo)
Sea (X, τ_D) espacio topológico con τ_D la topología discreta. Entonces, toda función de X en X es continua, por lo que si $x, y \in X$, se tiene que la función $f : X \to X$ dada por:

$$f(z) = \begin{cases} x & \text{si} \quad z = y \\ y & \text{si} \quad z = x \\ z & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \forall z \in X,$$

es continua, además, su inversa también es continua, con lo cual f es homeomorfismo. Se tiene así que (X, τ_D) es un espacio homogéneo.

Corolario 1.9 (Grupo Topológico es Espacio Homogéneo)
Todo grupo topológico G es un espacio homogéneo.

Demostración:
Sean $g, h \in G$. Entonces, el homeomorfismo $\varphi_{g^{-1}h} : G \to G$ es tal que:

$$\varphi_{g^{-1}h}(g) = g(g^{-1}h) = h.$$

Por tanto, G es un espacio homogéneo. ■

Ejemplo 1.10 (**$\mathbb{R}$ es Espacio Homogéneo**)
$\mathbb{R}$ es espacio homogéneo por ser grupo topológico y por el corolario anterior.

Este corolario resulta importante, ya que si una propiedad topológica $\boldsymbol{P}$ es válida en algún punto de un grupo topológico, por ser el espacio homogéneo se deduce que también debe cumplirse para cualquier otro punto del espacio. De esta forma, solo basta que $\boldsymbol{P}$ sea válida en la identidad del grupo.

Como en grupos y en espacios topológicos, nos interesan las funciones que preservan las propiedades entre estos, por lo cual resultará relevante estudiar tales funciones:

Definición 1.3 (**Isomorfismo Topológico y Automorfismo Topológico**)
Sean G_1 y G_2 dos grupos topológicos.

(1) Decimos que una función biyectiva $f : G_1 \to G_2$ es un **isomorfismo topológico** si f y f^{-1} son homomorfismos continuos. En tal caso decimos que G_1 y G_2 son **topológicamente isomorfos** y lo denotamos por $G_1 \cong G_2$.

(2) Si en *(1)* se tiene que $G_1 = G_2$, decimos que f es un **automorfismo topológico**.

Ejemplo 1.11
Consideremos la función identidad $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ del grupo topológico $(\mathbb{R}, +, \tau_u)$ en $(\mathbb{R}, +, \tau_D)$ siendo τ_D la topología discreta sobre $\mathbb{R}$. Se tiene que esta función es un isomorfismo que no es continuo, por lo cual no es isomorfismo topológico.

Así que los grupos topológicos $(\mathbb{R}, +, \tau_u)$ y $(\mathbb{R}, +, \tau_D)$ no son topológicamente isomorfos.

Teorema 1.12 (**Familia de Automorfismos Topológicos**)
Sea G es un grupo topológico y $a \in G$ fijo. Entonces, la función $g : G \to G$ tal que $x \mapsto axa^{-1}$ es un automorfismo topológico.

Demostración:
Observemos que $g(x) = \sigma_a \circ \varphi_a^{-1}(x)$, para todo $x \in G$, siendo las funciones $\varphi_{a^{-1}}$ y σ_a las traslaciones del Teorema (1.7), las cuales son homeomorfismos, por tanto g también lo es. Además, g es homomorfismo, ya que:

$$g(xy) = axya^{-1} = \left(axa^{-1}\right)\left(aya^{-1}\right) = g(x)g(y).$$

Por ende, g es automorfismo topológico. ■

Ejemplo 1.13 (**Grupo Lineal General de Orden** n)
Consideremos el grupo $GL(n, \mathbb{R})$ formado por las matrices no singulares (o invertibles) de orden $n \in \mathbb{N}$, con elementos en el campo $\mathbb{R}$ y como operación de grupo la multiplicación usual de matrices,

esto es, si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ y $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, entonces:

$$A \cdot B = AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n},$$

donde $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$, para todo $i, j \in [\![1, n]\!]$. Dotamos a $GL(n, \mathbb{R})$ de la métrica:

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j} - b_{i,j})^2}, \quad \forall A, B \in GL(n, \mathbb{R}).$$

No es complicado probar que esta es una métrica sobre $GL(n, R)$. Con esta métrica d podemos inducir una topología τ_d sobre $GL(n, \mathbb{R})$ que tiene como una base a las bolas abiertas.

Afirmamos que $GL(n, \mathbb{R})$ es grupo topológico con la topología τ_d. En efecto, veamos que las funciones $g_1 : GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ y $g_2 : GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ dadas por:

$$g_1(A, B) = AB \quad \text{y} \quad g_2(A) = A^{-1},$$

para todo $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$, son continuas. Esto se tiene de forma inmediata haciendo la identificación de $GL(n, \mathbb{R})$ como subespacio de $\mathbb{R}^{n\times n}$ mediante el homeomorfismo $f : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ dado por:

$$A \mapsto f(A) = (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,n}, \ldots, a_{n,n}), \quad \forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Si $A \in GL(n, \mathbb{R})$, tenemos del Teorema (1.12) el automorfismo topológico $g_A : GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ dado por:

$$X \mapsto AXA^{-1}, \quad \forall X \in GL(n, \mathbb{R}),$$

el cual es diferente de la identidad, pues en general el producto de matrices no conmuta.

Observación 1.14
En el caso de que el grupo G sea abeliano, el automorfismo topológico G definido en el teorema anterior es trivial.

El siguiente resultado tiene como objetivo describir la topología del grupo topológico, que en este caso resulta más sencillo que describir la topología de un espacio topológico. Antes de ello una definición:

Definición 1.4 (Sistema Fundamental de Vecindades y Base Local)
Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$.

(1) Una familia $\mathcal{V}_x$ de subconjuntos de X es un **sistema fundamental de vecindades para x en X** si $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{V}(x)$ (donde $\mathcal{V}(x)$ denota al conjunto de todas las vecindades de x) y para toda vecindad $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $W \in \mathcal{V}_x$ tal que $x \in W \subseteq V$.

(2) Una familia $\mathcal{B}_x$ de subconjuntos de X es una **base local para x en X** si $\mathcal{B}_x \subseteq \tau$ es una familia de abiertos que contienen a x y, para todo $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subseteq V$.

Siempre que sea claro el espacio en el que se está trabajando, se omitirá el mismo al mencionar alguno de los conceptos anteriores.

Observación 1.15 (**Diferencia entre Sistema Fundamental de Vecindades y Base Local**)
Toda base local es un sistema fundamental de vecindades (ambos en el mismo punto), pero no al revés, pues puede que tengamos un sistema fundamental de vecindades que no esté formado por conjuntos abiertos.

Para que un sistema fundamental de vecindades sea base local, es necesario que todos los conjuntos de la familia sean abiertos.

De un sistema fundamental de vecindades se puede obtener una base local tomando los interiores de cada elemento de la familia, por lo que en esencia el concepto es casi el mismo que el de base local.

Ejemplo 1.16 (**Sistema Fundamental de Vecindades que no es Base Local**)
En el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_u)$ un sistema fundamental de vecindades para 0 es:

$$\left\{[-\varepsilon, \varepsilon] \subseteq \mathbb{R} \middle| \varepsilon > 0\right\},$$

pero no es base local para 0.

Resulta que es posible caracterizar la topología del grupo dada una base local para la identidad del mismo:

Lema 1.17 (**Caracterización de Topología con Base Local en la Identidad**)
Sean G un grupo topológico y $\mathcal{B}_{e_G}$ una base local para e_G. Entonces, las familias:

$$\left\{xB \subseteq G \middle| x \in G \text{ y } B \in \mathcal{B}_{e_G}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{Bx \subseteq G \middle| x \in G \text{ y } B \in \mathcal{B}_{e_G}\right\},$$

son bases para la topología de G, donde $xB = \left\{xb \middle| b \in B\right\}$ y $Bx = \left\{bx \middle| b \in B\right\}$ son las traslaciones izquierda y derecha, respectivamente, de B.

Demostración:
Sea U un abierto no vacío de G y $a \in U$. Probaremos que existe $B \in \mathcal{B}_{e_G}$ tal que:

$$a \in aB \subseteq U$$

Consideremos la función $\sigma_{a^{-1}} : G \to G$ tal que $x \mapsto a^{-1}x$. Por el Teorema (1.7) esta función es un homeomorfismo, el cual transforma al conjunto abierto U en el abierto $a^{-1}U$. Notemos que $e_G \in a^{-1}U$, pues $e_G = a^{-1}a \in a^{-1}U$. Como $\mathcal{B}_{e_G}$ es una base local para e_G, entonces existe $B \in \mathcal{B}_{e_G}$ tal que:

$$e_G \in B \subseteq a^{-1}U,$$

por lo cual:

$$a \in aB \subseteq aa^{-1}U = U.$$

Se tiene así el resultado para la primera familia. Para la segunda se procede de forma análoga usando ahora la función $\varphi_{a^{-1}}$. ■

La notación de traslaciones izquierda y derecha de un conjunto usada en el lema anterior será usada a lo largo de todo el texto.

El siguiente lema nos proporciona sistema fundamental de vecindades para la identidad formada por vecindades tales que $V^{-1} = V$.

Definición 1.5 (Vecindades Simétricas)
Sea G grupo topológico. Una vecindad V de e_G es llamada **simétrica** si $V = V^{-1}$.

Ejemplo 1.18 (Vecindades Simétricas en $\mathbb{R}$)
Consideremos el grupo topológico $(\mathbb{R}, +, \tau_u)$. Las vecindades $[-1, 1]$, y $]-1/n, 1/n[$, para todo $n \in \mathbb{N}$, son vecindades simétricas de 0. En cambio, $[-1, 2]$ y $[-\pi, e]$ no son vecindades simétricas de 0.

Lema 1.19 (Vecindades Simétricas forman un Sistema Fundamental de Vecindades)
Sean G un grupo topológico y $U \in \mathcal{N}(e_G)$. Entonces, existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $V^{-1} = V \subseteq U$.

Por tanto, las vecindades simétricas de la identidad forman un sistema fundamental de vecindades para e_G.

Demostración:
Sean $U \in \mathcal{N}(e_G)$ y $f : G \to G$ tal que $x \mapsto x^{-1}$. Como f es un homeomorfismo de G en G por el Teorema (1.7), entonces $f[U] = U^{-1}$ es una vecindad de e_G, por lo cual $V = U \cap U^{-1}$ es una vecindad de e_G tal que $V = V^{-1}$, la cual cumple que $V \subseteq U$.

La última parte se tiene de la definición de sistema fundamental de vecindades. ∎

Otra propiedad importante de la identidad de un grupo topológico e_G es que admite un sistema fundamental de vecindades formado por conjuntos cerrados.

Lema 1.20
Sean G grupo topológico y $U \in \mathcal{N}(e_G)$. Entonces:

(1) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $V^n \subseteq U$, donde:

$$V^n = \underbrace{V \cdots V}_{n\text{-veces}}.$$

(2) Existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $\overline{V} \subseteq U$. En particular, las vecindades cerradas de e_G constituyen un sistema fundamental de vecindades para e_G cuyos elementos son subconjuntos cerrados.

Demostración:
De *(1)*: Procederemos por inducción sobre n:

- Para $n = 1$ el resultado es inmediato, pues tomando $V = U$ se tiene lo deseado.
- Supongamos el resultado cierto para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para U existe $W \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $W^n \subseteq U$. Por la Observación (1.2) se tiene que para W existen $V_1, V_2 \in \mathcal{N}(e_G)$ tales que $V_1V_2 \subseteq W$. Tomemos $V = V_1 \cap V_2$, entonces $e_G \in V$, por lo cual $V \in \mathcal{N}(e_G)$. Además:

$$V^{n+1} = V \cdot V \cdot V^{n-1} \subseteq V_1 \cdot V_2 \cdot W^{n-1} \subseteq W \cdot W^{n-1} = W^n \subseteq U.$$

Aplicando inducción se sigue el resultado.

De *(2)*: Por *(1)* existe $W \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $W^2 \subseteq U$. Como W es vecindad de e_G, tomemos $V = W \cap W^{-1}$. Se tiene que V es una vecindad simétrica de e_G tal que:

$$V^2 \subseteq W^2 \subseteq U. \tag{1.1}$$

Si $x \in \overline{V}$, entonces como xV es una vecindad de x (ya que la traslación por la izquierda σ_x del Teorema (1.7) es un homeomorfismo y $e_G \in V$), por lo que intersección $xV \cap V$ es no vacía, luego existen $v_1, v_2 \in V$ tales que:

$$xv_1 = v_2,$$

por lo cual, usando (1.1) se sigue que $x = v_2v_1^{-1} \in V \cdot V^{-1} = V^2 \subseteq U$. Por tanto, $\overline{V} \subseteq U$. ■

OBSERVACIÓN 1.21
En el caso en que $n - 1 = 0$ en el inciso *(1)* de la parte anterior, definimos:

$$V^0 = \{e_G\},$$

para todo $V \in \mathcal{N}(e_G)$.

DEFINICIÓN 1.6 (Bases Locales de Vecindades $\mathring{\mathcal{N}}(x)$ y $\mathring{\mathcal{N}}^*(x)$)
Sea G grupo topológico y $x \in G$. Se denotará por $\mathring{\mathcal{N}}(x)$ y $\mathring{\mathcal{N}}^*(x)$ a la **base local de vecindades para** x que **son abiertas** y a las que **son abiertas y simétricas**, respectivamente.

LEMA 1.22
Sean G grupo topológico y $U \in \mathcal{N}(e_G)$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $V \in \mathring{\mathcal{N}}^*(e_G)$ tal que:

$$V^n \subseteq U$$

En particular, las vecindades abiertas y simétricas de e_G forman una base local para e_G.

Demostración:
Sea $n \in \mathbb{N}$. Por *(1)* del Lema (1.20) se tiene que para U existe una vecindad W_1 de e_G tal que:

$$W_1^n \subseteq U,$$

y para W_1 por el Lema (1.19) existe una vecindad W_2 de e_G simétrica tal que:

$$W_2 \subseteq W_1,$$

lo cual implica que:

$$W_2^n \subseteq W_1^n \subseteq U.$$

Por ser W_2 vecindad existe un abierto $W_3 \subseteq G$ tal que $W_3 \subseteq W_2$. Sea $V = W_3 \cap W_3^{-1}$, se tiene que V es una vecindad abierta simétrica de e_G que cumple:

$$V^n \subseteq W_3^n \subseteq W_2^n \subseteq U,$$

lo que prueba el resultado. ■

Teorema 1.23
Sean G un grupo topológico, $a \in G$ y A, B, C, U subconjuntos de G. Entonces:

(1) Si U es abierto, entonces los conjuntos aU, Ua, U^{-1}, CU y UC son abiertos.

(2) Si A es cerrado, entonces aA, Aa y A^{-1} son conjuntos cerrados.

(3) Si A y B son compactos, también lo son AB y A^{-1}.

(4) Se cumple que:

$$\overline{A} = \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} AW = \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} WA.$$

Demostración:
De *(1)*: Por el Teorema (1.7) las funciones: φ_a, σ_a y $f : G \to G$ tal que $f(x) = x^{-1}$, son homeomorfismos, para todo $a \in G$. Por lo tanto, si U es abierto, entonces la imagen directa de U bajo estas funciones (es decir, los conjuntos aU, Ua, U^{-1}) son abiertos, para todo $a \in G$. Para los dos últimos conjuntos basta con observar lo siguiente:

$$CU = \bigcup_{c \in C} cU,$$
$$UC = \bigcup_{c \in C} Uc,$$

luego, por ser uniones arbitrarias de abiertos, los conjuntos CU y UC son abiertos.

De *(2)*: Es análogo a la primera parte de *(1)*, usando el hecho de que todo homeomorfismo es una función cerrada.

De *(3)*: Como A y B son compactos, entonces $A \times B$ es compacto en el espacio topológico producto $G \times G$, por lo cual al ser $g_1 : G \times G \to G$ función tal que $(x, y) \mapsto xy$ una función continua, se sigue que la imagen de este compacto $f[A \times B] = AB$ es compacta. De forma similar para A^{-1} con la función f se obtiene que A^{-1} es compacto.

De *(4)*: Caracterizaremos a los conjuntos AW y WA (donde $W \in \mathcal{N}(e_G)$) antes de ver los elementos de la intersección. Sea $W \in \mathcal{N}(e_G)$, por el Lema (1.22) existe un abierto $V \in \mathring{\mathcal{N}}^*(e_G)$ tal que $V \subseteq W$. Por *(1)* el producto AV es abierto y $A \subseteq AV$ (pues $e_G \in V$).

Además, $\overline{A} \subseteq AW$, pues si $x \in \overline{A}$, por *(1)* se sigue que xV es una vecindad de x, luego $xV \cap A \neq \emptyset$, así que existen $v \in V$ y $a \in A$ tales que $xv = a$, por tanto:

$$x = av^{-1} \in AV^{-1} = AV \subseteq AW.$$

Como la vecindad W fue arbitraria, se sigue que:

$$\overline{A} \subseteq \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} AW.$$

Ahora, sean $x \in \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} AW$ y $V \in \mathcal{N}(x)$. Debemos probar que $V \cap A \neq \emptyset$. Se tiene que $x^{-1}V \in \mathcal{N}(e_G)$ por *(1)*, por ende $V^{-1}x \in \mathcal{N}(e_G)$ (usando el homeomorfismo f).

Por tanto, como $x \in \bigcap_{W\in\mathcal{N}(e_G)} AW$ en particular $x \in AV^{-1}x$, así existen $a \in A$ y $v \in V$ tales que $x = av^{-1}x$, es decir $a = v \in V$ y $a \in A$, por lo cual $a \in A \cap V$. Por tanto, $A \cap V \neq \emptyset$. Se sigue así que:

$$\bigcap_{W\in\mathcal{N}(e_G)} AW \subseteq \overline{A}.$$

De ambas desigualdades se sigue la igualdad.

Para la otra igualdad se procede de forma análoga a la hecha anteriormente. ■

Observación 1.24
Por el teorema anterior inciso *(1)* se tiene que si $U \subseteq G$ es abierto, entonces U^n es abierto. Esto se tiene aplicando inducción sobre n.

Resulta que todo grupo topológico es un espacio T_3, como lo muestra el siguiente resultado:

Teorema 1.25 (Grupos Topológicos son Espacios T_3)
Todo grupo topológico G es un espacio T_3.

Demostración:
Sea G un grupo topológico. Tomemos $x \in G$ y U un abierto no vacío tal que $x \in U$, por el inciso *(1)* del teorema anterior se tiene que $x^{-1}U \in \mathcal{N}(e_G)$ por cual, del Lema (1.20) inciso *(2)* se tiene que existe una vecindad $V \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $\overline{V} \subseteq x^{-1}U$, entonces:

$$x \in x\overline{V} \subseteq U.$$

Por lo cual:

$$x \in \overline{xV} \subseteq U,$$

por la pertenencia y contención anterior y el hecho de que $\overline{xV} \subseteq x\overline{V}$ (ya que $x\overline{V}$ es un cerrado que contiene a xV por el inciso *(2)* del teorema anterior). Al ser $x \in G$ arbitrario se sigue que G es un espacio T_3. ■

Un resultado interesante es que los grupos topológicos T_0 son T_1, como se muestra a continuación:

Teorema 1.26 (Grupo Topológico T_0 es T_1)
Sea G un grupo topológico que es T_0, entonces es T_1.

Demostración:
Sean $x_1, x_2 \in G$ elementos distintos. Como G es T_0 existe $U \subseteq G$ abierto que contiene uno y solo uno de los siguientes dos elementos: e_G ó $x_1x_2^{-1}$. Analicemos ambos casos:

- Si $e_G \in U$, por el Lema (1.22) existe $V \in \mathring{\mathcal{N}}^*(e_G)$ tal que $V \subseteq U$, en particular $e_G \in V$ y $x_1x_2^{-1} \notin V$. Al ser V simétrica se sigue que:

$$\begin{aligned} x_1x_2^{-1} \notin V \quad &\text{y} \quad x_2x_1^{-1} \notin V. \\ \Rightarrow x_1 \notin Vx_2 \quad &\text{y} \quad x_2 \notin Vx_1. \end{aligned}$$

  Por tanto, Vx_2 es un abierto (por el Teorema (1.23) inciso *(1)*) que contiene a x_2 y no a x_1 y, Vx_1 es un abierto que contiene a x_1 pero no a x_2.

- Si $x_1x_2^{-1} \in U$, entonces $W = Ux_2x_1^{-1} \in \mathcal{N}(e_G)$ (por el teorema antes mencionado), como $e_G \notin U$ se tiene que $x_2x_1^{-1} \notin W$, nuevamente por el lema mencionado en el inciso anterior, existe $V \in \mathring{\mathcal{N}}^*(e_G)$ tal que $V \subseteq W$, en particular $e_G \in V$ y $x_2x_1^{-1} \notin V$. Como en el inciso anterior, al ser V simétrica se sigue que:

$$\begin{aligned} x_1x_2^{-1} \notin V \quad &\text{y} \quad x_2x_1^{-1} \notin V. \\ \Rightarrow x_1 \notin Vx_2 \quad &\text{y} \quad x_2 \notin Vx_1. \end{aligned}$$

  Ahora, Vx_2 es un abierto que contiene a x_2 y no a x_1 y, Vx_1 es un abierto que contiene a x_1 pero no a x_2.

Por ambos incisos se sigue que G es un espacio T_1. ■

Como todo espacio T_1 en automático es un espacio T_0, se sigue del teorema anterior que ambas propiedades son equivalentes en grupos topológicos. De forma inmediata de este teorema y del lema anterior se sigue el siguiente corolario:

Corolario 1.27 (Grupos Topológicos T_0 son Regulares)
Sea G un grupo topológico T_0. Entonces, G es un espacio regular (es decir, es T_3 y T_1), en particular es Hausdorff.

Ejemplo 1.28 (Grupo Topológico Indiscreto no es T_0)
Sea G un grupo no trivial dotado de la topología indiscreta. Entonces G es un grupo topológico que no es ni T_0 ni T_1 si tiene más de un elemento.

Ejemplo 1.29 ($\mathbb{R}$ es Regular)
$(\mathbb{R}, +, \tau_u)$ es espacio regular por el Corolario (1.27), ya que $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es Hausdorff, en particular es T_0.

Observación 1.30
De ahora en adelante solo se considerarán grupos topológicos T_0 (en automático, estos serán espacios regulares por el Corolario (1.27)) a menos que se mencione lo contrario.

Observación 1.31
En todo grupo topológico G que sea un espacio T_0 se tiene que el conjunto $\{e_G\}$ es cerrado.

El siguiente teorema tiene como objetivo resumir varias de las propiedades obtenidas anteriormente para la familia $\mathcal{N}(e_G)$. Además, este teorema nos proporciona un método para construir topologías sobre un grupo que lo conviertan en grupo topológico. Antes, veamos una definición que usaremos para el teorema:

Definición 1.7 (Base de Filtro)
Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{B}$ no vacía de subconjuntos no vacíos de X es una **base de filtro sobre** X si para todo $A, B \in \mathcal{B}$ existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.

Teorema 1.32
Sea G un grupo topológico. Entonces, la familia $\mathcal{N}(e_G)$ es un sistema fundamental de vecindades para e_G que satisface:

(1) Para cada $U \in \mathcal{N}(e_G)$ existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $V \cdot V \subseteq U$.

(2) Para cada $U \in \mathcal{N}(e_G)$ existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $V^{-1} \subseteq U$.

(3) Para cada $U \in \mathcal{N}(e_G)$ y para todo $a \in G$ existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $aVa^{-1} \subseteq U$.

Además, $\mathcal{N}(e_G)$ es base de filtro sobre G. Recíprocamente, si $\mathcal{V}$ es una base de filtro sobre G tal que todo elemento de la familia contiene a e_G y se cumplen las condiciones *(1)* a *(3)* (intercambiando a $\mathcal{N}(e_G)$ por $\mathcal{V}$) entonces, la familia:

$$\begin{aligned} \tau &= \left\{ U \subseteq G \middle| \forall a \in U \text{ existe } V \in \mathcal{V} \text{ tal que } aV \subseteq U \right\} \\ &= \left\{ U \subseteq G \middle| \forall a \in U \text{ existe } V \in \mathcal{V} \text{ tal que } Va \subseteq U \right\}, \end{aligned}$$

es una topología sobre G que hace de G un grupo topológico y tal que $\mathcal{V}$ es un sistema fundamental de vecindades para e_G.

Demostración:
Primero veamos que $\mathcal{N}(e_G)$ satisface las condiciones anteriores. En efecto, satisface *(1)* y *(2)* de forma inmediata por el Lema (1.22).

Para la tercera condición, sean $a \in G$ y $U \in \mathcal{N}(e_G)$. Dado que la función $g : G \to G$ tal que $g(x) = axa^{-1}$ es un automorfismo topológico por el Teorema (1.12), se sigue que para U existe una vecindad $V \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que:

$$aVa^{-1} = g[V] \subseteq U$$

Con lo cual, $\mathcal{N}(e_G)$ satisface las condiciones *(1)* a *(3)*. Es inmediato que es base de filtro para G, ya que $G \in \mathcal{N}(e_G)$, todo elemento de $\mathcal{N}(e_G)$ contiene a e_G y la intersección de dos vecindades de e_G sigue siendo vecindad de e_G.

Para la otra parte, sea $\mathcal{V}$ una base de filtro sobre G tal que todo elemento de la familia contiene a e_G y cumple las condiciones *(1)* a *(3)* (intercambiando a $\mathcal{N}(e_G)$ por $\mathcal{V}$). Primero, probaremos que las familias:

$$\tau = \left\{ U \subseteq G \middle| \forall a \in U \exists V \in \mathcal{V} \text{ tal que } aV \subseteq U \right\},$$

y

$$\tau' = \left\{ U \subseteq G \middle| \forall a \in U \exists V \in \mathcal{V} \text{ tal que } Va \subseteq U \right\},$$

son tales que $\tau = \tau'$. En efecto, sea $U \in \tau$, entonces para todo $a \in U$ existe $V_a \in \mathcal{V}$ tal que $aV_a \subseteq U$. Por el inciso *(3)* se tiene que para V_a existe $W_a \in \mathcal{V}$ tal que $a^{-1}W_a a \subseteq V_a$, es decir que $W_a a \subseteq aV_a$. Por tanto, $U \in \tau'$. Se sigue así que $\tau \subseteq \tau'$. La otra contención se hace de forma análoga.

Veamos ahora que τ es una topología sobre G. En efecto:

(a) Por vacuidad, $\emptyset \in \tau$ y, por definición $G \in \tau$.

(b) Sean $U_1, U_2 \in \tau$, tomemos:

$$U = U_1 \cap U_2.$$

Si $a \in U_1 \cap U_2$, se tiene que existen $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ tales que:

$$aV_1 \subseteq U_1 \quad \text{y} \quad aV_2 \subseteq U_2.$$

Dado que $\mathcal{V}$ es base de filtro, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq V_1 \cap V_2$, por lo cual:

$$aV \subseteq a(V_1 \cap V_2) = aV_1 \cap aV_2 \subseteq U_1 \cap U_2.$$

Por tanto, $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

(c) Sea $\left\{U_\alpha \middle| \alpha \in I\right\} \subseteq \tau$. Tomemos:

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha.$$

Si $a \in U$, entonces existe $\alpha \in I$ tal que $a \in U_\alpha$, como $U_\alpha \in \tau$, entonces existe $V_a \in \mathcal{V}$ tal que $aV_a \subseteq U_\alpha$, luego $aV_a \subseteq U$. Por tanto, $U \in \tau$.

De los incisos *(a)* a *(c)* se sigue que τ es una topología sobre G. Veamos que $\mathcal{V}$ es un sistema fundamental de vecindades para e_G, para ello hay que probar dos cosas:

(d) **Si $a \in G$, entonces aV es vecindad de a, para todo $V \in \mathcal{V}$.** Sean $a \in G$ y $V \in \mathcal{V}$. Afirmamos que el conjunto:

$$U_a = \left\{x \in aV \middle| \text{existe } V_x \in \mathcal{V} \text{ tal que } xV_x \subseteq aV\right\},$$

es un abierto tal que $a \in U_a \subseteq aV$. En efecto, se tiene que $a \in U_a$, pues $aV_a \subseteq aV$, tomando $V_a = V$, pues $V \in \mathcal{V}$. Sea ahora $x \in U_a$, entonces, existe $V_x \in \mathcal{V}$ tal que $xV_x \subseteq aV$. Por el inciso *(1)*, existe $V_1 \in \mathcal{V}$ tal que:

$$V_1 \cdot V_1 \subseteq V_x.$$

Por lo cual, si $y \in xV_1$ se tiene que:

$$yV_1 \subseteq (xV_1) \cdot V_1 = x(V_1 \cdot V_1) \subseteq xV_x \subseteq aV,$$

es decir que $y \in U_a$. Se sigue así que $xV_1 \subseteq U_a$. De la definición de abierto tenemos que U_a es abierto, por lo que aW es vecindad de a.

(e) **Para toda vecindad W de e_G existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq W$.** Sea W vecindad de e_G. Entonces, existe $U \subseteq G$ abierto tal que $e_G \in U \subseteq W$. De la definición de abierto se sigue que existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $e_GV \subseteq U$. Como $e_G \in V$, entonces:

$$e_G \in V = e_GV \subseteq U \subseteq W$$

Por el inciso *(d)* se tiene (tomando $a = e_G$) que $\mathcal{V}$ es una familia formada por vecindades de e_G (ya que $e_GV = V$, para todo $V \in \mathcal{V}$). Esto junto con el inciso *(e)* implica que $\mathcal{V}$ es un sistema fundamental de vecindades para e_G.

Finalmente, para ver que esta topología hace que G sea grupo topológico, debemos verificar que la función $(a,b) \mapsto ab^{-1}$ es continua. En efecto, sean $a, b \in G$ y $U \in \tau$ abierto que contiene a ab^{-1}. Entonces, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $ab^{-1}V \subseteq U$. Por el inciso *(3)* existe $V_1 \in \mathcal{V}$ tal que:

$$bV_1b^{-1} \subseteq V,$$

y por el inciso *(1)* existe $V_2 \in \mathcal{V}$ tal que:

$$V_2 \cdot V_2 \subseteq V_1,$$

además, por el inciso *(2)* existe $V_3 \in \mathcal{V}$ tal que:

$$V_3^{-1} \subseteq V_2.$$

Finalmente, como $\mathcal{V}$ es base de filtro sobre G, existe $W \in \mathcal{V}$ tal que:

$$W \subseteq V_3 \cap V_2$$

Dado que $W \subseteq V_3$, entonces $W_1^{-1} \subseteq V_3^{-1}$, por lo que:

$$W^{-1} \subseteq V_3^{-1} \subseteq V_2.$$

Por elección de V_3. Con lo cual:

$$W \cdot W^{-1} \subseteq V_2 \cdot V_2$$

Ahora, por el inciso *(d)* se tiene que aW y bW son vecindades de a y b, respectivamente. Estas son tales que:

$$\begin{aligned}
(aW) \cdot (bW)^{-1} &= aW \cdot W^{-1}b^{-1} \\
&\subseteq aV_2 \cdot V_2b^{-1} \\
&\subseteq aV_1b^{-1} \\
&= ab^{-1}bV_1b^{-1} \\
&\subseteq ab^{-1}V \\
&\subseteq U \\
\Rightarrow aW \times bW &\subseteq f^{-1}[U],
\end{aligned}$$

siendo f la función $(a,b) \mapsto ab^{-1}$. De lo anterior se sigue que $f^{-1}[U]$ es abierto en $G \times G$, con lo que f es continua.

Se sigue así que G es grupo topológico con la topología τ. ■

En particular, el teorema anterior nos dice como construir topologías sobre grupos para hacer del grupo un grupo topológico. Este fuerte resultado será usado más adelante en el Capítulo 4.

Nuestro objetivo ahora mejorar este resultado para generar topologías que sean al menos T_0, cosa que hacemos con el siguiente resultado:

Corolario 1.33

Sean G un grupo topológico y $\mathcal{V}$ un sistema fundamental de vecindades para e_G. Entonces, G es un espacio T_0 si y solo si:

$$\bigcap \mathcal{V} = \{e_G\}.$$

Demostración:
$\Rightarrow$): Supongamos que G es un espacio T_0. Por el Corolario (1.27), es un espacio regular, en particular es Hausdorff.

Sea $x \in G$ con $x \neq e_G$. Por ser el espacio Hausdorff existen abiertos $U, V \subseteq G$ con $x \in U$, $e_G \in V$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Dado que $\mathcal{V}$ es un sistema fundamental de vecindades para e_G, existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $e_G \in W \subseteq V$, así que:

$$W \cap U = \emptyset \Rightarrow x \notin W,$$

luego, $x \notin \bigcap \mathcal{V}$. Por tanto:

$$\bigcap \mathcal{V} = \{e_G\}.$$

$\Leftarrow$): Supongamos que:

$$\bigcap \mathcal{V} = \{e_G\}.$$

Probaremos que $\{e_G\}$ es un conjunto cerrado, para lo cual veremos que $G \setminus \{e_G\}$ es abierto. En efecto, sea $x \in G \setminus \{e_G\}$, entonces $x \notin \{e_G\}$ por lo que existe $V_x \in \mathcal{V}$ tal que:

$$x^{-1} \notin V_x.$$

En particular:

$$e_G \notin xV_x.$$

Se sigue que el conjunto:

$$G \setminus \{e_G\} = \bigcup_{x \in G \setminus \{e_G\}} xV_x,$$

es abierto, ya que xV_x es vecindad de x por el Teorema (1.23) inciso *(1)*. Por tanto, el conjunto $\{e_G\}$ es cerrado. Como todo grupo topológico es un espacio homogéneo, se sigue que $\{x\}$ es cerrado, para todo $x \in G$. Así que G es un espacio T_1, en particular es T_0. ■

§1.2 Homomorfismos e isomorfismos

Definición 1.8 (Función Abierta)
Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos. Una función $f : X_1 \to X_2$ es **abierta** si $f[U] \subseteq X_2$ es abierto en X_2, para todo $U \subseteq X_1$ abierto en X_1.

A continuación se enunciarán y demostrarán propiedades importantes de los homomorfismos continuos.

Lema 1.34
Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo entre grupos topológicos G y H. El homomorfismo φ es continuo (respectivamente, abierto) si lo es en la identidad del grupo e_G, es decir, si φ satisface la condición *(1)* (respectivamente, *(2)*) siguiente:

(1) Para toda vecindad W de e_H en H, existe U vecindad de e_G en G tal que $\varphi[U] \subseteq W$.

(2) Para toda vecindad U de e_G en G, existe W vecindad de e_H en H tal que $W \subseteq \varphi[U]$.

Demostración:
Supongamos que se cumple la condición *(1)*, debemos probar que φ es continua en todo punto de G. Para ello, basta con ver que si $g \in G$ es arbitrario y $W \subseteq H$ es una vecindad de $\varphi(g)$ en H, entonces existe una vecindad U de g en G tal que $\varphi[U] \subseteq W$.

Sean $g \in G$ y $W \subseteq H$ una vecindad de $h = \varphi(g)$ en H. Por el Teorema (1.23) inciso *(1)* podemos hacer $W = hW_1$, siendo $W_1 \subseteq H$ una vecindad de e_H. Por *(1)* existe una vecindad $U_1 \subseteq G$ de e_G tal que $\varphi[U_1] \subseteq W_1$. Entonces, por el teorema antes mencionado, $U = gU_1$ es una vecindad de g en G que cumple:

$$\varphi[U] = \varphi[gU_1] = \varphi(g)\varphi[U_1] = h\varphi[U_1] \subseteq hW_1 = W,$$

por tanto, φ es continua en g.

Supongamos ahora que se cumple la condición *(2)*, debemos probar que dado un abierto U en G, su imagen respecto a φ es abierta en H.

Sea $U \subseteq G$ abierto en G y $h \in \varphi[U]$, entonces $h = \varphi(g)$ para alguna $g \in G$. Nuevamente, por el teorema antes mencionado, se tiene que $g^{-1}U$ es una vecindad de e_G, aunado con la condición *(2)* se sigue que existe una vecindad W_1 de e_H tal que:

$$W_1 \subseteq \varphi[g^{-1}U],$$

pero, como $\varphi[g^{-1}U] = \varphi(g^{-1})\varphi[U] = h^{-1}\varphi[U]$, se sigue que $hW_1 \subseteq \varphi[U]$, siendo hW_1 vecindad de h. Tomando $W = hW_1$ se sigue que:

$$W \subseteq \varphi[U],$$

por tanto, $\varphi[U]$ es abierto en H. Se sigue así que φ es función abierta. ■

El lema anterior caracteriza a los homomorfismos continuos entre dos grupos topológicos, ya que solo basta que se cumpla la continuidad en la identidad del grupo.

En particular, esto caracteriza a los isomorfismos topológicos como lo muestra el siguiente resultado:

Corolario 1.35
Sea $\varphi : G_1 \to G_2$ un homomorfismo biyectivo entre dos grupos topológicos. Entonces, φ es isomorfismo topológico si y solo si f es continua y abierta en la identidad del grupo.

¿Existen homomorfismos entre grupos topológicos que no sean abiertos? La respuesta a esta pregunta es que sí, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.36 (Isomorfismo Continuo y no Abierto)
Sea (G, τ) un grupo topológico no discreto. Consideremos los grupos (G, τ) y (G, τ_D), donde τ_D es la topología discreta sobre G. Entonces, la función identidad $\mathbb{1}_G : G \to G$ entre los espacios topológicos (G, τ_D) y (G, τ) es un homomorfismo de G sobre sí mismo el cual es continuo, pero no es abierto.

§1.3 Subgrupos Topológicos y Grupo Topológico Cociente

Una forma de producir grupos topológicos es mediante los subgrupos de un grupo topológico y mediante el grupo topológico cociente. En esta sección estudiaremos la construcción de estas estructuras con el objetivo de construir más grupos topológicos y dar una versión del Primer Teorema de Isomorfismos en grupos topológicos.

Definición 1.9 (**Subgrupo Topológico**)
Sea G un grupo topológico. Un subconjunto no vacío H de G es un **subgrupo topológico** de G si:

(1) H es subgrupo de G.

(2) H es subespacio topológico con la topología inducida por G.

El siguiente resultado justifica la definición de subgrupo topológico en el sentido de que este último es por sí mismo un grupo topológico.

Proposición 1.37 (**Subgrupo Topológico es Grupo Topológico**)
Sean G un grupo topológico y H un subgrupo topológico de G. Entonces, H es un grupo topológico con la topología que hereda de G.

Demostración:
Se sigue de aplicar el Lema (1.4) a la función $(x,y)\mapsto xy^{-1}$, la cual es continua restringida a $H\times H$ y es tal que su rango es H, ya que H es subgrupo de G. ■

Ejemplo 1.38 (**Subgrupos Topológicos de** $\mathbb{R}$)
Sea $r\in\mathbb{R}$, se tiene que el conjunto $r\mathbb{Z}$ dado por:

$$r\mathbb{Z}=\left\{rm\middle|m\in\mathbb{Z}\right\},$$

dotado por la suma usual, es un subgrupo de $(\mathbb{R},+)$, luego, $r\mathbb{Z}$ es subgrupo topológico de $(\mathbb{R},+,\tau_u)$, dotándolo de la topología como subespacio de $\mathbb{R}$, esto es con la topología:

$$\tau_{r\mathbb{Z}}=\left\{U\cap r\mathbb{Z}\middle|U\in\tau_u\right\}.$$

Resulta que esta topología coincide con la topología discreta, con lo cual $(r\mathbb{Z},+,\tau_{r\mathbb{Z}})$ es subgrupo topológico de $(\mathbb{R},+,\tau_u)$, el cual es discreto.

Ahora, $(\mathbb{Q},+)$ es subgrupo de $(\mathbb{R},+)$, así que dotado de la topología como subespacio de $\mathbb{R}$:

$$\tau_{\mathbb{Q}}=\left\{U\cap \mathbb{Q}\middle|U\in\tau_u\right\},$$

hace de $(\mathbb{Q},+,\tau_{\mathbb{Q}})$ subgrupo topológico de $(\mathbb{R},+,\tau_u)$, el cual no es discreto.

Ejemplo 1.39 (**El Subgrupo Topológico** $SL(n,\mathbb{R})$)
Consideremos al grupo $GL(n,\mathbb{R})$. Un subgrupo de este grupo es:

$$SL(n,\mathbb{R})=\left\{A\in GL(n,\mathbb{R})\middle|\,|\det(A)|=1\right\},$$

por ser $GL(n,\mathbb{R})$ grupo topológico, podemos dotar a este subespacio con la topología de subespacio, digamos:

$$\tau_{SL(n,\mathbb{R})}=\left\{U\cap SL(n,\mathbb{R})\middle|U\in\tau_{GL(n,\mathbb{R})}\right\},$$

donde $\tau_{GL(n,\mathbb{R})}$ es la topología inducida por la métrica d del Ejemplo (1.13) en $GL(n,\mathbb{R})$.

Para continuar, veamos ahora algunas propiedades de la cerradura de conjuntos en grupos topológicos.

Proposición 1.40
Sea G grupo topológico. Si A y B son subconjuntos de G, entonces:

(1) $\overline{A}\cdot\overline{B}\subseteq\overline{AB}$.

(2) $(\overline{A})^{-1}=\overline{A^{-1}}$

(3) $x\overline{A}y=\overline{xAy}$, para todo $x,y\in G$.

(4) Si $ab=ba$ para todo $a\in A$ y $b\in B$, entonces $ab=ba$ para todo $a\in\overline{A}$ y $b\in\overline{B}$.

Demostración:
Sean A y B subconjuntos de G.

De *(1)*: Sean $x\in\overline{A}$, $y\in\overline{B}$ y W un abierto tal que $xy\in W$. Debemos probar que $W\cap(AB)\neq\emptyset$. En efecto, como $(x,y)\mapsto xy$ es continua, existen V_1 y V_2 vecindades de x y y, respectivamente, tales que $V_1V_2\subseteq W$. Por como se eligieron x y y, existen $a\in V_1\cap A$ y $b\in V_2\cap B$, luego $ab\in W\cap(AB)$, así que $xy\in\overline{AB}$. Por tanto, $\overline{A}\cdot\overline{B}\subseteq\overline{AB}$.

De *(2)* y *(3)*: Son inmediatas del hecho de que para cualquier homeomorfismo $f:G\to G$ se tiene que $f\left[\overline{A}\right]=\overline{f[A]}$, siendo $A\subseteq G$ arbitrario, en particular tomamos como f a las funciones $z\mapsto z^{-1}$ y $z\mapsto xzy$, siendo $x,y\in G$, las cuales son homeomorfismos como consecuencia del Teorema (1.7).

De *(4)*: Consideremos $h:G\times G\to G$ tal que $(a,b)\mapsto aba^{-1}b^{-1}$. Esta función es continua, por lo cual el subconjunto de $G\times G$:

$$\begin{aligned}H&=h^{-1}\left[e_G\right]\\&=\left\{(a,b)\in G\times G\middle|h(a,b)=e_G\right\}\\&=\left\{(a,b)\in G\times G\middle|aba^{-1}b^{-1}=e_G\right\}\\&=\left\{(a,b)\in G\times G\middle|ab=ba\right\},\end{aligned}$$

es cerrado. Además, $A\times B\subseteq H$, por lo cual $\overline{A\times B}\subseteq H$. Como $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$ se sigue que $\overline{A}\times\overline{B}\subseteq H$, es decir que $ab=ba$, para todo $a\in\overline{A}$ y $b\in\overline{B}$. ■

Definición 1.10 (Subgrupo Normal)
Sea G grupo y N un subgrupo de H. Decimos que N **es subgrupo normal de** G, si $a^{-1}Na\subseteq N$, para todo $a\in G$.

Observación 1.41
Lo anterior es equivalente a que $a^{-1}Na=N$, para todo $a\in G$.

Proposición 1.42 (Propiedades Subgrupos Topológicos de G)
Sean G grupo topológico y H, N subgrupos de G. Entonces:

(1) $\overline{H}$ es subgrupo de G.

(2) Si N es subgrupo normal de G, entonces $\overline{N}$ también es subgrupo normal de G.

(3) H es abierto si y solo si su interior es no vacío.

(4) Si H es abierto, entonces $\overline{H} = H$.

Demostración:
De *(1)*: Veamos que $\overline{H}$ es un subgrupo de G. En efecto, es no vacío, ya que $H \neq \emptyset$. Como H es un subgrupo de G, entonces $H^2 = H \cdot H \subseteq H$, luego $\overline{H^2} \subseteq \overline{H}$. Por *(1)* de la Proposición (1.40) se tiene que:

$$\left(\overline{H}\right)^2 = \overline{H} \cdot \overline{H} \subseteq \overline{H^2},$$

luego, $\left(\overline{H}\right)^2 \subseteq \overline{H}$, es decir que $\overline{H}$ es cerrado bajo el producto. Además, $H^{-1} \subseteq H$ y, por *(2)* de la proposición mencionada anteriormente:

$$\overline{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} \subseteq \overline{H},$$

es decir que $\overline{H}$ es cerrado bajo inversos. Luego, $\overline{H}$ es un subgrupo de G.

De *(2)*: Como N es subgrupo normal de G, en particular es subgrupo de G, luego $\overline{N}$ es subgrupo de G por el inciso *(1)*. Para ver que es subgrupo normal de G hay que verificar que:

$$a\overline{N}a^{-1} \subseteq \overline{N}, \quad \forall a \in G.$$

Por hipótesis y usando *(3)* de la proposición antes mencionada, se tiene que:

$$\begin{aligned} aNa^{-1} &\subseteq N, \quad \forall a \in G \\ \Rightarrow \overline{aNa^{-1}} &\subseteq \overline{N}, \quad \forall a \in G \\ \Rightarrow a\overline{N}a^{-1} &\subseteq \overline{N}, \quad \forall a \in G, \end{aligned}$$

por tanto, $\overline{N}$ es subgrupo normal de G.

De *(3)*: Probaremos la doble implicación:

$\Rightarrow$): Supongamos que H es abierto, entonces H coincide con su interior, en particular, H es no vacío por ser subgrupo de G, luego su interior es no vacío.

$\Leftarrow$): Supongamos que H tiene interior no vacío. Sea $x \in H$ un punto interior, entonces, por el Teorema (1.23) inciso *(1)*, debe de existir $U \subseteq G$ abierto que contiene a e_G tal que $x \in xU \subseteq H$. Ahora, si $y \in H$ se tiene que:

$$yU = y(x^{-1}x)U = (yx^{-1})xU \subseteq yx^{-1}H = H,$$

por tanto, yU es un abierto que contiene a y tal que $yU \subseteq H$, luego y es un punto interior de H. Así que H está contenido en su interior, por tanto, H es abierto.

De *(4)*: Supongamos que H es abierto. Se tiene que el conjunto:

$$G \setminus H = \bigcup_{x \in G \setminus H} Hx,$$

es abierto, pues Hx es abierto, para cada $x \in G \setminus H$, por el teorema antes mencionado. Luego H es cerrado, es decir que $H = \overline{H}$. ■

Ejemplo 1.43
Consideremos a $\mathbb{Q}$ como subgrupo topológico de $\mathbb{R}$. Por *(1)* de la proposición anterior debe suceder que:

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R},$$

es subgrupo de $\mathbb{R}$. Por ser $\mathbb{R}$ abeliano se sigue que $\mathbb{Q}$ es abeliano, luego es subgrupo normal de $\mathbb{R}$, con lo cual $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ por *(2)* es normal en $\mathbb{R}$.

Ahora, se tiene por *(3)* que $\mathbb{Q}$ no es abierto, ya que:

$$\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset,$$

lo cual también se podía deducir usando el hecho de que $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{Q}$, esta vez usando el inciso *(4)*.

El siguiente resultado muestra como generar subgrupos topológicos de un grupo topológico G dada una vecindad abierta y simétrica de e_G:

Teorema 1.44
Sean G un grupo topológico y $U \in \mathring{\mathcal{N}}^*(e_G)$. Entonces, el conjunto:

$$L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n,$$

es un subgrupo abierto y cerrado de G.

Demostración:
Se tiene que $L \neq \emptyset$, ya que $e_G \in L$. Sean ahora $x, y \in G$, entonces existen $k, l \in \mathbb{N}$ tales que $x \in U^k$ y $y \in U^l$ luego, $xy \in U^{k+l}$. Además, $x^{-1} \in \left(U^k\right)^{-1} = (U^{-1})^k = U^k$, por ser U simétrica. Por tanto, $xy, x^{-1} \in L$. Se tiene entonces que L es subgrupo de G.

Además, L es abierto por ser unión arbitraria de abiertos por la Observación (1.24), y cerrado por el inciso *(4)* de la proposición anterior. ■

Para finalizar, un resultado sobre subgrupos topológicos discretos.

Definición 1.11 (**Espacio Topológico Discreto**)
Un espacio topológico es **discreto** si todos los puntos del espacio son aislados. Lo anterior es equivalente a decir que está dotado de la topología discreta.

Proposición 1.45
Un subgrupo H de un grupo topológico G es discreto si y solo si tiene un punto aislado.

Demostración:

$\Rightarrow$): Supongamos que H es un subgrupo topológico discreto, es decir que está dotado de la topología discreta, luego el conjunto $\{e_G\}$ es una vecindad abierta de e_G para la cual se cumple que $\{e_G\} \cap H = \{e_G\}$, es decir que es un punto aislado de H.

$\Leftarrow$): Supongamos que H tiene un punto aislado, digamos $x \in H$, luego, existe una vecindad abierta $U \subseteq G$ de e_G tal que $xU \cap H = \{x\}$. Si ahora $y \in H$, se tiene que:

$$yU \cap H = yU \cap yx^{-1}H = yx^{-1}(xU \cap H) = yx^{-1}\{x\} = \{y\},$$

es decir, que todos los puntos de H son aislados. Por tanto, H es discreto. ■

§1.4 Grupos cocientes

En esta sección se estudiará el grupo topológico cociente de un grupo topológico con un subgrupo topológico normal de este.

Observación 1.46 (**Normalidad**)
En esta sección y lo que resta del texto, hablaremos de normalidad en el sentido algebraico (subgrupo normal) y no en el topológico. En este texto no se hablará de espacios topológicos normales, por lo que no habrá confusión al usar dicho término.

Recordemos que si G es un grupo y H un subgrupo de G, entonces se define una relación de equivalencia en G como sigue:

$$a \sim b \text{ si y sólo si } ab^{-1} \in H.$$

Las clases de equivalencia de esta relación reciben el nombre de **clases laterales derechas de** H. Denotaremos por $G/_D H$ al conjunto formado por las clases laterales derechas, es decir:

$$G/_D H = \left\{Ha \middle| a \in G\right\}.$$

De manera similar se definen las clases laterales izquierdas de H. Se denota por $G/_I H$ al conjunto:

$$G/_I H = \left\{aH \middle| a \in G\right\}.$$

En caso de que el subgrupo H sea normal en G, se sabe que $G/_I H = G/_D H = G/H$. Los siguientes resultados se establecen para clases laterales derechas y, de forma análoga, se cumplen para clases laterales izquierdas.

Introducimos ahora en $G/_D H$ una topología de la siguiente manera. Sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de G. Para cada $B \in \mathcal{B}$ definimos:

$$B^* = \left\{Hx \middle| x \in B\right\} = \pi[B],$$

y:

$$\mathcal{B}^* = \left\{B^* \middle| B \in \mathcal{B}\right\},$$

siendo $\pi : G \to G/_D H$ la función canónica, es decir, aquella tal que $g \mapsto Hg$.

Proposición 1.47 (Existencia de Topología sobre $G/_D H$)
Sean G grupo topológico, H un subgrupo de G y $\mathcal{B}$ una base para la topología de G. Entonces, $\mathcal{B}^*$ es base de una topología sobre $G/_D H$. Si H es cerrado, entonces esta topología sobre $G/_D H$ lo hace un espacio T_1.

Demostración:
Para la primera parte se deben verificar dos condiciones:

(1) Sea $Ha \in G/_D H$. Como $\mathcal{B}$ es base para G, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B$, luego $Ha \in B^*$. Así que:

$$G/_D H \subseteq \bigcup \mathcal{B}^*.$$

Dado que $B^* \subseteq G/_D H$, para todo $B^* \in \mathcal{B}^*$, entonces $\bigcup \mathcal{B}^* \subseteq G/_D H$. De ambas contenciones se sigue la igualdad.

(2) Sean $B_1^*, B_2^* \in \mathcal{B}^*$. Si $Ha \in B_1^* \cap B_2^*$ debemos encontrar $B_3^* \in \mathcal{B}^*$ tal que $Ha \in B_3^* \subseteq B_1^* \cap B_2^*$. Como $B_1^*, B_2^* \in \mathcal{B}^*$, entonces existen $b_1 \in B_1$ y $b_2 \in B_2$ tales que:

$$Ha = Hb_1 = Hb_2, \tag{1.2}$$

por lo cual, $Ha \subseteq HB_1 \cap HB_2$. Además, $HB_1 \cap HB_2$ es un conjunto abierto (por ser intersección de dos abiertos, los cuales lo son por el Teorema (1.23) inciso *(1)*). Se tiene que $a \in HB_1 \cap HB_2$ por (1.2), luego existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que:

$$a \in B_3 \subseteq HB_1 \cap HB_2.$$

Se sigue así que $Ha = Hb_1 \in B_3^*$. Veamos que $B_3^* \subseteq B_1^* \cap B_2^*$. En efecto, sea $Hb_3 \in B_3^*$ con $b_3 \in B_3$. Por la contención anterior $b_3 \in HB_1 \cap HB_2$, es decir que existen $h_1, h_2 \in H$, $b_1' \in B_1$ y $b_2' \in B_2$ tales que:

$$b_3 = h_1 b_1' = h_2 b_2',$$

luego:

$$Hb_3 = Hh_1 b_1' = Hb_1' \in B_1^* \quad \text{y} \quad Hb_3 = Hh_2 b_2' = Hb_2' \in B_2^*.$$

Por lo cual, $Hb_3 \in B_1^* \cap B_2^*$. Se sigue que $B_3^* \subseteq B_1^* \cap B_2^*$.

Por ambos incisos se sigue que $\mathcal{B}^*$ es base de una topología sobre $G/_D H$.

Para la otra parte, supongamos que H es cerrado. Sean $Ha, Hb \in G/_D H$ dos elementos distintos. Como Ha es cerrado por el teorema mencionado anteriormente inciso *(2)* y $b \notin Ha$, entonces existe $B_1 \in \mathcal{B}$ tal que $b \in B_1$ y $B_1 \cap Ha = \emptyset$ (pues G es regular). Entonces, $Hb \in B_1^*$ y $Ha \notin B_1^*$. De forma análoga se obtiene un abierto $B_2 \subseteq G$ tal que $Ha \in B_2^*$ y $Hb \notin B_2^*$.

Por tanto, $G/_D H$ es un espacio T_1. ■

Observación 1.48 (Distintas Bases de G Generan Misma Topología sobre $G/_D H$)
Sean G grupo topológico y H un subgrupo de G. Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son dos bases de la topología de G, entonces las topologías generadas por $\mathcal{B}_1^*$ y $\mathcal{B}_2^*$ son las mismas. En efecto, si $Hx \in B_1^* \in \mathcal{B}_1^*$, entonces existe $a \in B_1 \in \mathcal{B}_1$ tal que $Hx = Ha$. Como B_1 es abierto en G, al ser $\mathcal{B}_2$ base de la topología de G se sigue que existe B_2 tal que $a \in B_2 \subseteq B_1$, luego $Hx \in B_2^* \subseteq B_1^*$.

Por ende, para todo $B_1^* \in \mathcal{B}_1^*$ se tiene que B_1^* es un abierto en $G/_D H$, dotando este espacio de al topología generada por $\mathcal{B}_2^*$. Haciendo lo análogo cambiando los papeles de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, se sigue que para todo $B_2^* \in \mathcal{B}_2^*$ se tiene que B_2^* es un abierto en $G/_DH$, dotando este espacio de al topología generada por $\mathcal{B}_1^*$. Por tanto, las topologías generadas por estas dos bases deben ser la misma.

En resumen, lo que nos dice la observación anterior es que no importa que base de la topología de G tomemos, pues la topología de $G/_DH$ es independiente de la base de la topología de G elegida.

Ahora estudiaremos las propiedades de la función canónica $\pi : G \to G/_DH$, es decir aquella tal que $x \mapsto Hx$. Antes, una observación:

Observación 1.49 (**Abiertos en** $G/_DH$)
Sean G grupo topológico, H un subgrupo de G y $\mathcal{B}$ una base de la topología de G. Consideremos al espacio $G/_DH$ dotado de al topología generada por $\mathcal{B}^*$. Si $U^* \subseteq G/_DH$ es abierto, entonces existe $\left\{B_i \middle| i \in I\right\} \subseteq \mathcal{B}$ subfamilia tal que:

$$U^* = \bigcup_{i\in I} B_i^*,$$

por lo cual:

$$U^* = \bigcup_{i\in I} B_i^* = \bigcup_{i\in I} \pi\left[B_i\right] = \pi\left[\bigcup_{i\in I} B_i\right].$$

Tomemos $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Este conjunto es abierto en G y es tal que $U^* = \pi[U]$. Por ende, los abiertos en $G/_DU$ son imágenes de abiertos bajo la función canónica π.

Proposición 1.50
Sean G un grupo topológico, H un subgrupo de G y $\pi : G \to G/_DH$ la función canónica tal que $x \mapsto Hx$. Entonces, π es continua y abierta.

Demostración:
Veamos primero que es abierta. Sea $U \subseteq G$ abierto y tomemos $\mathcal{B}$ una base de la topología de G, entonces:

$$U = \bigcup_{i\in I} B_j$$

donde $\{B_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}$ es una subfamilia. Tenemos que:

$$\pi[U] = \pi\left[\bigcup_{i\in I} B_i\right] = \bigcup_{i\in I} \pi[B_i] = \bigcup_{i\in I} B_i^*$$

donde $B_i^* \in \mathcal{B}^*$, para todo $i \in I$. Luego, $\pi[U]$ es abierto. Se sigue así que π es función abierta.

Para probar que π es continua, sean $U^* \subseteq G/_DH$ abierto y $Hx \in U^*$. Por la Observación (1.49) se tiene que existe $U \subseteq G$ abierto tal que $U^* = \pi[U]$. Para probar que π es continua, hay que encontrar un abierto $V \subseteq G$ que contenga a x y tal que:

$$\pi[V] \subseteq U^*$$

tomemos $V = HU$, el cual es abierto en G por el Teorema (1.23) inciso *(1)*, además, $x \in V$, ya que como $Hx \in U^* = \pi[U]$, entonces existe $u \in U$ tal que $Hx = Hu$, es decir que $x = hu$ para algún $h \in H$, por definición de V se sigue que $x \in V$. Se tiene así que:

$$\pi[V] = \pi[HU] = \pi[U] = U^*$$

por tanto, π es continua. ■

El hecho de que la función canónica $\pi : G \to G/_D H$ sea continua y abierta es un hecho muy importante, el cual será de utilidad para probar los siguientes resultados.

El siguiente resultado muestra que las propiedades topológicas locales del espacio cociente $G/_D H$ también se pueden estudiar en un solo punto.

Proposición 1.51 ($G/_D H$ **es Espacio Homogéneo**)
Sean G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Entonces, $G/_D H$ es un espacio homogéneo.

Demostración:
Para cada $a \in G$ definimos la función $\Psi_a : G_D/H \to G_D/H$ dada por: $Hx \mapsto Hxa$. Se tiene lo siguiente:

- Ψ_a **está bien definida**. Sean $Hx_1, Hx_2 \in G/_D H$ tales que $Hx_1 = Hx_2$, luego existe $h \in H$ tal que $x_1 = hx_2$. Se tiene así que:

$$\Psi_a (Hx_1) = Hx_1 a = Hhx_2 a = Hx_2 a = \Psi_a (Hx_2),$$

  con lo cual Ψ_a está bien definida.

- Ψ_a **es inyectiva**. Si $\Psi_a(Hx) = \Psi_a(Hy)$, entonces $Hxa = Hya$, lo cual implica $(xa)(ya)^{-1} = xaa^{-1}y^{-1} = xy^{-1} \in H$, luego $Hx = Hy$. Con lo cual Ψ_a es inyectiva.

- Ψ_a **es suprayectiva**. Para todo $x \in G$ existe $Hxa^{-1} \in G/_D H$ tal que $\psi_a(Hxa^{-1}) = Hx$. Con lo cual Ψ_a es suprayectiva.

Además, tiene como inversa a $(\Psi_a)^{-1} = \Psi_{a^{-1}}$. Veamos que es un homeomorfismo, para ello, basta con ver que ella y su inversa son abiertas, pero, por como está dada la función inversa es suficiente con mostrar que Ψ_a es abierta.

Consideremos $\pi : G \to G/_D H$ la función canónica y sea $U^* \subseteq G/_D H$ abierto, entonces, por la Observación (1.49) existe $U \subseteq G$ abierto en G tal que $U^* = \pi[U]$. Se tiene así que:

$$\begin{aligned}\Psi_a [U^*] &= \left\{ \Psi_a(Hx) \middle| Hx \in U^* \right\} \\ &= \left\{ Hxa \middle| x \in U \right\} \\ &= \left\{ Hy \middle| y \in Ua \right\} \\ &= \pi [Ua],\end{aligned}$$

como U es abierto en G se tiene que Ua también lo es por el Teorema (1.23) inciso *(1)* y, al ser π un mapeo abierto por la proposición anterior se sigue que $\Psi_a [U^*]$ es abierta.

Por tanto, Ψ_a es homeomorfismo, para todo $a \in G$. Si $Ha, Hb \in G/_D H$, entonces:

$$\Psi_{a^{-1}b}(Ha) = H(aa^{-1}b) = Hb.$$

Se sigue que $G/_D H$ es un espacio homogéneo. ■

El siguiente resultado nos permitirá enunciar más propiedades del espacio $G/_D H$.

Lema 1.52
Sean G un grupo topológico, H un subgrupo de G y $U, V \in \overset{\circ}{\mathcal{N}}(e_G)$ en G tales que $VV^{-1} \subseteq U$. Entonces, si $\pi : G \to G/_D H$ es la función canónica, tenemos que:

$$\overline{\pi[V]} \subseteq \pi[U].$$

Demostración:
Sea $Hx \in \overline{\pi[V]}$, se tiene que $\pi[xV]$ es un abierto en $G/_D H$ (por ser xV abierto por el Teorema (1.23) inciso *(1)*) el cual contiene a Hx, luego:

$$\pi[xV] \cap \pi[V] \neq \emptyset,$$

por tanto, existen $v_1, v_2 \in V$ tales que:

$$Hxv_1 = Hv_2,$$

lo cual implica que $Hx = Hv_2v_1^{-1} \in H(VV^{-1}) \subseteq HU = \pi[U]$. Se sigue así que $\overline{\pi[V]} \subseteq \pi[U]$. ■

Teorema 1.53 ($G/_D H$ es Regular si H es Cerrado)
Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G. Entonces $G/_D H$ es un espacio regular, en particular es Hausdorff.

Demostración:
Por la Proposición (1.51) se tiene que $G/_D H$ es un espacio homogéneo, y por la Proposición (1.47) al ser H cerrado se sigue que $G/_D H$ es un espacio T_1. Por lo cual, para probar que es regular basta con ver que es T_3.

Como el espacio $G/_D H$ es homogéneo, es suficiente probar que para todo $U^* \subseteq G/_D H$ abierto tal que $H \in U^*$ existe $V^* \subseteq G/_D H$ abierto que contiene a H tal que $\overline{V^*} \subseteq U^*$.

Sea $U^* \subseteq G/_D H$ abierto tal que $H \in U^*$. Como π es continua, entonces $U = \pi^{-1}[U^*]$ es un abierto en G. Como $\pi(e_G) = He_G = H \in U^*$, entonces $e_G \in U$. Por el Lema (1.22) existe $V \in \overset{\circ}{\mathcal{N}}^*(e_G)$ vecindad abierta y simétrica de e_G tal que:

$$V^2 \subseteq U$$

en particular, $VV^{-1} \subseteq U$. Por el Lema (1.52) se sigue que $\overline{\pi[V]} \subseteq \pi[U]$. Tomando $V^* = \pi[V]$ abierto en $G/_D H$ se tiene que $\overline{V^*} \subseteq U^*$.

Así que el espacio $G/_D H$ es T_3, junto con el hecho de que este espacio es T_1, se sigue que $G/_D H$ es regular. ■

Para terminar de hablar de cocientes, terminaremos hablando del grupo topológico cociente, probando primero el siguiente resultado:

Teorema 1.54
Sea G grupo topológico y N un subgrupo normal de G. Entonces, G/N es grupo topológico.

Demostración:
Por la Proposición (1.47) se tiene que si $\mathcal{B}$ es base de la topología de G, entonces $\mathcal{B}^*$ es base de una topología sobre G/H. Sea τ^* la topología generada por esta base, es decir:

$$\tau^* = \left\{ \mathcal{U} \subseteq G/H \middle| \forall Hx \in \mathcal{U} \text{ existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } Hx \in B^* \subseteq \mathcal{U} \right\}.$$

Afirmamos que la función $(Hx, Hy) \mapsto Hxy^{-1}$ de $G/H \times G/H$ en G/H es continua. En efecto, basta con probar la continuidad de la función con los elementos de la base. Sea $B_1 \in \mathcal{B}$ tal que $Hxy^{-1} \in B_1^*$ con $xy^{-1} \in B_1$. Como la función $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ de $G \times G$ en G es continua, entonces por ser B_1 abierto en G se sigue que existen $B_2, B_3 \in \mathcal{B}$ con $x \in B_2$ y $y \in B_3$ tales que:

$$B_2 \cdot B_3^{-1} \subseteq B_1, \tag{1.3}$$

en particular, $Hx \in B_2^*$ y $Hy \in B_3^*$. Además, para todo $b_2 \in B_2$ y $b_3 \in B_3$ se cumple que:

$$\begin{aligned}(Hb_2) \cdot (Hb_3)^{-1} &= Hb_2 \cdot Hb_3^{-1} \\ &= Hb_2 b_3^{-1},\end{aligned}$$

con $Hb_2b_3^{-1} \in B_1^*$, ya que $b_2b_3^{-1} \in B_1$ por (1.3). Así que:

$$B_2^* \cdot (B_3^*)^{-1} \subseteq B_1^*.$$

Por tanto, la función $(Hx, Hy) \mapsto Hxy^{-1}$ de $G/H \times G/H$ en G/H es continua. Así que G/H es grupo topológico por el Lema (1.4). ■

La segunda parte de la Proposición (1.47) y el Teorema (1.54) nos dan pie a dar la siguiente definición.

Definición 1.12 (**Grupo Topológico Cociente**)
El espacio topológico G/N construido en el teorema anterior es llamado **grupo topológico cociente de G entre N** o **grupo cociente entre G y N**, si N es cerrado y normal en G.

La definición la hacemos de esta manera ya que de forma inmediata se tiene que por si N es normal, entonces G/N será un grupo topológico por el Teorema (1.54). Además, por el Teorema (1.53) se tiene que G/N es regular siempre que N sea cerrado en G. Al definir de esta manera el grupo topológico cociente garantizamos que siempre que N sea normal el espacio tendrá propiedades fuertes de separabilidad.

En el siguiente teorema hacemos un resumen de las propiedades enunciadas anteriormente:

Teorema 1.55 (**Propiedades del Grupo Topológico Cociente**)
Sean G un grupo topológico y N un subgrupo cerrado y normal de G. Entonces:

(1) G/N con la topología cociente es un grupo topológico.

(2) La función $\pi : G \to G/N$ es un homomorfismo continuo y abierto.

(3) El grupo G/N es un espacio T_1 y, por tanto, regular.

Con todas las herramientas desarrolladas en esta parte podemos ahora establecer teoremas clásicos de grupos en el contexto de grupos topológicos, como lo es el siguiente resultado:

Teorema 1.56 (**Primer Teorema de Isomorfismo en Grupos Topológicos**)
Sean G_1 y G_2 dos grupos topológicos y sea $f : G_1 \to G_2$ un epimorfismo continuo y abierto con kernel $N = \ker(f)$. Entonces, N es un subgrupo normal y cerrado de G_1 y el isomorfismo h de

G_1/N en G_2 dado por:

$$h(Nx) = f(x), \quad \forall x \in G_1,$$

es un isomorfismo topológico entre G_1/N y G_2.

Demostración:
Como f es epimorfismo, entonces N es subgrupo normal de G_1. Recordemos que:

$$\begin{aligned} N &= \left\{ x \in G_1 \middle| f(x) = e_{G_2} \right\} \\ &= f^{-1}\left[e_{G_2}\right], \end{aligned}$$

como f es continua se sigue que N es cerrado en G_1 (ya que G_2 es regular y, por ende $\{e_{G_2}\} \subseteq G_2$ es cerrado).

Por el Primer Teorema de Isomorfismos (en Teoría de Grupos) se tiene que la función $h : G_1/N \to G_2$ dada por:

$$h(Nx) = f(x), \quad \forall x \in G_1,$$

es un isomorfismo entre G_1/N y G_2. Para probar que es isomorfismo topológico basta con ver que h es abierta y continua. En efecto:

- h **es continua**. En efecto, sea $V \subseteq G_2$ abierto. Veamos que:

  $$h^{-1}[V] = \pi\left[f^{-1}[V]\right]. \tag{1.4}$$

  Para ello, notemos que se cumple lo siguiente:

  $$f^{-1}[V] = (h \circ \pi)^{-1}[V] = \pi^{-1}\left[h^{-1}[V]\right].$$

  Al ser π suprayectiva se sigue que:

  $$\pi\left[\pi^{-1}\left[h^{-1}[V]\right]\right] = h^{-1}[V],$$

  con lo cual, de ambas igualdades obtenemos que $\pi\left[f^{-1}[V]\right] = h^{-1}[V]$. Como f es continua, entonces $f^{-1}[V]$ es abierto en G_1 luego, al ser π un mapeo abierto, se tiene que $\pi\left[f^{-1}[V]\right]$ es abierto en G_1/N, esto es que $h^{-1}[V]$ es abierto en G_1/N. Por ende, h es continua.

- h **es abierta**. En efecto, sea $U^* \subseteq G_1/N$ abierto en G_1/N, entonces por la Observación (1.49) existe $U \subseteq G_1$ abierto tal que $\pi[U] = U^*$. Por ende:

  $$h[U^*] = h\left[\pi[U]\right] = f[U],$$

  donde el miembro de la izquierda es abierto ya que f es función abierta. Por tanto, h es abierta.

Por los dos incisos anteriores se sigue que h es isomorfismo topológico. ■

Para continuar, daremos un ejemplo de todo lo visto en esta sección.

Definición 1.13 (Grupo del Círculo)
El **grupo del círculo** se define como el grupo cociente:

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

donde $\mathbb{Z}$ es un subgrupo normal de $\mathbb{R}$.

Observación 1.57 ($\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ **y** $\mathbb{S}^1$ **son Topológicamente Isomorfos**)
Como $\mathbb{Z}$ es cerrado en $\mathbb{R}$, entonces podemos hacer de $\mathbb{T}$ un grupo topológico. Un conjunto completo de representantes es $R = [0,1[$, es decir:

$$\mathbb{T} = \left\{ r + \mathbb{Z} \middle| r \in R \right\},$$

donde $r + \mathbb{Z} = [r]$ es la clase de equivalencia con representante r. Consideremos ahora a la circunferencia unitaria:

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ e^{2\pi i x} \in \mathbb{C} \middle| x \in [0,1[\right\}.$$

Ya se sabe que $\mathbb{S}^1$ es grupo con la operación producto. Además, es grupo topológico con la topología la misma que la inducida por la topología usual de $\mathbb{C}$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ tal que $x \mapsto e^{2\pi i x}$. Más adelante se prueba que f es un epimorfismo continuo y abierto. Por tanto, como $\ker(f) = \mathbb{Z}$, se sigue que $\mathbb{T}$ y $\mathbb{S}^1$ son topológicamente isomorfos.

Además, dado que $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ es continua, al ser $[0,1]$ compacto se sigue que $\pi[[0,1]] = \mathbb{T}$ también es compacto.

Demostración:
Como la operación $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ de $\mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \setminus \{0\}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ es continua, se sigue que lo es restringida al subespacio $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ también lo es y es tal que es cerrada (alegbraicamente). Por tanto, por el Lema (1.4) se tiene que $\mathbb{S}^1$ es grupo topológico.

Veamos que f es epimorfismo continuo y abierto. Ya se sabe que esta función es continua, además, es homomorfismo pues:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= e^{2\pi i(x+y)} \\ &= e^{2\pi i x} \cdot e^{2\pi i y} \\ &= f(x) \cdot f(y), \end{aligned}$$

y es epimorfismo, pues para todo $z \in \mathbb{S}^1$ existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que:

$$z = e^{i\theta}.$$

Tomando $x = \frac{\theta}{2\pi} \in [0,1[$ se sigue que $f(x) = z$.

Veamos ahora que f es abierta. Para ello, notemos que una familia de básicos de la topología de $\mathbb{S}^1$ es de la forma:

$$B_{]a,b[} = \left\{ e^{2\pi i x} \in \mathbb{C} \middle| a < x < b \right\},$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Por lo cual, si $]a,b[\subseteq \mathbb{R}$ es un elemento básico de la topología usual de $\mathbb{R}$, entonces $f(]a,b[) = B_{]a,b[}$ es abierto, así que f es abierta. ■

§1.5 Productos Directos

Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de grupos. Podemos dotar de estructura de grupo al conjunto $G = \prod_{i \in I} G_i$ definiendo:

$$(x_i)_{i \in I} \cdot (y_i)_{i \in I} = (x_i y_i)_{i \in I}, \quad \forall (x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i.$$

Si para cada $i \in I$, $e_i \in G_i$ es el elemento identidad, entonces $e_G = (e_i)_{i\in I}$ es el elemento identidad de G, y:

$$(x_i)_{i\in I}^{-1} = \left(x_i^{-1}\right)_{i\in I},$$

para cada $(x_i)_{i\in I} \in G$.

Si tenemos ahora una familia no vacía de espacios topológicos $(X_i)_{i\in I}$, podemos dotar al producto de estos espacios $X = \prod_{i\in I} X_i$ de una topología, la llamada topología producto cuyos elementos básicos son de la forma:

$$U = \prod_{i\in I} U_i,$$

donde U_i es abierto en X_i y $U_i = X_i$, $\forall\!\!\!\!\forall\, i \in I$.

En este contexto, para cada $j \in I$ se define la **j-ésima proyección natural** $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ dada por:

$$(x_i)_{i\in I} \mapsto x_j, \quad \forall\, (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i.$$

Esta función es suprayectiva y continua. De forma similar si $(y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$, para cada $j \in I$ podemos construir la función $q_j : X_j \to \prod_{i\in I} X_i$ dada por:

$$(q_j(x))_i = \begin{cases} y_i & \text{si} \quad i \neq j \\ x_i & \text{si} \quad i = j \end{cases}.$$

Independientemente de la elección de $(y_i)_{i\in I}$ se sigue que q_j es una función inyectiva continua, para todo $j \in I$.

Lema 1.58
Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de espacios topológicos. Entonces los espacios dotados de la topología producto:

$$\left(\prod_{i\in I} X_i\right) \times \left(\prod_{i\in I} X_i\right) \quad \text{y} \quad \left(\prod_{i\in I} X_i \times X_i\right),$$

son homeomorfos.

Demostración:
Sea $X = \prod_{i\in I} X_i$. Consideremos la función $\Psi : X \times X \to \prod_{i\in I} X_i \times X_i$ dada por:

$$\left((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\right) \mapsto (x_i, y_i)_{i\in I}, \quad \forall\, (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in X.$$

Se tiene que Ψ está bien definida. Además, no es difícil ver que es biyección. Para ver que es homeomorfismo basta con ver que es continua y abierta:

- Ψ **es continua**. Sea $U_2 \subseteq \prod_{i\in I} X_i \times X_i$ básico de la topología producto, entonces:

$$U_2 = \prod_{i\in I} (U_2)_i,$$

donde $(U_2)_i \subseteq X_i \times X_i$ es abierto para todo $i \in I$ y $(U_2)_i = X_i \times X_i$ $\forall\!\!\!\!\forall\, i \in I$. Sea $J \subseteq I$ tal que:

$$(U_2)_j = X_j \times X_j, \quad \forall j \in J,$$

y $(U_2)_i \neq X_i \times X_i$ para todo $i \in I \setminus J$. Entonces, para todo $i \in I \setminus J$ existen $(U_2)_{i,1}, (U_2)_{i,2} \subseteq X_i$ abiertos en X_i tales que:

$$(U_2)_i = (U_2)_{i,1} \times (U_2)_{i,2}.$$

Para $i \in J$ tomemos:

$$(U_2)_{i,1} = (U_2)_{i,2} = X_i.$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Psi^{-1}[U_2] &= \left\{ \left((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\right) \in X \times X \middle| \Psi((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \in U_2 \right\} \\
&= \left\{ \left((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\right) \in X \times X \middle| (x_i, y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} (U_2)_i \right\} \\
&= \left\{ \left((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\right) \in X \times X \middle| (x_i, y_i) \in (U_2)_{i,1} \times (U_2)_{i,2} \text{ para todo } i \in I \setminus J \right\} \\
&= \left\{ \left((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\right) \in X \times X \middle| x_i \in (U_2)_{i,1} \text{ y } y_i \in (U_2)_{i,2} \text{ para todo } i \in I \setminus J \right\} \\
&= \left(\prod_{i\in I} (U_2)_{i,1} \right) \times \left(\prod_{i\in I} (U_2)_{i,2} \right),
\end{aligned}$$

donde $\left(\prod_{i\in I}(U_2)_{i,1}\right), \left(\prod_{i\in I}(U_2)_{i,2}\right) \subseteq X$ son abiertos en X por la elección de los $(U_2)_{i,j}$ con $j = 1, 2$ y dado que $I \setminus J$ es finito. Se sigue así que $\Psi^{-1}[U_2]$ es abierto y, por ser U_2 básico arbitrario se tiene que Ψ es función continua.

- Ψ **es abierta**. Sea $U_1 \subseteq X \times X$ un básico de la topología producto, es decir que:

$$U_1 = U_{1,1} \times U_{1,2},$$

donde $U_{1,k}$ son abiertos en X para todo $k = 1, 2$. Por ser abiertos en X se tiene que:

$$U_{1,k} = \prod_{i\in I} (U_{1,k})_i,$$

siendo $(U_{1,k})_i$ abierto en X_i para todo $i \in I$ con $(U_{1,k})_i = X_i$ $\not\forall\, i \in I$ y para todo $k = 1, 2$. Sean $J_1, J_2 \subseteq I$ tales que:

$$(U_{1,k})_j = X_j, \quad \forall j \in J_k,$$

para todo $k = 1, 2$, y:

$$(U_{1,k})_i \neq X_i, \quad \forall i \in I \setminus J_k,$$

para todo $k = 1, 2$. Se tiene así que:

$$\begin{aligned}
\Psi[U_1] &= \left\{ \Psi\left((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\right) \in \prod_{i\in I} X_i \times X_i \middle| \left((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\right) \in U_1 \right\} \\
&= \left\{ (x_i, y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i \times X_i \middle| \left((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\right) \in \left(\prod_{i\in I} (U_{1,1})_i \right) \times \left(\prod_{i\in I} (U_{1,2})_i \right) \right\} \\
&= \left\{ (x_i, y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i \times X_i \middle| x_i \in (U_{1,1})_i \text{ y } y_i \in (U_{1,2})_i \text{ para todo } i \in I \right\} \\
&= \prod_{i\in I} (U_{1,1})_i \times (U_{1,2})_i,
\end{aligned}$$

Como $(U_{1,1})_i \times (U_{1,2})_i$ es abierto para todo $i \in I$ y $(U_{1,1})_i \times (U_{1,2})_i = X_i \times X_i$ para todo $i \in J_1 \cap J_2 \subseteq I$ y, es diferente de $X_i \times X_i$ para todo $i \in I \setminus (J_1 \cap J_2) = (I \setminus J_1) \cup (I \setminus J_2)$, al ser $U_{1,1}$ y $U_{1,2}$ abiertos en X se tiene que los conjuntos:

$$I \setminus J_1 \quad \text{y} \quad I \setminus J_2,$$

son finitos, luego $I \setminus (J_1 \cap J_2)$ es finito. Por tanto, el conjunto $\prod_{i\in I}(U_{1,1})_i \times (U_{1,2})_i$ es básico de la topología producto del espacio $\prod_{i\in I} X_i \times X_i$, en particular es abierto. Se sigue al ser U_1 elemento básico arbitrario que la función Ψ es abierta.

■

¿Podemos dotar al grupo G de una estructura de grupo topológico? La respuesta la da la siguiente proposición:

Proposición 1.59 (**Producto Directo de Grupos Topológicos es Grupo Topológico**)
Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos topológicos. Entonces el grupo $G = \prod_{i\in I} G_i$ es grupo topológico con la topología producto.

Demostración:
Hay que probar que la función $h : G \times G \to G$ dada por:

$$\left((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\right) \mapsto (x_i)_{i\in I} \cdot (y_i)_{i\in I}^{-1}, \quad \forall\, (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in G,$$

es continua. Para ello, notemos que:

$$\begin{aligned} (x_i)_{i\in I} \cdot (y_i)_{i\in I}^{-1} &= (x_i)_{i\in I} \cdot \left(y_i^{-1}\right)_{i\in I} \\ &= \left(x_i y_i^{-1}\right)_{i\in I}, \quad \forall\, (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in G, \end{aligned}$$

así que la función h está dada por:

$$\left((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\right) \mapsto \left(x_i y_i^{-1}\right)_{i\in I}, \quad \forall\, (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in G.$$

Por el Lema (1.58) podemos suponer, dado que $G \times G$ y $\prod_{i\in I} G_i \times G_i$ son homeomorfos, que la función h va de $\prod_{i\in I} G_i \times G_i$ en G, esto es:

$$(x_i, y_i)_{i\in I} \mapsto (x_i y_i^{-1})_{i\in I}.$$

Las funciones componentes de h, es decir las funciones $h_j : \prod_{i\in I} G_i \times G_i \to G_j$:

$$(x_i, y_i)_{i\in I} \mapsto x_j y_j^{-1}, \quad \forall\, (x_i, y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i \times G_i,$$

para todo $j \in I$, son continuas, ya que son la composición de la j-ésima función proyección de $\prod_{i\in I} G_i \times G_i$ en $G_j \times G_j$ y de la función $(x_j, y_j) \mapsto x_j y_j^{-1}$ de $G_j \times G_j$ en G_j, las cuales son continuas, para todo $j \in I$, siendo la última continua ya que G_j es grupo topológico. Por tanto, h es continua. Se sigue así del Lema (1.4) que $\prod_{i\in I} G_i$ es grupo topológico con la topología producto. ■

Definición 1.14 (**Producto Directo de Grupos Topológicos**)
Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de grupos topológicos. El **producto directo** de la esta familia de grupos topológicos se obtiene al dotar al grupo:

$$G = \prod_{i\in I} G_i,$$

de la topología producto.

Teorema 1.60
Sean $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de grupos topológicos y sea N el subconjunto de $G = \prod_{i\in I} G_i$ que consta de todos los $x = (x_i)_{i\in I}$ tales que x_i es el elemento identidad de G_i, $\forall\!\!\!\forall\, i \in I$. Entonces, N es un subgrupo normal denso en G.

Demostración:
Sea:

$$N = \left\{(x_i)_{i\in I} \in G \middle| x_i = e_i,\ \forall\!\!\!\forall\, i \in I\right\}.$$

Ya se sabe que N es subgrupo normal de G. Veamos que es denso. Sea $U \subseteq G$ básico de la topología producto, entonces:

$$U = \prod_{i\in I} U_i,$$

donde U_i es abierto en G_i, para todo $i \in I$, y $U_i = X_i$ $\forall\!\!\!\forall\, i \in I$. Sea $J \subseteq I$ tal que:

$$U_i = X_i, \quad \forall i \in I \setminus J,$$

y:

$$U_j \neq X_j, \quad \forall j \in J.$$

Se tiene que J es un conjunto finito, tomemos así para cada $j \in J$ a $x_j \in X_j$ tal que $x_j \in U_j$ y hacemos $x_i = e_i$ para todo $i \in I \setminus J$. Se tiene así que $x = (x_i)_{i\in I} \in N$, pues J es un conjunto finito, además:

$$x_i \in U_i, \quad \forall i \in I,$$

por lo que $x \in U$. Se sigue así que $N \cap U \neq \emptyset$, por lo cual N es denso en G. ■

Observación 1.61 (**Suma Directa de Grupos Topológicos**)
En el teorema anterior, si G_i es abeliano para todo $i \in I$, el grupo $\prod_{i\in I} G_i$ será también abeliano. En tal caso denotamos por:

$$\bigoplus_{i\in I} G_i,$$

al subgrupo normal N, el cual lo denominaremos como la **Suma Directa de Grupos Topológicos**, es decir:

$$\bigoplus_{i\in I} G_i = \left\{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i \middle| x_i = e_i,\ \forall\!\!\!\forall\, i \in I\right\},$$

el cual es por sí mismo un grupo topológico por el teorema anterior, el cual es denso en $\prod_{i\in I} G_i$.

§1.6 Metrizabilidad

Definición 1.15 (Grupo Topológico Metrizable)
Sea $(G, \cdot, \tau)$ grupo topológico. Decimos que $(G, \cdot, \tau)$ es **metrizable** si existe una métrica $d : G \times G \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ tal que la topología generada por esta métrica τ_d sobre G coincide con la topología τ, esto es que $\tau_d = \tau$.

En esta definición, $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ denota a los números en $\mathbb{R}$ mayores o iguales a 0.

Observación 1.62
Para que un grupo topológico $(G, \cdot, \tau)$ sea metrizable basta con que el espacio (G, τ) sea metrizable.

Veamos algunos ejemplos de grupos topológicos metrizables:

Ejemplo 1.63 ($\mathbb{R}$ es Metrizable)
El espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es metrizable, luego el grupo topológico $(\mathbb{R}, +, \tau_u)$ es metrizable.

Si $H < \mathbb{R}$ es un subgrupo de $\mathbb{R}$, entonces H es grupo topológico metrizable, restringiendo la métrica a $H \times H$. Luego, los grupos topológicos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son subgrupos topológicos de $\mathbb{R}$ que son metrizables.

Podemos generalizar lo hecho con los subgrupos topológicos de $\mathbb{R}$ ahora con cualquier grupo topológico, como lo muestra la siguiente observación:

Observación 1.64
Si G es grupo topológico metrizable y H es un subgrupo de G, entonces H es un grupo topológico metrizable, restringiendo la métrica sobre G a $H \times H$.

Esta observación nos permite hacer lo siguiente:

Ejemplo 1.65 ($\mathbb{T}$ es Metrizable)
Consideremos el grupo del círculo:

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

por la Observación (1.57) los grupos topológicos $\mathbb{T}$ y $\mathbb{S}^1$ son topológicamente isomorfos. Se tiene que $(\mathbb{C} \setminus 0, \cdot, \tau_u)$ con τ_u la topología usual sobre $\mathbb{C}$ es un grupo topológico el cual es metrizable. Como $\mathbb{C}$ es metrizable dada la métrica $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ definida como:

$$d(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad \forall x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 \in \mathbb{C},$$

al ser $\mathbb{S}^1$ un subgrupo topológico de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, entonces $\mathbb{S}^1$ es metrizable. Luego, al ser topológicamente isomorfo a $\mathbb{T}$ se sigue que este último también es metrizable.

Para continuar con el estudio de metrizabilidad en grupos topológicos, primero debemos hablar de pseudonormas, mismas que nos permitirán bajo ciertas condiciones, definir una métrica sobre un grupo topológico.

Definición 1.16 (**Pseudonorma**)
Sea G un grupo. Una **pseudonorma en** G es una función $N : G \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes condiciones:

(1) $N(x) \geqslant 0$, para todo $x \in G$.

(2) $N(e_G) = 0$, con $e_G \in G$ la identidad del grupo.

(3) $N(x \cdot y^{-1}) \leqslant N(x) + N(y)$, para todo $x, y \in G$.

Observación 1.66
El inciso *(3)* de la definición anterior es equivalente al siguiente:

(4) $N(x \cdot y) \leqslant N(x) + N(y)$ y $N(x) = N(x^{-1})$, para todo $x, y \in G$.

Proposición 1.67 (**Pseudonormas y sus Propiedades**)
Sean G un grupo y N una pseudonorma en G. Entonces:

(1) $r \cdot N$ es una pseudonorma en G, para todo $r \geqslant 0$.

(2) Para cada $g \in G$, la función N_g en G dada por:

$$N_g(x) = N(gxg^{-1}), \quad \forall x \in G$$

es una pseudonorma en G.

(3) La suma de dos pseudonormas en G es una pseudonorma en G.

(4) Para cualquier función $f : G \to \mathbb{R}$ acotada, la función $N_f : G \to \mathbb{R}$ dada por:

$$N_f(x) = \sup_{y \in G} |f(y \cdot x) - f(y)|, \quad \forall x \in G$$

es una pseudonorma en G.

Demostración:
De *(1)*: Sea $r \geqslant 0$. Veamos que $r \cdot N$ es una pseudonorma en G. En efecto:

(a) Si $x \in G$ entonces $N(x) \geqslant 0$ luego $r \cdot N(x) = rN(x) \geqslant 0$.

(b) Se tiene que $N(e_G) = 0$, con lo cual $r \cdot N(e_G) = 0$.

(c) Si $x, y \in G$, entonces:

$$\begin{aligned} r \cdot N(x \cdot y^{-1}) &\leqslant r \cdot (N(x) + N(y)) \\ &= r \cdot N(x) + r \cdot N(y) \end{aligned}$$

Por los tres incisos anteriores se sigue que $r \cdot N$ es una pseudonorma en G.

De *(2)*: Sea $g \in G$. Veamos que N_g es pseudonorma en G. En efecto:

(a) Si $x \in G$, entonces $N_g(x) = N(gxg^{-1}) \geqslant 0$.

(b) Se tiene que $N_g(e_G) = N(ge_Gg^{-1}) = N(gg^{-1}) = N(e_G) = 0$.

(c) Si $x, y \in G$, entonces:

$$\begin{aligned} N_g(x \cdot y^{-1}) &= N(gxy^{-1}g^{-1}) \\ &= N(gxg^{-1} \cdot gy^{-1}g^{-1}) \\ &= N\left(gxg^{-1} \cdot \left(gyg^{-1}\right)^{-1}\right) \\ &\leqslant N(gxg^{-1}) + N(gyg^{-1}) \\ &= N_g(x) + N_g(y). \end{aligned}$$

Por los tres incisos anteriores se sigue que N_g es una pseudonorma en G.

De *(3)*: Sean N_1, N_2 pseudonormas en G. Veamos que $N_1 + N_2$ es pseudonorma en G. En efecto:

(a) Si $x \in G$, entonces $(N_1 + N_2)(x) = N_1(x) + N_2(x) \geqslant 0$.

(b) Se tiene que $(N_1 + N_2)(e_G) = N_1(e_G) + N_2(e_G) = 0$.

(c) Si $x, y \in G$, entonces:

$$\begin{aligned} (N_1 + N_2)(x \cdot y^{-1}) &= N_1\left(x \cdot y^{-1}\right) + N_2\left(x \cdot y^{-1}\right) \\ &\leqslant N_1(x) + N_1(y) + N_2(x) + N_2(y) \\ &= (N_1 + N_2)(x) + (N_1 + N_2)(y). \end{aligned}$$

Por los tres incisos anteriores se sigue que $N_1 + N_2$ es una pseudonorma en G.

De *(4)*: Sea $f : G \to \mathbb{R}$ una función acotada. Veamos que N_f es pseudonorma. En efecto:

(a) Sea $x \in G$, entonces:

$$\begin{aligned} N_f(x) &= \sup_{y \in G} |f(y \cdot x) - f(y)| \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

(b) Sea $e_G \in G$ la identidad del grupo. Entonces:

$$\begin{aligned} N_f(e_G) &= \sup_{y \in G} |f(y \cdot e_G) - f(y)| \\ &= \sup_{y \in G} |f(y) - f(y)| \\ &= 0. \end{aligned}$$

(c) Sean $x_1, x_2 \in G$, entonces:

$$\begin{aligned}
N_f(x_1 \cdot x_2^{-1}) &= \sup_{y \in G} \left| f(yx_1x_2^{-1}) - f(y) \right| \\
&= \sup_{y \in G} \left| f(yx_1x_2^{-1}) - f(y) + f(x_1y) - f(x_1y) \right| \\
&= \sup_{y \in G} \left| [f(x_1y) - f(y)] + [f(yx_1x_2^{-1}) - f(x_1y)] \right| \\
&\leqslant \sup_{y \in G} |f(x_1y) - f(y)| + \sup_{y \in G} \left| f(yx_1x_2^{-1}) - f(x_1y) \right| \\
&\leqslant \sup_{y \in G} |f(x_1y) - f(y)| + \sup_{z \in G} \left| f(zx_2^{-1}) - f(z) \right| \\
&= N(x_1) + N(x_2^{-1}).
\end{aligned}$$

Por los tres incisos anteriores se sigue que N_f es una pseudonorma en G. ■

Trabajando con grupos topológicos, uno está interesado en las pseudonormas continuas. Debido a que todo grupo topológico es un espacio homogéneo, se verifica la siguiente proposición. Antes, una observación sobre la notación.

Observación 1.68 (**Notación Aditiva de Traslaciones de Subconjuntos de** $\mathbb{R}$)
Si $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces, se denota por $A + x$ a la traslación de A por x, esto es:

$$A + x = \left\{ a + x \middle| a \in A \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Proposición 1.69
Sea G un grupo topológico y N una pseudonorma. Entonces N es continua si y solo si es continua en la identidad del grupo.

Demostración:
Se probará la doble implicación:

$\Rightarrow$): Supongamos que N es continua, en particular es continua en $e_G \in G$ la identidad del grupo.

$\Leftarrow$): Supongamos que N es continua en la identidad del grupo e_G. Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto y $x \in G$ tal que $N(x) \in U$. Debemos probar que existe $V \subseteq G$ abierto tal que:

$$N(x) \in N[V] \subseteq U.$$

Como $U - N(x)$ es un abierto que contiene a la identidad del grupo $\mathbb{R}$ (visto como grupo aditivo) por el Teorema (1.23) inciso *(1)*, pues U es abierto, entonces $U - N(x) \in \mathring{\mathcal{N}}(0)$. Al ser N continua en e_G, existe un abierto $V_1 \in \mathring{\mathcal{N}}(e_G)$ tal que:

$$0 \in N[V_1] \subseteq U - N(x),$$

luego:

$$N(x) \in N[V_1] + N(x) \subseteq U, \tag{1.5}$$

donde:

$$N[V_1] + N(x) = \left\{ N(v) + N(x) \middle| v \in V_1 \right\}.$$

Por la Observación (1.66) se tiene la siguiente contención:

$$N[V_1x] = \left\{N(v\cdot x)\middle| v\in V_1\right\} \subseteq \left\{N(v)+N(x)\middle| v\in V_1\right\} = N[V_1]+N(x).$$

De (1.5) se sigue que:

$$N(x)\in N[V]\subseteq U,$$

donde $V = V_1x$ es abierto que contiene a x, el cual lo es nuevamente por el teorema antes mencionado inciso *(1)*.

Por tanto, N es continua en G. ■

Teorema 1.70
Sean G un grupo topológico, $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión decreciente de vecindades abiertas simétricas de e_G tales que:

$$U_{n+1}^2\subseteq U_n, \quad \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Entonces, existe una pseudonorma continua N en G tal que:

$$\left\{x\in G\middle| N(x)<\frac{1}{2^n}\right\}\subseteq U_n\subseteq\left\{x\in G\middle| N(x)\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\right\}, \tag{1.6}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$.

Demostración:
Para la prueba, construiremos inductivamente una sucesión de vecindades abiertas simétricas de e_G, luego, construiremos una función continua a partir de estas vecindades con la que se definirá la pseudonorma continua deseada en G que satisfaga (1.6).

- Sea $U(1) = U_0$ vecindad abierta simétrica de e_G.

  Supongamos que para algún $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ se han definido vecindades abiertas simétricas de e_G, $U(m/2^n)$, donde $m = 1,2,\ldots,2^n$. Definimos recursivamente:

  $$U(1/2^{n+1}) = U_{n+1} \quad \text{y} \quad U((2m+1)/2^{n+1}) = U(m/2^n)\cdot U_{n+1}, \tag{1.7}$$

  para todo $m = 1,2,\ldots,2^n-1$. Adicionalmente, hacemos:

  $$U(m/2^n) = G, \quad \forall m>2^n.$$

  Aplicando inducción tenemos construida, para cada $r=\frac{m}{2^n}$, con $m\in\mathbb{N}$ y $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, una vecindad abierta de e_G, a saber, $U(r)$.

- Afirmamos que:

  $$U(m/2^n)\cdot U(1/2^n)\subseteq U((m+1)/2^n),$$

  para todo $m,n\in\mathbb{N}$. En efecto, sean $m,n\in\mathbb{N}$, veamos que:

  $$U(m/2^n)\cdot U(1/2^n) = U(m/2^n)\cdot U_n.$$

  Se tienen dos casos:

- Si $m = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned} U(m/2^n) \cdot U(1/2^n) &= U(k/2^{n-1}) \cdot U_n \\ &= \begin{cases} U((2k+1)/2^n) & \text{si} \quad k \leqslant 2^{n-1} - 1 \\ G \cdot U_n & \text{si} \quad k > 2^{n-1} - 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} U((2k+1)/2^n) & \text{si} \quad k \leqslant 2^{n-1} - 1 \\ G & \text{si} \quad k > 2^{n-1} - 1 \end{cases} \\ &= U((m+1)/2), \end{aligned}$$

pues, en el segundo caso al tenerse que $k > 2^{n-1} - 1$ entonces, $2k > 2^n - 2$ por lo que $m + 1 \geqslant 2^n$, así que $\frac{m+1}{2^n} \geqslant 1$, luego $U((m+1)/2^n) = G$.

- Si $m = 2k - 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces:

$$U(m/2^n) \cdot U(1/2^n) = U((2k-1)/2^n) \cdot U_n,$$

ahora, si $k = 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} U(m/2^n) \cdot U(1/2^n) &= U(1/2^n) \cdot U_n \\ &= U_n \cdot U_n \\ &= U_n^2 \\ &\subseteq U_{n-1} \\ &= U(1/2^{n-1}) \\ &= U(2/2^n) \\ &= U((1+1)/2^n) \\ &= U((m+1)/2^n). \end{aligned}$$

Si $k > 1$, podemos escribir $m = 2l + 1$, con lo cual:

$$\begin{aligned} U(m/2^n) \cdot U(1/2^n) &= U((2l+1)/2^n) \cdot U_n \\ &= U(l/2^{n-1}) \cdot U_n \cdot U_n \\ &\subseteq U(l/2^{n-1}) \cdot U_{n-1} \\ &= U(l/2^{n-1}) \cdot U(1/2^{n-1}) \\ &\subseteq U((l+1)/2^{n-1}) \\ &= U((m+1)/2^n). \end{aligned}$$

De los dos incisos anteriores se sigue que:

$$U(m/2^n) \cdot U(1/2^n) \subseteq U((m+1)/2^n), \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \tag{1.8}$$

en particular:

$$U(m/2^n) \subseteq U((m+1)/2^n), \quad \forall n, m \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

- Definimos una función $f : G \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \text{ínf} \left\{ r > 0 \middle| x \in U(r) \text{ y } r \text{ es racional 2-ádico} \right\}, \quad \forall x \in G.$$

Se tiene que f está bien definida, pues $x \in U(2) = G$, para todo $x \in G$, y es tal que $f \geqslant 0$. Como $U(2) = G$, entonces el valor de f está acotado por 2. Así que:

$$|f(x)| \leqslant 2, \quad \forall x \in G.$$

Esta función cumple lo siguiente:

(1) $f(e_G) = 0$.

(2) Si r, s son racionales 2-ádicos tales que $0 < r \leqslant s$, entonces $U(r) \subseteq U(s)$. En particular, si $x \in G$ es tal que $f(x) < s$, entonces $x \in U(s)$.

En efecto, la parte *(1)* se cumple de forma inmediata, pues $U(r)$ es vecindad de e_G, para todo r racional 2-ádico. Para *(2)*, si r y s son racionales 2-ádicos con $0 < r \leqslant s$, digamos:

$$r = \frac{p}{2^{n_r}} \leqslant \frac{q}{2^{n_s}} = s,$$

Tenemos dos casos: si alguno de ellos es mayor que 1, el resultado se tiene de forma inmediata. Supongamos pues que $0 < r \leqslant s \leqslant 1$, entonces:

$$\begin{aligned} r \leqslant s &\iff \frac{p}{2^{n_r}} \leqslant \frac{q}{2^{n_2}} \\ &\iff \frac{2^{n_s}p}{2^n} \leqslant \frac{2^{n_r}q}{2^n}, \qquad \text{siendo } n = n_r + n_s. \\ &\iff 2^{n_s}p \leqslant 2^{n_r}q \end{aligned}$$

si se tiene la igualdad, entonces es inmediato que se tiene la contención. Si son desiguales, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$2^{n_s}p + k = 2^{n_r}q,$$

por (1.9) aplicada k-veces (dado que $n \geqslant 1$), tenemos que:

$$U(r) = U\left(\frac{2^{n_s}p}{2^n}\right) \subseteq U\left(\frac{2^{n_s}p+1}{2^n}\right) \subseteq \cdots \subseteq U\left(\frac{2^{n_s}p+k}{2^n}\right) = U\left(\frac{2^{n_r}q}{2^n}\right) = U(s),$$

con lo cual $U(r) \subseteq U(s)$. Si ahora $x \in G$ es tal que $f(x) < s$, se tiene que:

$$\text{ínf}\left\{ r > 0 \middle| x \in U(r) \text{ y } r \text{ es racional 2-ádico} \right\} < s.$$

En particular, existe $r > 0$ racional 2-ádico tal que $0 < r < s$ y para el cual $x \in U(r)$. Por lo probado anteriormente se sigue que $x \in U(s)$.

Finalmente, por el inciso *(4)* de la Proposición (1.67) podemos definir una pseudonorma en G dada por:

$$N(x) = \sup_{y \in G} |f(y \cdot x) - f(y)|.$$

- Afirmamos que N satisface (1.6). En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$ y $x \in G$ tal que $N(x) < \frac{1}{2^n}$. Veamos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= |f(x)| \\ &= |f(e_G \cdot x) - f(e_G)| \\ &\leqslant N(x) \\ &< \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

luego, por el inciso *(2)* se sigue que $x \in U(\frac{1}{2^n}) = U_n$, y la igualdad es por (1.7). Por tanto:

$$\left\{ x \in G \middle| N(x) < \frac{1}{2^n} \right\} \subseteq U_n. \tag{1.10}$$

Ahora, sea $x \in U_n = U(1/2^n)$ con $n \in \mathbb{N}$ y tomemos $y \in G$ arbitrario. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{k-1}{2^n} \leqslant f(y) < \frac{k}{2^n}.$$

Se sigue del inciso *(2)* que $y \in U(\frac{k}{2^n})$. Por ende:

$$y \cdot x \in U(k/2^n) \cdot U(1/2^n).$$

También:

$$y \cdot x^{-1} \in U(k/2^n) \cdot U_n^{-1} = U(k/2^n) \cdot U_n = U(k/2^n) \cdot U(1/2^n),$$

pues $U_n = U_n^{-1}$. De (1.8) sucede que:

$$y \cdot x \in U((k+1)/2^n) \quad \text{y} \quad y \cdot x^{-1} \in U((k+1)/2^n),$$

así que:

$$f(y \cdot x) \leqslant \frac{k+1}{2^n} \quad \text{y} \quad f(y \cdot x^{-1}) \leqslant \frac{k+1}{2^n}.$$

Con lo cual se tienen las desigualdades:

$$\begin{cases} f(y \cdot x) - f(y) \leqslant \dfrac{k+1}{2^n} - \dfrac{k-1}{2^n} = \dfrac{2}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}} \\ f\left(y \cdot x^{-1}\right) - f(y) \leqslant \dfrac{k+1}{2^n} - \dfrac{k-1}{2^n} = \dfrac{2}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}} \end{cases}$$

Como la segunda desigualdad es válida para todo $y \in G$, en particular lo es para $y \cdot x$ (tomando $y \in G$ arbitrario), con lo que tenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{cases} f(y \cdot x) - f(y) \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}} \\ f\left(y\right) - f(y \cdot x) \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}} \end{cases}$$

Se sigue entonces que:

$$|f(y \cdot x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \forall y \in G.$$

Por ende $N(x) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. Se tiene así la contención:

$$U_n \subseteq \left\{ x \in G \middle| N(x) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \right\}. \tag{1.11}$$

De (1.10) y (1.11) se sigue que se cumple (1.6).

- Veamos ahora que N es una pseudonorma continua en G. Por la Proposición (1.69) basta probar que es continua en e_G. Sea $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$\frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

  Se tiene que para todo $x \in U_{n+1}$ que $N(x) \leqslant \frac{1}{2^n}$, por lo cual:

  $$|N(x) - N(e_G)| = |N(x)| = N(x) \leqslant \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

  Por tanto, N es continua en e_G.

■

Con esto ya tenemos las herramientas necesarias para probar el teorema clásico de metrizabilidad de grupos topológicos.

Teorema 1.71 (**Teorema de Birkhoff-Kakutani**)
Todo grupo topológico T_0 es metrizable si y solo si posee una base local numerable en la identidad.

Demostración:
Sea G un grupo topológico T_0.

$\Rightarrow$): Supongamos que G es metrizable, entonces posee una base local numerable en todo punto del grupo, en particular en la identidad.

$\Leftarrow$): Supongamos que G posee una base local numerable en la identidad e_G, digamos:

$$\mathcal{U} = \left\{ U_i \subseteq G \middle| i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Por el Lema (1.22) existe una vecindad abierta simétrica V_0 de e_G tal que $V_0 \subseteq U_0$. Supongamos construidas vecindades $V_0, \ldots, V_n$ de e_G tales que:

$$V_{i+1}^2 \subseteq V_i \cap U_i, \quad \forall i \in [\![0, n]\!].$$

Nuevamente, por el Lema (1.22) para la vecindad $V_n \cap U_n$ existe una vecindad abierta simétrica V_{n+1} de e_G tal que:

$$V_{n+1}^2 \subseteq V_n \cap U_n.$$

Aplicando inducción tenemos construida la familia $\mathcal{V} = \left\{ V_i \in \mathring{\mathcal{N}}^*(e_G) \middle| i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$ de vecindades abiertas simétricas de e_G tales que:

$$V_{i+1}^2 \subseteq V_i \cap U_i, \quad \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{V}$ es una base local de e_G. Esto se tiene, pues para todo $i \in \mathbb{N}$:

$$V_i \subseteq V_i^2 \subseteq U_i \cap V_i \subseteq U_i,$$

siendo $\mathcal{U}$ una base local de e_G, se sigue que $\mathcal{V}$ también lo es. Además, por construcción se tiene que $\mathcal{V}$ es una sucesión decreciente de vecindades abiertas simétricas de e_G para las cuales:

$$V_{i+1}^2 \subseteq V_i \cap U_i, \quad \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

luego, por el Teorema (1.70) se tiene que existe una pseudonorma continua N en G tal que:

$$\left\{x \in G \middle| N(x) < \frac{1}{2^i}\right\} \subseteq V_i \subseteq \left\{x \in G \middle| N(x) \leqslant \frac{1}{2^{i-1}}\right\}, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

Definimos:

$$d(x,y) = N(x \cdot y^{-1}), \quad \forall x, y \in G.$$

Afirmamos que d es una métrica en G que genera su topología.

(1) Sean $x, y \in G$, entonces $d(x,y) = N(x \cdot y^{-1}) \geqslant 0$, pues N es una función no negativa.

(2) Sean $x, y \in G$, veamos que:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= N(x \cdot y^{-1}) \\ &= N((x \cdot y^{-1})^{-1}) \\ &= N(y \cdot x^{-1}) \\ &= d(y,x), \end{aligned}$$

por la Observación (1.66).

(3) Ya se tiene que $d(x,x) = 0$ para todo $x \in G$, pues al ser N pseudonorma se tiene que $d(x,x) = N(x \cdot x^{-1}) = N(e_G) = 0$. Sean ahora $x, y \in G$ tales que $d(x,y) = 0$, esto es que:

$$N(x \cdot y^{-1}) = 0,$$

entonces, por (1.12):

$$x \cdot y^{-1} \in V_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Dado que G es un grupo topológico T_0, se sigue del Corolario (1.33) que:

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} V_i = \{e_G\},$$

así que, $x \cdot y^{-1} = e_G$, se sigue que $x = y$.

(4) Sean $x, y, z \in G$, entonces:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= N(x \cdot y^{-1}) \\ &= N(x \cdot e_G \cdot y^{-1}) \\ &= N(x \cdot (z^{-1} \cdot z) \cdot y^{-1}) \\ &= N((x \cdot z^{-1}) \cdot (z \cdot y^{-1})) \\ &\leqslant N(x \cdot z^{-1}) + N(z \cdot y^{-1}) \\ &= d(x,z) + d(z,y), \end{aligned}$$

nuevamente, por la Observación (1.66).

Por los cuatro incisos anteriores se sigue que d es una métrica sobre G, la cual es continua, ya que es composición de funciones continuas.

Veamos que genera la topología de G. Sea U un abierto no vacío en G y tomemos $x \in G$. Se tiene que el conjunto Ux^{-1} es una vecindad abierta de e_G, por ser $\mathcal{V}$ base local de e_G existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$V_{i_0} \subseteq Ux^{-1} \Rightarrow V_{i_0}x \subseteq U.$$

Afirmamos que:

$$B_d\left(x, \frac{1}{2^{i_0}}\right) = \left\{z \in G \middle| d(x,z) < \frac{1}{2^{i_0}}\right\} \subseteq U.$$

En efecto, si $y \in G$ es tal que $d(x,y) < \frac{1}{2^{i_0}}$, se tiene que:

$$N(x \cdot y^{-1}) < \frac{1}{2^{i_0}},$$

por (1.12) y, como $d(x,y) = d(y,x)$, se tiene que $y \cdot x^{-1} \in V_{i_0}$, esto es que $y \in V_{i_0}x \subseteq U$. Con lo que se tiene la contención deseada.

Por lo tanto, d es una métrica que genera la topología de G. Se sigue así que G es metrizable.

■

Como corolario tenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.72

Todo grupo topológico T_0 es metrizable si y solo si es primero numerable.

Demostración:

Es inmediata del teorema anterior y del hecho que todo grupo topológico es un espacio homogéneo.

■

Capítulo 2

Espacios Topológicos

Todos los espacios topológicos a considerar en este capítulo serán T_1. Primero se hablará de funciones cardinales sobre espacios topológicos, ya que una función cardinal será usada frecuentemente en el resto del capítulo y algunos de los que siguen.

Después de ello, se procederá a hablar sobre filtros e ideales en el contexto de conjuntos para después aterrizar las ideas desarrolladas a espacios topológicos. Una vez hecho eso se pasará a hablar de ultrafiltros, existencia y algunas caracterizaciones.

Luego, se hablará de cofinalidad, un cardinal asociado a un ideal, junto con algunas propiedades del mismo y su relación con espacios topológicos. Para terminar se hablará de ortogonalidad y espacios de Fréchet, obteniendo al final una relación entre ambos.

§2.1 Funciones Cardinales

El objetivo de las funciones cardinales es aquel de extender conceptos conocidos en topología general, como la propiedad de ser primero o segundo numerable. Estas funciones permiten realizar comparaciones cuantitativas entre algunas propiedades topológicas.

Definición 2.1 (Función Cardinal)
Una **función cardinal** es una *función* tal que a cada espacio topológico (X, τ) le asigna un número cardinal $f(X, \tau)$. Esta asignación cumple lo siguiente:

- Si (X, τ) es homeomorfo a (Y, σ) entonces $f(X, \tau) = f(Y, \sigma)$.

Para simplificar notación, en la definición anterior se escribirá $f(X)$ en vez de $f(X, \tau)$.

Ejemplo 2.1 (Cardinalidad es Función Cardinal)
Sea (X, τ) un espacio topológico. La *función* que a este espacio le asigna su cardinalidad $|X|$ es una función cardinal, ya que siempre que dos espacios sean homeomorfos estos tendrán la misma cardinalidad.

A continuación, se presentan algunas funciones cardinales que traducen propiedades topológicas del espacio en términos de cardinales.

Definición 2.2 (**Peso**)
Sea (X, τ) un espacio topológico. El **peso de** (X, τ) se define como:

$$w(X) = \text{mín}\left\{|\mathcal{B}| \,\middle|\, \mathcal{B} \text{ es una base de la topología de } X\right\}.$$

Observación 2.2
Como todo conjunto de ordinales es bien ordenado se sigue que siempre que tomemos el mínimo de una familia, el mínimo debe estar dentro de la familia. En particular, esto es válido para cardinales, ya que son ordinales. Esto se estudia más a fondo en el Capítulo 3. Con lo cual, de la definición anterior, si (X, τ) es espacio topológico entonces existe al menos una base $\mathcal{B}$ de la topología de X tal que $w(X) = |\mathcal{B}|$.

Frecuentemente usaremos en los ejemplos que siguen de esta sección este procedimiento sin mencionarlo explícitamente.

Ejemplo 2.3 (**Peso y Segundo Numerabilidad**)
Sea (X, τ) un espacio topológico. Si el espacio es segundo numerable, entonces posee una base $\mathcal{B}$ para la topología τ a lo sumo numerable, es decir:

$$w(X) \leqslant |\mathcal{B}| \leqslant \aleph_0.$$

Recíprocamente, si $w(X) \leqslant \aleph_0$, entonces existe una base $\mathcal{B}$ para la topología τ tal que:

$$|\mathcal{B}| = w(X) \leqslant \aleph_0,$$

en particular, $\mathcal{B}$ es a lo sumo numerable, es decir que (X, τ) es segundo numerable.

El ejemplo anterior nos dice por qué las funciones cardinales resultan tan importantes y es que ellas nos ayudan a caracterizar propiedades del espacio en términos de cardinales. El ejemplo anterior nos dice que el espacio X es segundo numerable si y solo si $w(X) \leqslant \aleph_0$.

Definición 2.3 (**Densidad**)
Sea (X, τ) espacio topológico. La **densidad de** (X, τ) se define como:

$$d(X) = \text{mín}\left\{|D| \,\middle|\, D \text{ es un subconjunto denso en } X\right\}.$$

Ejemplo 2.4 (**Densidad y Separabilidad**)
Sea (X, τ) espacio topológico. Si el espacio es separable entonces posee un subconjunto denso $D \subseteq X$ a lo sumo numerable, por tanto:

$$d(X) \leqslant |D| \leqslant \aleph_0.$$

Recíprocamente, si $d(X) \leqslant \aleph_0$, entonces existe $D \subseteq X$ denso tal que:

$$|D| = d(X) \leqslant \aleph_0,$$

es decir que D es un subconjunto denso en X a lo sumo numerable, luego X es separable.

Así que X es separable si y solo si $d(X) \leqslant \aleph_0$.

Hasta ahora se ha definido funciones cardinales globales, es decir, que nos dan información de todo el espacio. A continuación definiremos funciones cardinales que nos dan información de propiedades locales de un espacio.

Definición 2.4 (Carácter)
Sean (X, τ) espacio topológico y $p \in X$. Se define el **carácter de** (X, τ) **en** p como:

$$\chi(X, p) = \text{mín}\left\{ |\mathcal{V}| \,\middle|\, \mathcal{V} \text{ es una base local para } p \text{ en } X \right\},$$

y se define el **carácter de** (X, τ) como:

$$\chi(X) = \sup\left\{ \chi(p, X) \,\middle|\, p \in X \right\}.$$

Observación 2.5 (Carácter y Sistema Fundamental de Vecindades)
Sea (X, τ) espacio topológico y $p \in X$. Afirmamos que:

$$\chi(X, p) = \text{mín}\left\{ |\mathcal{V}| \,\middle|\, \mathcal{V} \text{ es un sistema fundamental de vecindades para } p \text{ en } X \right\}. \tag{2.1}$$

En efecto, toda base local es un sistema fundamental de vecindades, por lo que:

$$\text{mín}\left\{ |\mathcal{V}| \,\middle|\, \mathcal{V} \text{ es un sistema fundamental de vecindades para } p \text{ en } X \right\} \leqslant \chi(X, p). \tag{2.2}$$

Si $\mathcal{V}$ es un sistema fundamental de vecindades, entonces tomando los interiores de los elementos de la familia $\mathcal{V}$ obtenemos una base local $\mathcal{B}$ para p, por lo cual:

$$\chi(X, p) \leqslant |\mathcal{B}| \leqslant |\mathcal{V}|,$$

es decir que:

$$\chi(X, p) \leqslant \text{mín}\left\{ |\mathcal{V}| \,\middle|\, \mathcal{V} \text{ es un sistema fundamental de vecindades para } p \text{ en } X \right\}. \tag{2.3}$$

Por (2.2) y (2.3) obtenemos la igualdad (2.1).

Observación 2.6
Sean (X, τ) espacio topológico y $p \in X$. Formalmente, el carácter de X en p no es una función cardinal, ya que estamos tomando como entrada un espacio topológico y un punto del espacio. Sin embargo, nosotros podemos hacer la misma definición en un **espacio topológico puntuado**, es decir una terna (X, τ, p) donde (X, τ) es espacio topológico y $p \in X$ es un punto del espacio.

Ejemplo 2.7 (Carácter y Primero Numerabilidad)
Sea (X, τ) un espacio topológico. Si (X, τ) es primero numerable, entonces, para todo $x \in X$ existe

una base local $\mathcal{V}_x$ para x en X que es a lo sumo numerable. Por tanto:

$$\chi(X,x) \leqslant |\mathcal{V}_x| \leqslant \aleph_0, \quad \forall x \in X,$$

por lo cual, al tomar supremo respecto a x se sigue que:

$$\chi(X) \leqslant \aleph_0.$$

Recíprocamente, si $\chi(X) \leqslant \aleph_0$, entonces:

$$\chi(X,x) \leqslant \aleph_0, \quad \forall x \in X,$$

luego, para cada $x \in X$ existe $\mathcal{V}_x$ base local para x en X tal que:

$$|\mathcal{V}_x| = \chi(X,x) \leqslant \aleph_0, \quad \forall x \in X,$$

así que (X,τ) es primero numerable.

Se sigue por lo anterior que un espacio topológico (X,τ) es primero numerable si y solo si $\chi(X) \leqslant \aleph_0$.

Lema 2.8
Sea G grupo topológico. Entonces:

$$\chi(G, e_G) = \chi(G, g)$$

para todo $g \in G$, siendo e_G la identidad de G. En particular, G es primero numerable si y solo si $\chi(G, e_G) \leqslant \aleph_0$.

Demostración:
Sean $x, y \in G$. Tomemos $\mathcal{V}$ base local para x en G. Afirmamos que la familia:

$$\mathcal{V}x^{-1}y = \left\{ Vx^{-1}y \middle| V \in \mathcal{V} \right\},$$

es base local para y en G. En efecto, sea $U \subseteq G$ abierto tal que $y \in U$, entonces:

$$x \in Uy^{-1}x,$$

siendo $Uy^{-1}x \subseteq G$ abierto por el Teorema (1.23) inciso *(1)*, así que al ser $\mathcal{V}$ base local para x en G se tiene que existe $V \in \mathcal{V}$ tal que:

$$x \in V \subseteq Uy^{-1}x,$$

luego,

$$y = xx^{-1}y \in Vx^{-1}y \subseteq U,$$

con $Vx^{-1}y \in \mathcal{V}x^{-1}y$, siendo este nuevamente abierto por el teorema mencionado anteriormente. Así que $\mathcal{V}x^{-1}y$ es base local para y en G. Además, se cumple que:

$$|\mathcal{V}| = \left|\mathcal{V}x^{-1}y\right|.$$

Sea ahora $g \in G$. Tomando $x = e_G$ y $y = g$ en lo hecho anteriormente se tiene que si $\mathcal{V}$ es base local para e_G en G tal que:

$$\chi(G, e_G) = |\mathcal{V}|,$$

entonces, la familia $\mathcal{V}g$ es base local para g en G, luego:

$$\chi(G, g) \leqslant |\mathcal{V}g| = |\mathcal{V}| = \chi(G, e_G). \tag{2.4}$$

De forma análoga tomando $x = g$ y $y = e_G$ obtenemos que:

$$\chi(G, e_G) \leqslant \chi(G, g), \tag{2.5}$$

por (2.4) y (2.5) se sigue que $\chi(G, e_G) = \chi(G, g)$.

La última parte se sigue del Ejemplo (2.7) y de la siguiente igualdad:

$$\chi(G) = \sup \left\{ \chi(G, x) \middle| x \in G \right\} = \chi(G, e_G).$$

■

Usando el carácter se verifica rápidamente el siguiente resultado:

Teorema 2.9 (**Caracterización de Metrizabilidad en Grupos Topológicos**)
Sea G un grupo topológico T_0. Entonces, G es metrizable si y solo si $\chi(G, e_G) \leqslant \aleph_0$.

Demostración:

Por el Teorema de Birkhoff-Kakutani, G es metrizable si y solo si pose una base local numerable en la identidad, es decir que:

$$\chi(G, e_G) \leqslant \aleph_0.$$

■

§2.2 Filtros e Ideales

En esta sección se introducen las ideas de filtros e ideales sobre un conjunto, así como conceptos adicionales asociados y algunos ejemplos particulares. Gran parte de los resultados en esta sección y algunas de las siguientes fueron extraídos de [Sch11]

Definición 2.5 (**Filtro**)
Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{F}$ es un **filtro sobre** X, si:

(1) Para todo $A, B \subseteq X$, si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(2) Para todo $A, B \subseteq X$, $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$ implica que $B \in \mathcal{F}$.

Y decimos que es **propio** si:

(3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

La propiedad *(2)* usualmente es denominada **propiedad de absorción**.

En particular, la condición *(1)* de la definición anterior se puede generalizar (usando inducción) a intersecciones finitas.

Observación 2.10
Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X en particular es no vacío, luego existe $F \subseteq X$ tal que $F \in \mathcal{F}$. De *(2)* se sigue que $X \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 2.11 (**Filtro que no es Propio**)
Sea X un conjunto no vacío. Entonces la familia $\mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X es un filtro sobre X que no es propio. En efecto, de la definición es inmediato que cumple *(1)* y *(2)*, pero no cumple *(3)*, ya que $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$.

El ejemplo anterior nos dice que hay una diferencia fundamental entre los filtros y filtros propios, por lo cual es necesario hacer su distinción de antemano. Más adelante se verán más ejemplos de filtros sobre conjuntos.

Definición 2.6 (**Ideal**)
Sea X un conjunto no vacío e $\mathcal{I}$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{I}$ es un **ideal sobre** X, si:

(1) Para todo $A, B \subseteq X$, si $A, B \in \mathcal{I}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.

(2) Para todo $A, B \subseteq X$, $B \in \mathcal{I}$ y $A \subseteq B$ implica que $A \in \mathcal{I}$.

Y decimos que es **propio**, si:

(3) $X \notin \mathcal{I}$.

Al igual que con filtros, la condición *(1)* de la definición anterior se puede generalizar a uniones finitas.

Observación 2.12
Si $\mathcal{I}$ es un ideal propio sobre X en particular es no vacío, luego existe $I \subseteq X$ tal que $I \in \mathcal{I}$. De *(2)* se sigue que $\emptyset \in \mathcal{I}$.

El siguiente lema nos da una relación entre filtros e ideales, siendo ambos objetos duales uno del otro.

Lema 2.13 (**Filtros e Ideales son Objetos Duales**)
Sea X un conjunto no vacío. Si $\mathcal{F}$ es un filtro (respectivamente, propio) sobre X, entonces:

$$\mathcal{F}^* = \left\{ X \setminus A \middle| A \in \mathcal{F} \right\},$$

es un ideal (respectivamente, propio) sobre X llamado **ideal dual de** $\mathcal{F}$. Similarmente, si $\mathcal{I}$ es un ideal (respectivamente, propio) sobre X, entonces:

$$\mathcal{I}^* = \left\{ X \setminus A \middle| A \in \mathcal{I} \right\},$$

es un filtro (respectivamente, propio) sobre X llamado **filtro dual de** $\mathcal{I}$.

Demostración:
Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Veamos que:

$$\mathcal{F}^* = \left\{ X \setminus F \middle| A \in \mathcal{F} \right\},$$

es un ideal sobre X. En efecto al ser $\mathcal{F}$ filtro se sigue que $\mathcal{F}^*$ es una familia no vacía. Se deben verificar dos condiciones:

(1) Si $I_1, I_2 \subseteq X$ son elementos de $\mathcal{F}^*$, entonces existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que:

$$I_1 = X \setminus F_1 \quad \text{y} \quad I_2 = X \setminus F_2,$$

por tanto,

$$\begin{aligned} I_1 \cup I_2 &= (X \setminus F_1) \cup (X \setminus F_2) \\ &= X \setminus (F_1 \cap F_2), \end{aligned}$$

donde $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, por ser $\mathcal{F}$ filtro. Así que $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{F}^*$.

(2) Si $I_1, I_2 \subseteq X$ son tales que $I_1 \subseteq I_2$ e $I_2 \in \mathcal{F}^*$, entonces existe $F_2 \in \mathcal{F}$ tal que:

$$I_2 = X \setminus F_2,$$

por ende:

$$I_1 \subseteq X \setminus F_2 \Rightarrow F_2 \subseteq X \setminus I_1.$$

Al ser $\mathcal{F}$ filtro se sigue que $X \setminus I_1 \in \mathcal{F}$, luego $I_1 = X \setminus (X \setminus I_1) \in \mathcal{F}^*$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que $\mathcal{F}^*$ es un ideal sobre X. Si $\mathcal{F}$ es propio, entonces $\emptyset \notin \mathcal{F}$, luego no puede suceder que $X \in \mathcal{F}^*$, esto es que $\mathcal{F}^*$ es un ideal propio.

El inciso *(2)* es análogo a lo hecho en el inciso anterior usando ideales. ■

En particular, un filtro es propio si y solo si su ideal dual es propio, lo mismo con ideales. Como corolario a este lema tenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.14
Sean $\mathcal{F}$ e $\mathcal{I}$ un filtro e ideal sobre un conjunto X no vacío, respectivamente. Entonces, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{**}$ e $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{**}$.

Para continuar con las propiedades básicas de filtros e ideales, algunos resultados útiles que nos dicen como construir este tipo de familias en un conjunto son los siguientes:

Proposición 2.15
Sea $f : X \to Y$ una función biyectiva con X no vacío.

(a) Si $\mathcal{F}$ es un filtro (respectivamente, propio) sobre X, entonces la familia $f[\mathcal{F}]$ dada por:

$$f[\mathcal{F}] = \left\{ f[F] \middle| F \in \mathcal{F} \right\},$$

es un filtro (respectivamente, propio) sobre Y.

(b) Si $\mathcal{I}$ es un ideal (respectivamente, propio) sobre X, entonces la familia $f[\mathcal{I}]$ dada por:

$$f[\mathcal{I}] = \left\{ f[I] \middle| I \in \mathcal{I} \right\},$$

es un ideal (respectivamente, propio) sobre Y.

Demostración:
De *(a)*: Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Probaremos que la familia:

$$f[\mathcal{F}] = \left\{ f[F] \middle| F \in \mathcal{F} \right\},$$

es un filtro sobre Y. En efecto:

(1) Sean $A_1, A_2 \in f[\mathcal{F}]$, entonces existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que:

$$A_i = f[F_i], \quad i = 1, 2,$$

al ser f biyección se sigue que:

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= f[F_1] \cap f[F_2] \\ &= f[F_1 \cap F_2], \end{aligned}$$

donde $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, pues $\mathcal{F}$ es filtro. Se sigue así que $A_1 \cap A_2 \in f[\mathcal{F}]$.

(2) Sean $A \in f[\mathcal{F}]$ y $B \subseteq Y$ tal que $A \subseteq B$. Como $A \in f[\mathcal{F}]$, entonces existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $A = f[F]$, por lo cual:

$$f[F] \subseteq B,$$

lo cual implica que $F \subseteq f^{-1}[B]$. Dado que $\mathcal{F}$ es filtro, se tiene que $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$, así que $B = f\left[f^{-1}[B]\right] \in f[\mathcal{F}]$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que $f[\mathcal{F}]$ es filtro sobre Y.

Si $\mathcal{F}$ es propio, entonces no puede suceder que $f[\mathcal{F}]$ no sea propio, ya que en caso contrario se tendría que existiría $F \in \mathcal{F}$ tal que:

$$\emptyset = f[F].$$

Al ser f biyección y Y no vacío (por ser X no vacío) debe suceder que $F = \emptyset$, es decir que $\mathcal{F}$ no es propio, lo cual es una contradicción$\#_c$. Por tanto, $f[\mathcal{F}]$ es propio.

De *(b)*: Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre X, entonces $\mathcal{I}^*$ es un filtro sobre X por el Lema (2.13), luego, por el inciso anterior $f\left[\mathcal{I}^*\right]$ es un filtro sobre Y, con lo que $f[\mathcal{I}^*]^*$ es un ideal sobre Y. Afirmamos que:

$$f\left[\mathcal{I}\right] = f\left[\mathcal{I}^*\right]^*.$$

En efecto:

- Sea $A \in f[\mathcal{I}]$, entonces existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $A = f[I]$, luego $Y \setminus A = Y \setminus f[I] = f[X \setminus I]$ (por ser f biyectiva), con $X \setminus I \in \mathcal{I}^*$, así que:

  $$Y \setminus A \in f[\mathcal{I}^*],$$

  lo cual implica que:

  $$A \in f[\mathcal{I}^*]^*.$$

- Sea $B \in f[\mathcal{I}^*]^*$, entonces existe $F \in \mathcal{I}^*$ tal que:

  $$B = Y \setminus f[F] = f[X \setminus F],$$

  como $F \in \mathcal{I}^*$ entonces $X \setminus F \in \mathcal{I}$, por lo cual $B \in f[\mathcal{I}]$.

De los dos incisos anteriores se sigue la igualdad. Por tanto, $f[\mathcal{I}]$ es un ideal sobre Y, el cual además será propio si $\mathcal{I}$ es propio por el lema mencionado anteriormente. ■

Proposición 2.16
Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ filtros sobre un conjunto no vacío X. Entonces:

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \iff \mathcal{F}_1^* \subseteq \mathcal{F}_2^*$$

Demostración:
Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 &\iff F_1 \in \mathcal{F}_2, \quad \forall F_1 \in \mathcal{F}_1 \\
&\iff X \setminus F_1 \in \mathcal{F}_2^*, \quad \forall F_1 \in \mathcal{F}_1 \\
&\iff I_1 \in \mathcal{F}_2^*, \quad \forall I_1 \in \mathcal{F}_1^* \\
&\iff \mathcal{F}_1^* \subseteq \mathcal{F}_2^*.
\end{aligned}$$

■

Definición 2.7 (Familia de Subconjuntos Finitos)
Sea X un conjunto no vacío. Se denotará por $\mathsf{Fin}\,(X)$ a la familia de todos los subconjuntos finitos de X.

Proposición 2.17 (Ideal $\mathsf{Fin}\,(X)$)
Sea X un conjunto no vacío. Entonces, $\mathsf{Fin}\,(X)$ es un ideal sobre X el cual es propio si X es un conjunto infinito.

Demostración:
Veamos que $\mathsf{Fin}(X)$ es un ideal sobre X, para ello debemos verificar dos condiciones:

(1) Sean $A, B \in \mathsf{Fin}(X)$, entonces ambos conjuntos son finitos, luego $A \cup B$ es un conjunto finito, así que $A \cup B \in \mathsf{Fin}(X)$.

(2) Sean $A, B \subseteq X$ con $A \subseteq B$ tales que $B \in \mathsf{Fin}(X)$, entonces B es finito, luego, como A está contenido en B se tiene que A también es finito, es decir que $A \in \mathsf{Fin}(X)$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que $\mathsf{Fin}(X)$ es un ideal sobre X.

Si X es infinito, entonces $X \notin \mathsf{Fin}(X)$, por lo que $\mathsf{Fin}(X)$ es ideal propio. ■

El ideal de la proposición anterior nos ayudará más adelante para caracterizar los ideales de la siguiente definición.

OBSERVACIÓN 2.18
En ocasiones $\mathsf{Fin}(X)$ es llamado **ideal de Fréchet sobre** X.

DEFINICIÓN 2.8 (Filtros e Ideales Libres)
Sea X un conjunto no vacío. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre X es llamado **libre**, si

$$\bigcap \mathcal{F} = \emptyset.$$

Además, un ideal $\mathcal{I}$ sobre X es **libre** si:

$$\bigcup \mathcal{I} = X.$$

LEMA 2.19
Sea $f : X \to Y$ una biyección entre los conjuntos X y Y, con X no vacío. Si $\mathcal{I}$ es un ideal libre sobre X, entonces el ideal sobre Y:

$$f[\mathcal{I}] = \left\{ f[I] \middle| I \in \mathcal{I} \right\},$$

es libre.

Demostración:
Sea $\mathcal{I}$ un ideal libre sobre X. Por la Proposición (2.15) inciso *(2)* se tiene que la familia de subconjuntos de Y:

$$f[\mathcal{I}] = \left\{ f[I] \middle| I \in \mathcal{I} \right\},$$

es un ideal sobre Y. Se tiene que:

$$\bigcup f[\mathcal{I}] = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} f[I] = f\left[\bigcup_{I \in \mathcal{I}} I\right] = f\left[\bigcup \mathcal{I}\right] = f[X] = Y,$$

con lo que $f[\mathcal{I}]$ es ideal libre sobre Y. ■

Observación 2.20
De la definición anterior se tiene que un filtro $\mathcal{F}$ es libre si y solo si $\mathcal{F}^*$ es ideal libre.

Ejemplo 2.21 (**Filtro Dual de $\mathsf{Fin}(X)$**)
Sea X un conjunto no vacío. Consideremos la familia:

$$\begin{aligned}\mathsf{Fin}(X)^* &= \left\{X \setminus A \middle| A \in \mathsf{Fin}(X)\right\}\\ &= \left\{X \setminus A \middle| A \text{ es subconjunto finito de } X\right\}.\end{aligned}$$

Como $\mathsf{Fin}(X)$ es un ideal sobre X, entonces $\mathsf{Fin}(X)^*$ es un filtro sobre X por el Lema (2.13). Dado que $\mathsf{Fin}(X)$ libre, pues:

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup \mathsf{Fin}(X) \subseteq X,$$

se sigue de la observación anterior que $\mathsf{Fin}(X)^*$ debe ser un filtro libre.

Definición 2.9 (**Filtro de Fréchet**)
El filtro $\mathsf{Fin}(X)^*$ del ejemplo anterior se denota por $\mathsf{CoFin}(X)$ y es llamado **filtro de Fréchet sobre** X.

Proposición 2.22 (**Caracterización Filtros Libres**)
Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Las siguientes son equivalentes:

(1) $\mathcal{F}$ es un filtro libre.

(2) $\mathsf{CoFin}(X) \subseteq \mathcal{F}$.

Demostración:
(1) $\Rightarrow$ *(2)*: Supongamos que $\mathcal{F}$ es un filtro libre. Sea $x \in X$. Como:

$$\bigcap \mathcal{F} = \emptyset,$$

entonces existe $F_x \in \mathcal{F}$ tal que $x \notin F_x$, luego $F_x \subseteq X \setminus \{x\}$. Por ser $\mathcal{F}$ filtro se sigue que $X \setminus \{x\} \in \mathcal{F}$.

Sea ahora $X \setminus A \in \mathsf{CoFin}(X)$, es decir que $A \subseteq X$ es finito. Podemos escribir $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, con lo cual:

$$X \setminus A = (X \setminus \{x_1\}) \cap \cdots \cap (X \setminus \{x_n\}),$$

donde la intersección es finita y todos los elementos de la derecha están en $\mathcal{F}$ por lo probado al inicio, luego, $X \setminus A \in \mathcal{F}$ por ser $\mathcal{F}$ filtro. Se sigue así que $\mathsf{CoFin}(X) \subseteq \mathcal{F}$.

(2) $\Rightarrow$ *(1)*: Supongamos que $\mathsf{CoFin}(X) \subseteq \mathcal{F}$, entonces:

$$\bigcap \mathcal{F} \subseteq \bigcap \mathsf{CoFin}(X).$$

Afirmamos que $\bigcap \mathsf{CoFin}(X) = \emptyset$. En efecto, sea $x \in X$, entonces $X \setminus \{x\} \in \mathsf{CoFin}(X)$, luego $x \notin X \setminus \{x\}$, por lo cual:

$$x \notin \bigcap \mathsf{CoFin}(X),$$

al ser x arbitrario se sigue que $\bigcap \mathsf{CoFin}(X) = \emptyset$. Luego $\mathcal{F}$ es filtro libre. ■

En pocas palabras, la proposición anterior nos dice dos cosas; primero, que $\mathsf{CoFin}(X)$ es el filtro libre más pequeño sobre un conjunto X; segundo, cualquier otro filtro libre sobre X debe tener como subfamilia a $\mathsf{CoFin}(X)$.

Esta misma proposición podemos trasladarla al contexto de ideales:

Corolario 2.23
Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{I}$ un ideal sobre X. Los siguientes son equivalentes:

(1) $\mathcal{I}$ es ideal libre.

(2) $\mathsf{Fin}(X) \subseteq \mathcal{I}$.

Demostración:
Es inmediata de las Proposiciones (2.22), (2.16) y de la Observación (2.20). ■

Estos resultados nos dicen que siempre existen filtros e ideales libres sobre cualquier conjunto. Más aún, si X fuera un conjunto infinito, obtendríamos la existencia de filtros e ideales propios libres sobre este conjunto como consecuencia de la Proposición (2.17).

Ahora hablaremos un poco sobre de filtros e ideales en el contexto de espacios topológicos.

Proposición 2.24 (Filtro de Vecindades sobre un Punto)
Sean (X, τ) espacio topológico y $x \in X$. La familia:

$$\mathcal{F}_x = \left\{ V \subseteq X \middle| V \text{ es vecindad de } x \right\},$$

es un filtro propio sobre X llamado **filtro de vecindades en el punto** x.

Demostración:
Veamos que $\mathcal{F}_x$ es filtro propio. En efecto:

(1) Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A, B \in \mathcal{F}_x$, entonces A y B son vecindades de x, luego $A \cap B$ es vecindad de x. Así que $A \cap B \in \mathcal{F}_x$.

(2) Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \in \mathcal{F}_x$ y $A \subseteq B$. Como A es vecindad de x, existe un abierto $U \in \tau$ no vacío tal que:

$$x \in U \subseteq A,$$

luego,

$$x \in U \subseteq B.$$

Así que B es vecindad de x, es decir que $B \in \mathcal{F}_x$.

(3) Se tiene que $\emptyset \notin \mathcal{F}_x$, ya que $\emptyset$ no es vecindad de x.

Por los incisos anteriores $\mathcal{F}_x$ es un filtro propio sobre X. ■

Definición 2.10 (Ideal de Conjuntos que no se Acumulan en un Punto)
Sean (X, τ) espacio topológico y $x \in X$. Se denota por $\mathcal{I}_x$ al ideal dual propio del filtro propio $\mathcal{F}_x$

sobre X, dado por:

$$\mathcal{I}_x = \mathcal{F}_x^* = \left\{ X \setminus A \middle| A \in \mathcal{F}_x \right\}.$$

Este ideal es llamado **ideal de conjuntos que no se acumulan en** x.

Por el Lema (2.13) se tiene que $\mathcal{I}_x$ es un ideal sobre X. Este ideal nos servirá más adelante para caracterizar los espacios de Fréchet. Resulta que podemos caracterizar los elementos de $\mathcal{I}_x$, como lo muestra la siguiente proposición:

Proposición 2.25
Sea (X, τ) espacio topológico y $x \in X$. Entonces:

$$\mathcal{I}_x = \left\{ A \subseteq X \middle| x \notin \overline{A} \right\}.$$

Demostración:
Veamos la doble contención:

- Sea $I \in \mathcal{I}_x$, entonces existe $V \in \mathcal{F}_x$ tal que $I = X \setminus V$. Tenemos que:

  $$\overline{I} = \overline{X \setminus V} = X \setminus \mathring{V},$$

  dado que V es vecindad de x, entonces $x \in \mathring{V}$, luego $x \notin \overline{I}$.

- Sea $I \in \left\{ A \subseteq X \middle| x \notin \overline{A} \right\}$, entonces $x \notin \overline{I}$, por lo cual existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ y $U \cap I = \emptyset$. Por ende, $X \setminus I$ es una vecindad de x, pues $x \in U \subseteq X \setminus I$, así que $X \setminus I \in \mathcal{F}_x$. Se sigue entonces que $I = X \setminus (X \setminus I) \in \mathcal{I}_x$.

Por los dos incisos anteriores se sigue la igualdad. ■

Ahora hablaremos sobre las intersecciones de filtros e ideales sobre un conjunto.

Lema 2.26 (Intersección de Familias de Filtros/Ideales)
Sea X conjunto no vacío:

(1) Si $\mathscr{F} = \left\{ \mathcal{F} \middle| \mathcal{F} \text{ es filtro sobre } X \right\}$ es no vacía, entonces la familia de subconjuntos de X dada por:

$$\bigcap_{\mathcal{F} \in \mathscr{F}} \mathcal{F},$$

es un filtro sobre X.

(2) Si $\mathscr{I} = \left\{ \mathcal{I} \middle| \mathcal{I} \text{ es ideal sobre } X \right\}$ es no vacía, entonces la familia de subconjuntos de X dada por:

$$\bigcap_{\mathcal{I} \in \mathscr{I}} \mathcal{I},$$

es un ideal sobre X.

Demostración:

De *(1)*: Sea:

$$\mathcal{F}_0 = \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}} \mathcal{F}.$$

Veamos que $\mathcal{F}_0$ es filtro sobre X:

(a) Si $A, B \in \mathcal{F}_0$, entonces $A, B \in \mathcal{F}$, para todo $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$. Como $\mathcal{F}$ es filtro, se sigue que $A \cap B \in \mathcal{F}$, para todo $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$, por lo cual $A \cap B \in \mathcal{F}_0$.

(b) Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \subseteq B$ con $A \in \mathcal{F}_0$, luego $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, para todo $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$. Como $\mathcal{F}$ es filtro, se sigue que $B \in \mathcal{F}$, para todo $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$, por lo cual $B \in \mathcal{F}_0$.

De los dos incisos anteriores se sigue que $\mathcal{F}_0$ es un filtro sobre X.

De *(2)*: Es análogo a lo hecho en *(1)*. ■

El lema anterior nos permite hacer la siguiente definición, la cual nos dice de qué forma podemos generar filtros e ideales dada una familia de subconjuntos de un conjunto:

Definición 2.11 (**Filtro e Ideal Generado por una Familia de Conjuntos**)
Sean X conjunto no vacío y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Se definen el **filtro** e **ideal generado por la familia** $\mathcal{S}$ como sigue:

(1) **Filtro generado por** $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \bigcap_{\mathcal{F}_\mathcal{S} \in \mathfrak{F}_\mathcal{S}} \mathcal{F}_\mathcal{S},$$

donde $\mathfrak{F}_\mathcal{S}$ es la familia de todos los filtros sobre X que contienen a la familia $\mathcal{S}$.

(2) **Ideal generado por** $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{I}(\mathcal{S}) = \bigcap_{\mathcal{I}_\mathcal{S} \in \mathfrak{I}_\mathcal{S}} \mathcal{I}_\mathcal{S},$$

donde $\mathfrak{I}_\mathcal{S}$ es la familia de todos los ideales sobre X que contienen a la familia $\mathcal{S}$.

Estas definiciones las podemos hacer, pues $\mathfrak{F}_\mathcal{S}$ y $\mathfrak{I}_\mathcal{S}$ son no vacías, ya que contienen a $\mathcal{P}(X)$. En el caso en que $\mathcal{S} = \emptyset$, tenemos que $\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \{X\}$ y $\mathcal{I}(\mathcal{S}) = \{\emptyset\}$, por las Observaciones (2.10) y (2.12).

Resulta que, dada una familia de subconjuntos de un conjunto, podemos caracterizar quien serán el filtro e ideal generado por dicha familia, como lo muestra la siguiente proposición:

Proposición 2.27 (**Caracterización Filtro e Ideal Generado por una Familia**)
Sean X conjunto no vacío y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Entonces:

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \left\{ F \subseteq X \,\middle|\, \text{existe } \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \text{ finito tal que } \bigcap \mathcal{S}' \subseteq F \right\}, \tag{2.6}$$

y,

$$\mathcal{I}(\mathcal{S}) = \left\{ I \subseteq X \,\middle|\, \text{existe } \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \text{ finito tal que } I \subseteq \bigcup \mathcal{S}' \right\}. \tag{2.7}$$

Demostración:
Haremos la prueba por partes:

- Sea:
$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}} = \left\{ F \subseteq X \middle| \text{existe } \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \text{ finito tal que } \bigcap \mathcal{S}' \subseteq F \right\}.$$
Veamos primero que $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ es un filtro sobre X:

  (1) Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$, entonces existen $\mathcal{S}'_1, \mathcal{S}'_2 \subseteq \mathcal{S}$ finitos tales que:
$$\bigcap \mathcal{S}'_i \subseteq F_i, \quad \forall i = 1, 2,$$
  por lo cual:
$$\bigcap \mathcal{S}' = \left(\bigcap \mathcal{S}'_1\right) \cap \left(\bigcap \mathcal{S}'_2\right) \subseteq F_1 \cap F_2,$$
  donde $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'_1 \cup \mathcal{S}'_2 \subseteq \mathcal{S}$ es finito, por tanto $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$.

  (2) Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \subseteq B$ y $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$, entonces existe $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ finito tal que:
$$\bigcap \mathcal{S}' \subseteq A,$$
  por lo cual, $\bigcap \mathcal{S}' \subseteq B$, así que $B \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$.

  De los dos incisos anteriores se sigue que $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ es un filtro sobre X. Por definición, este filtro contiene a la familia $\mathcal{S}$, así que por minimalidad $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$. Si ahora $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$, entonces existe $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ finito tal que:
$$\bigcap \mathcal{S}' \subseteq F,$$
  como $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ es el filtro más pequeño que contiene a la familia $\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S})$, como es filtro, es cerrado bajo intersecciones finitas, luego $\bigcap \mathcal{S}' \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ y, por propiedad de absorción, se tiene que $F \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$. Se sigue así que $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S})$.

  Por tanto, $\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$, de donde se sigue (2.6).

- Sea:
$$\mathcal{I}_{\mathcal{S}} = \left\{ I \subseteq X \middle| \text{existe } \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \text{ finito tal que } I \subseteq \bigcup \mathcal{S}' \right\}.$$
Veamos primero que $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}$ es un ideal sobre X:

  (1) Sean $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_{\mathcal{S}}$, entonces existen $\mathcal{S}'_1, \mathcal{S}'_2 \subseteq \mathcal{S}$ finitos tales que:
$$I_i \subseteq \bigcup \mathcal{S}'_i, \quad \forall i = 1, 2,$$
  por lo cual:
$$I_1 \cup I_2 \subseteq \bigcup \mathcal{S}' = \left(\bigcup \mathcal{S}'_1\right) \cup \left(\bigcup \mathcal{S}'_2\right),$$
  donde $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'_1 \cup \mathcal{S}'_2 \subseteq \mathcal{S}$ es finito, por tanto $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{I}_{\mathcal{S}}$.

  (2) Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \subseteq B$ y $B \in \mathcal{I}_{\mathcal{S}}$, entonces existe $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ finito tal que:
$$B \subseteq \bigcap \mathcal{S}',$$
  por lo cual $A \subseteq \bigcap \mathcal{S}'$, así que $A \in \mathcal{I}_{\mathcal{S}}$.

De los dos incisos anteriores se sigue que $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}$ es ideal sobre X. Por definición, este ideal contiene a la familia $\mathcal{S}$, así que por minimalidad $\mathcal{I}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{S}}$. Si ahora $I \in \mathcal{I}_{\mathcal{S}}$, entonces existe $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ finito tal que:

$$I \subseteq \bigcup \mathcal{S}',$$

como $\mathcal{I}(\mathcal{S})$ es el ideal más pequeño que contiene a la familia $\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{S})$, como es ideal es cerrado bajo uniones finitas, luego $\bigcup \mathcal{S}' \in \mathcal{I}(\mathcal{S})$ y por ser ideal se tiene que $I \in \mathcal{I}(\mathcal{S})$. Se sigue así que $\mathcal{I}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{S})$

Por tanto, $\mathcal{I}(\mathcal{S}) = \mathcal{I}_{\mathcal{S}}$, de donde se sigue (2.7).

■

OBSERVACIÓN 2.28 (Unión e Intersección de Familia Vacía)
Sea X un conjunto y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. En este texto convendremos en que:

$$\bigcup \mathcal{S} = \emptyset \quad \text{y} \quad \bigcap \mathcal{S} = X,$$

en caso de que $\mathcal{S} = \emptyset$.

§2.3 ULTRAFILTROS

En esta sección hablaremos un poco sobre ultrafiltros, su existencia y algunas caracterizaciones de los mismos.

DEFINICIÓN 2.12 (Ultrafiltro)
Sea X un conjunto no vacío. Un filtro propio $\mathcal{U}$ sobre X es un **ultrafiltro** si para todo filtro propio $\mathcal{F}$ se tiene que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ implica que $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.

La definición se tiene que dar en el contexto de filtros propios, ya que por el Ejemplo (2.11) para todo conjunto X, la familia $\mathcal{P}(X)$ es un filtro sobre X el cual cumple que:

$$\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{P}(X),$$

para todo filtro $\mathcal{F}$ sobre X. De esta forma, en la definición de ultrafiltro estamos descartando la posibilidad de hablar de $\mathcal{P}(X)$ por no ser filtro propio.

Antes de hablar de la existencia de ultrafiltros, hablaremos de algunas de sus propiedades.

LEMA 2.29
Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ un filtro propio sobre X. Si $A \subseteq X$ es tal que $A \cap F \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{F}$, entonces la familia:

$$\mathcal{F}' = \left\{ B \subseteq X \,\middle|\, \text{existe } F \in F \text{ tal que } F \cap A \subseteq B \right\},$$

es un filtro propio sobre X.

Demostración:
Se tiene que $\mathcal{F}'$ es no vacía por ser $\mathcal{F}$ filtro propio sobre X. Debemos verificar tres condiciones:

(1) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{F}'$, entonces existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que:

$$F_1 \cap A \subseteq B_1 \quad \text{y} \quad F_2 \cap A \subseteq B_2,$$

luego,

$$\begin{aligned}(F_1 \cap F_2) \cap A &= (F_1 \cap A) \cap (F_2 \cap A)\\ &\subseteq B_1 \cap B_2,\end{aligned}$$

donde $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. Se sigue así que $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}'$.

(2) Sean $B, C \subseteq X$ tales que $B \subseteq C$ y $B \in \mathcal{F}'$, entonces existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \cap A \subseteq B$, en particular $F \cap A \subseteq C$, lo cual implica que $C \in \mathcal{F}'$.

(3) $\emptyset \notin \mathcal{F}'$, ya que en caso contrario se tendría que existiría $F_0 \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap F_0 \subseteq \emptyset$, lo cual implica que $A \cap F_0 = \emptyset$, cosa que contradice la elección de $A\#_c$. Por tanto, $\emptyset \notin \mathcal{F}'$.

Por los tres incisos anteriores, se sigue que $\mathcal{F}'$ es un filtro propio sobre X. ■

PROPOSICIÓN 2.30 (**Caracterización Ultrafiltros**)
Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ un filtro propio sobre X. Entonces, $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si y solo si para todo conjunto $A \subseteq X$ se tiene una y solo una de las dos pertenencias: $A \in \mathcal{F}$ ó $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Demostración:
Probaremos la doble implicación:
$\Rightarrow$) : Supongamos que $\mathcal{F}$ es ultrafiltro. Se tienen dos casos:

- Si para todo $F \in \mathcal{F}$ se cumple que $F \cap A \neq \emptyset$, entonces, del lema anterior se tiene que la familia:

$$\mathcal{F}' = \left\{ B \subseteq X \,\middle|\, \text{existe } F \in \mathcal{F} \text{ tal que } F \cap A \subseteq B \right\},$$

  es un filtro propio sobre X. Si $F \in \mathcal{F}$, entonces, dado que $F \cap A \subseteq F$, se sigue por el hecho de que $A \cap F \in \mathcal{F}'$ y por absorción, que $F \in \mathcal{F}'$, esto es que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Dado que $\mathcal{F}$ es ultrafiltro, debe tenerse que $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$, en particular $A \in \mathcal{F}$, pues $A \cap X \subseteq A$, con $X \in \mathcal{F}$.

- Supongamos que $A \cap F_0 = \emptyset$ para algún $F_0 \in \mathcal{F}$. Se tiene que:

$$F_0 \cap (X \setminus A) = F_0,$$

  esto es que $F_0 \subseteq X \setminus A$. Como $\mathcal{F}$ ultrafiltro, en particular es filtro, se sigue así por absorción que $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Al ser $\mathcal{F}$ filtro propio, no puede suceder que $A \in \mathcal{F}$ y $X \setminus A \in \mathcal{F}$, ya que en tal caso sucedería que $\emptyset \in \mathcal{F}\#_c$. Por tanto, de los dos incisos anteriores se tiene el resultado.

$\Leftarrow$) : Supongamos que para todo conjunto $A \subseteq X$ se tiene una y solo una de las dos pertenencias: $A \in \mathcal{F}$ ó $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Sea $\mathcal{G}$ un filtro propio sobre X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Si $G \in \mathcal{G}$, como $G \subseteq X$ se tiene que solo hay una de las dos pertenencias: $G \in \mathcal{F}$ ó $X \setminus G \in \mathcal{F}$. No puede suceder que $X \setminus G \in \mathcal{F}$, ya que como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ se seguiría que $G \in \mathcal{G}$ y $X \setminus G \in \mathcal{G}$ por lo cual $\emptyset = G \cap (X \setminus G) \in \mathcal{G}$, lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{G}$ es filtro propio$\#_c$.

Por tanto, $G \in \mathcal{F}$, se sigue así que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. De ambas contenciones tenemos que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, es decir que $\mathcal{F}$ es ultrafiltro. ■

Finalmente, para terminar esta sección, mostraremos la existencia de los ultrafiltros. Este teorema servirá más adelante en el Capítulo 3.

Teorema 2.31 (Existencia Ultrafiltros)
Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ un filtro propio sobre X. Entonces, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

Demostración:
Consideremos la familia:

$$\mathscr{G} = \left\{ \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X) \middle| \mathcal{G} \text{ es un filtro propio sobre } X \text{ tal que } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \right\},$$

esta familia es no vacía, ya que $\mathcal{F} \in \mathscr{G}$. Además, esta familia está parcialmente ordenada por $\subseteq$. Sea $\mathscr{C}$ una cadena, es decir que es un conjunto totalmente ordenado por la relación $\subseteq$. Veamos que $\mathscr{C}$ está acotada superiormente. En efecto, tomemos:

$$\mathcal{G} = \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathscr{C}} \mathcal{C}.$$

Afirmamos que $\mathcal{G}$ es un filtro propio sobre X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$:

(1) Sean $A, B \in \mathcal{G}$, entonces existen $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathscr{C}$ tales que:

$$A \in \mathcal{C}_1 \quad \text{y} \quad B \in \mathcal{C}_2.$$

Como $\mathscr{C}$ es una cadena, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$, luego $A, B \in \mathcal{C}_2$. Por ser este un filtro se sigue que $A \cap B \in \mathcal{C}_2$, lo cual implica que $A \cap B \in \mathcal{G}$.

(2) Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \in \mathcal{G}$ y $A \subseteq B$. Como $A \in \mathcal{G}$, existe $\mathcal{C} \in \mathscr{C}$ tal que $A \in \mathcal{C}$, luego, al ser $\mathcal{C}$ filtro se sigue que $B \in \mathcal{C}$, lo cual implica que $B \in \mathcal{G}$.

(3) Si $\emptyset \in \mathcal{G}$, entonces existiría $\mathcal{C} \in \mathscr{C}$ tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$, lo cual contradiría el hecho de que $\mathcal{C}$ es un filtro propio sobre $X\#_c$. Por tanto, $\emptyset \notin \mathcal{G}$.

Por los tres incisos anteriores se tiene que $\mathcal{G}$ es un filtro propio sobre X. Además, este contiene a $\mathcal{F}$, ya que todos los elementos de $\mathscr{C}$ lo contienen. Dado que $\mathscr{C}$ está acotada superiormente por $\mathcal{G}$, por el Lema de Zorn, se tiene que $\mathscr{G}$ posee elementos maximales, digamos $\mathcal{U}$.

Se tiene que $\mathcal{U}$ es un elemento de $\mathscr{G}$, por lo que es un filtro propio sobre X que contiene a $\mathcal{F}$, que además cumple al ser elemento maximal que si $\mathcal{G}$ es un filtro sobre X que contiene a $\mathcal{F}$, se tiene que:

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{G}.$$

Por ende, $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{F}$. ■

§2.4 Cofinalidad

Definición 2.13 (**Cofinalidad**)
Sean X un conjunto no vacío e $\mathcal{I}$ un ideal sobre X. Se define la **cofinalidad de** $\mathcal{I}$ como:

$$\mathsf{cof}\,(\mathcal{I}) = \text{mín}\left\{|\mathcal{J}|\,\middle|\,\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I} \text{ tal que todo miembro de } \mathcal{I} \text{ está contenido en un miembro de } \mathcal{J}\right\}.$$

Todo miembro de la familia sobre la que se toma el mínimo es llamada **familia cofinal** en $\mathcal{I}$.

Se tiene de forma inmediata que $\mathcal{I}$ es una familia cofinal en $\mathcal{I}$, por lo que la cofinalidad de $\mathcal{I}$ está bien definida.

Ejemplo 2.32 (**Cofinalidad de $\mathsf{Fin}\,(X)$**)
Sea X un conjunto no vacío finito y consideremos el ideal $\mathsf{Fin}\,(X)$. Entonces, $\mathsf{cof}\,(\mathsf{Fin}\,(X)) = 1$.

En efecto, como $X \in \mathsf{Fin}\,(X)$, se tiene que una familia cofinal en $\mathsf{Fin}\,(X)$ es $\{X\}$, ya que $\{X\} \subseteq \mathsf{Fin}\,(X)$ (pues X es finito) y, para todo $I \in \mathsf{Fin}\,(X)$ se cumple que $I \subseteq X$. Por tanto, $\mathsf{cof}\,(\mathsf{Fin}\,(X)) = 1$.

El caso en que X sea infinito es más complicado, con resultados de los Capítulos 3 y 4 no es muy difícil probar que $\mathsf{cof}\,(\mathsf{Fin}\,(X)) = |X|$.

Lema 2.33
Sea $f : X \to Y$ una función biyectiva entre dos conjuntos X y Y con X no vacío. Si $\mathcal{I}$ es un ideal sobre X, entonces:

$$\mathsf{cof}\,(\mathcal{I}) = \mathsf{cof}\,(f[\mathcal{I}]).$$

Demostración:
Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre X. Por la Proposición (2.15) inciso *(2)* se tiene que $f[\mathcal{I}]$ es un ideal sobre Y. Para probar la igualdad de ambas cofinalidades, probaremos que $\mathsf{cof}\,(f[\mathcal{I}]) \leqslant \mathsf{cof}\,(\mathcal{I})$ y $\mathsf{cof}\,(\mathcal{I}) \leqslant \mathsf{cof}\,(f[\mathcal{I}])$:

- Sea $\mathcal{J}$ una familia cofinal en $\mathcal{I}$ tal que $\mathsf{cof}\,(\mathcal{I}) = |\mathcal{J}|$. Afirmamos que la familia:

  $$f[\mathcal{J}] = \left\{f[J]\,\middle|\,J \in \mathcal{J}\right\},$$

  es cofinal en $f[\mathcal{I}]$. En efecto, sea $f[I] \in f[\mathcal{I}]$, entonces existe $J \in \mathcal{J}$ tal que:

  $$I \subseteq J,$$

  por lo que $f[I] \subseteq f[J]$ por ser f función. Se sigue así que $f[\mathcal{J}]$ es familia cofinal en $f[\mathcal{I}]$, por lo cual:

  $$\mathsf{cof}\,(f(\mathcal{I})) \leqslant |f[\mathcal{J}]| = |\mathcal{J}| = \mathsf{cof}\,(\mathcal{I}), \tag{2.8}$$

  donde la primera igualdad se tiene por ser f biyección.

- Sea $\mathcal{J}'$ una familia cofinal en $f[\mathcal{I}]$ tal que $\mathsf{cof}\,(f[\mathcal{I}]) = |\mathcal{J}'|$. Afirmamos que la familia:

  $$f^{-1}[\mathcal{J}] = \left\{f^{-1}[J']\,\middle|\,J' \in \mathcal{J}'\right\},$$

  es cofinal en $\mathcal{I}$. En efecto, sea $I \in \mathcal{I}$, entonces como $\mathcal{J}'$ es cofinal en $f[\mathcal{I}]$, existe $J' \in \mathcal{J}'$ tal que:

  $$f[I] \subseteq J',$$

por lo cual $I \subseteq f^{-1}[J']$ por ser f biyección. Se sigue así que $f^{-1}[\mathcal{J}']$ es familia cofinal en $\mathcal{I}$, con lo que:

$$\mathsf{cof}\,(\mathcal{I}) \leqslant \left|f^{-1}[\mathcal{J}']\right| = |\mathcal{J}'| = \mathsf{cof}\,(f[\mathcal{I}])\,. \tag{2.9}$$

De las desigualdades (2.8) y (2.9) se sigue el resultado. ■

Resulta que en espacios topológicos existe una relación estrecha entre la cofinalidad del ideal $\mathcal{I}_x$ y $\chi(X,x)$, siendo (X,τ) espacio topológico y $x \in X$, como lo muestra el siguiente resultado. Este teorema, al igual que el lema anterior, resultarán extremadamente importantes en el Capítulo 4.

Teorema 2.34
Sean (X,τ) espacio topológico y $x \in X$. Entonces $\mathsf{cof}\,(\mathcal{I}_x) = \chi(X,x)$.

Demostración:
Recordemos que por la Proposición (2.25) se tiene que:

$$\mathcal{I}_x = \left\{A \subseteq X \middle| x \notin \overline{A}\right\},$$

y

$$\chi(X,x) = \text{mín}\left\{|\mathcal{V}| \middle| \mathcal{V} \text{ es sistema fundamental de vecindades para } x\right\},$$

por la Observación (2.5). Veamos la igualdad:

- Sea $\mathcal{J}$ una familia cofinal en $\mathcal{I}$ tal que $\mathsf{cof}\,(\mathcal{I}_x) = |\mathcal{J}|$. Consideremos la familia:

  $$\mathcal{F} = \left\{X \setminus J \middle| J \in \mathcal{J}\right\}.$$

  Afirmamos que $\mathcal{F}$ es un sistema fundamental de vecindades para x. En efecto, es tiene que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_x$, ya que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}_x$, siendo $\mathcal{F}_x$ el filtro de vecindades en el punto x. Sea $U \subseteq X$ una vecindad de x, entonces $X \setminus U \in \mathcal{I}_x$. Por ser $\mathcal{J}$ una familia cofinal, se sigue que existe $J \in \mathcal{J}$ tal que:

  $$X \setminus U \subseteq J,$$

  lo cual implica que $X \setminus J \subseteq U$. En particular, $J \in \mathcal{I}_x$, por lo que $X \setminus J \in \mathcal{F}_x$, es decir que $X \setminus J$ es una vecindad de x. Así que $\mathcal{F}$ es un sistema fundamental de vecindades para x, luego $\chi(X,x) \leqslant |\mathcal{F}| = |\mathcal{J}| = \mathsf{cof}\,(\mathcal{I}_x)$.

- Sea $\mathcal{V}$ un sistema fundamental de vecindades para x tal que $\chi(X,x) = |\mathcal{V}|$. Tomemos:

  $$\mathcal{C} = \left\{X \setminus V \middle| V \in \mathcal{V}\right\}.$$

  Afirmamos que $\mathcal{C}$ es una familia cofinal en $\mathcal{I}_x$. En efecto, veamos primero que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{I}_x$.

  Sea $C \in \mathcal{C}$, entonces existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $C = X \setminus V$. Como $\mathcal{V}$ es un sistema fundamental de vecindades para x se sigue que V es vecindad de x, luego $x \notin X \setminus \mathring{V} = \overline{X \setminus V} = \overline{C}$. Así que $C \in \mathcal{I}_x$.

  Sea ahora $I \in \mathcal{I}_x$, entonces $X \setminus I \in \mathcal{F}_x$ es una vecindad de x, por lo que al ser $\mathcal{V}$ un sistema fundamental de vecindades para x, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq X \setminus I$, esto es que $I \subseteq X \setminus V$ con $X \setminus V \in \mathcal{C}$. Se sigue entonces que $\mathcal{C}$ es familia cofinal en $\mathcal{I}_x$. Por ende $\mathsf{cof}\,(\mathcal{I}_x) \leqslant |\mathcal{C}| = |\mathcal{V}| = \chi(X,x)$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que $\mathsf{cof}(\mathcal{I}_x) = \chi(X, x)$. ■

§2.5 Ortogonalidad

Introduciremos un concepto que nos permitirá caracterizar los espacios de Fréchet, mismos que se verán en la siguiente sección.

Definición 2.14 (Familia Ortogonal)
Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X. Definimos $\mathcal{A}^\perp$ como la colección de todos los subconjuntos de X que tienen intersección finita con todos los elementos de $\mathcal{A}$, esto es:

$$\mathcal{A}^\perp = \left\{ B \subseteq X \middle| |A \cap B| < \infty, \quad \forall A \in \mathcal{A} \right\}.$$

Denotaremos por $\mathcal{A}^{\perp\perp}$ a la familia $\left(A^\perp\right)^\perp$, y $\mathcal{A}^{\perp\perp\perp} = \left(\mathcal{A}^{\perp\perp}\right)^\perp$.

Proposición 2.35
Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X. Entonces:

(a) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{\perp\perp}$.

(b) $\mathcal{A}^\perp = \mathcal{A}^{\perp\perp\perp}$.

Demostración:
De *(a)*: Sea $A \in \mathcal{A}$, entonces para todo $B \in \mathcal{A}^\perp$:

$$|A \cap B| = |B \cap A| < \infty,$$

de la definición de $\mathcal{A}^{\perp\perp}$ se sigue que $A \in \mathcal{A}^{\perp\perp}$. Por tanto, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{\perp\perp}$.

De *(b)*: Ya se tiene una contención por el inciso anterior, veamos la otra. Sea $A \in \mathcal{A}^{\perp\perp\perp}$, esto es:

$$|A \cap B| < \infty, \quad \forall B \in \mathcal{A}^{\perp\perp}.$$

En particular:

$$|A \cap B| < \infty, \quad \forall B \in \mathcal{A},$$

pues, del inciso anterior se tiene que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{\perp\perp}$. Por tanto, $A \in \mathcal{A}^\perp$. Se tiene así que $\mathcal{A}^{\perp\perp\perp} \subseteq \mathcal{A}^\perp$, lo cual implica por la contención inicial que $\mathcal{A}^\perp = \mathcal{A}^{\perp\perp\perp}$. ■

Una propiedad importante de la familia ortogonal es que si nuestra familia sobre la que tomamos la familia ortogonal es un ideal, entonces la familia ortogonal sigue siendo un ideal:

Proposición 2.36
Sea X un conjunto no vacío. Si $\mathcal{I}$ es un ideal sobre X, entonces $\mathcal{I}^\perp$ es ideal sobre X.

Demostración:
Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre X. Veamos que $\mathcal{I}^{\perp}$ es ideal sobre X.

(1) Sean $A, B \in \mathcal{I}^{\perp}$, entonces: $|A \cap I| < \infty$ y $|B \cap I| < \infty$ para todo $I \in \mathcal{I}$, luego:

$$|(A \cup B) \cap I| \leqslant |A \cap I| + |B \cap I| < \infty, \quad \forall I \in \mathcal{I},$$

por tanto, $A \cup B \in \mathcal{I}^{\perp}$.

(2) Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \subseteq B$ y $B \in \mathcal{I}^{\perp}$, entonces:

$$|B \cap I| < \infty, \quad \forall I \in \mathcal{I},$$

al tenerse que $A \subseteq B$, se sigue que:

$$|A \cap I| < \infty, \quad \forall I \in \mathcal{I},$$

es decir, $A \in \mathcal{I}^{\perp}$.

Por los incisos anteriores se sigue que $\mathcal{I}^{\perp}$ es un ideal sobre X. ■

§2.6 Espacios de Fréchet

Parte fundamental para enunciar el problema de Malykhin son los espacios de Fréchet, cuyas propiedades principales se mencionan en esta sección. Antes de darlas, es necesario hablar un poco sobre sucesiones y convergencia de sucesiones en un espacio topológico.

Definición 2.15 (**Sucesiones Convergentes**)
Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos en X **converge a** $x \in X$ o que $x \in X$ **es límite de la sucesión** si para toda vecindad V de x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N \Rightarrow x_n \in V.$$

Ejemplo 2.37
Si $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, \{a, b, c\}\}$, entonces cualquier sucesión converge a los tres elementos del espacio: a, b y c.

En general, trabajando con sucesiones en espacios topológicos, no es necesario que el límite de una sucesión sea único.

Definición 2.16 (**Espacio de Fréchet**)
Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que (X, τ) es de **Fréchet-Urysohn** (también llamado simplemente **Fréchet**) si para cada $A \subseteq X$ se cumple que para todo $x \in \overline{A}$ existe una sucesión de elementos de A que converge a x.

Resulta que todo espacio topológico primero numerable es Fréchet, como lo muestra la siguiente proposición:

Proposición 2.38 (**Primero Numerable implica Fréchet**)
Sea (X, τ) un espacio topológico primero numerable, entonces (X, τ) es de Fréchet.

Demostración:
Sea $A \subseteq X$ no vacío y $x \in \overline{A}$. Debemos probar que existe una sucesión de elementos en A que converge a x. Como el espacio (X, τ) es primero numerable, existe una base local para x que es a lo sumo numerable, digamos:

$$\mathcal{B}_x = \left\{ B_m \middle| m \in \mathbb{N} \right\}$$

donde $B_m \in \tau$ es un abierto que contiene a x, para todo $m \in \mathbb{N}$. Se tienen dos casos:

(a) $x \in A$, en cuyo caso podemos tomar la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la cual converge a x.

(b) $x \notin A$, al ser B_1 un abierto que contiene a x y como $x \in \overline{A}$, existe $x_1 \in X$ tal que:

$$x_1 \in A \cap B_1.$$

Supongamos elegidos $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que:

$$x_i \in A \cap (B_1 \cap \cdots \cap B_i), \quad \forall i \in [\![1, n]\!].$$

Como $B_1 \cap \cdots \cap B_n \cap B_{n+1}$ es un abierto que contiene a x y $x \in \overline{A}$, entonces existe $x_{n+1} \in X$ tal que:

$$x_{n+1} \in A \cap (B_1 \cap \cdots \cap B_n \cap B_{n+1}).$$

Aplicando inducción tenemos construida una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de A tal que:

$$x_n \in A \cap (B_1 \cap \cdots \cap B_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Afirmamos que esta sucesión converge a x. En efecto, sea $U \in \tau$ tal que $x \in U$. Como $\mathcal{B}_x$ es una base local numerable para x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$x \in B_N \subseteq U.$$

Se tiene que si $n \geqslant N$:

$$x_n \in A \cap (B_1 \cap \cdots \cap B_N \cap \cdots \cap B_n) \subseteq B_N \subseteq U,$$

por tanto, $x_n \in U$ para todo $n \geqslant N$. Se sigue que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge a x.

Por los dos incisos anteriores, se sigue que (X, τ) es un espacio de Fréchet. ■

Esta proposición nos proporciona varios espacios de Frechét, como lo es $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$, todo espacio topológico discreto y todo espacio métrico. En el siguiente capítulo se presentará un espacio de Fréchet que no es primero numerable.

Para continuar con el estudio de los espacios de Fréchet, veamos algunas propiedades de los mismos:

PROPOSICIÓN 2.39 (Propiedad Fréchet es Hereditaria)
La propiedad de ser espacio de Fréchet es hereditaria.

Demostración:
Sea (X,τ) un espacio topológico de Fréchet y $Y\subseteq X$. Veamos que (Y,τ_Y) es de Fréchet. En efecto, consideremos $Z\subseteq Y$ no vacío y $x\in\overline{Z}^Y$. Como:

$$\overline{Z}^Y=\overline{Z}\cap Y$$

en particular, $x\in\overline{Z}$ luego existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ en $Z\subseteq Y$ que converge a x.

Por tanto, (Y,τ_Y) es de Fréchet. ■

PROPOSICIÓN 2.40 (Propiedad Fréchet es Topológica)
Sean (X_1,τ_1) y (X_2,τ_2) dos espacios topológicos y $f:X_1\to X_2$ un homeomorfismo entre ambos espacios. Si (X_1,τ_1) es de Fréchet, entonces (X_2,τ_2) también lo es.

Demostración:
Supongamos que (X_1,τ_1) es de Fréchet. Sea $Y\subseteq X_2$ no vacío y $y\in\overline{Y}$. Veamos que existe una sucesión de elementos en Y que converge a y. En efecto, como f es homeomorfismo se cumple que:

$$\overline{f^{-1}[Y]}=f^{-1}\left[\overline{Y}\right].$$

Dado que $f^{-1}(y)\in f^{-1}\left[\overline{Y}\right]\subseteq X_1$, al ser el espacio (X_1,τ_1) de Fréchet y por la igualdad anterior se tiene que existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ de elementos en $f^{-1}[Y]$ que converge a $f^{-1}(y)$. Tomemos:

$$y_n=f(x_n),\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Sea $U\subseteq X_2$ abierto tal que $y\in U$. Nuevamente, como f^{-1} es homeomorfismo, entonces $f^{-1}[U]$ es abierto en X_1 y contiene a $f^{-1}(y)$. Por ser (X_1,τ_1) de Fréchet, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que:

$$n\geqslant N\Rightarrow x_n\in f^{-1}[U],$$

así que:

$$n\geqslant N\Rightarrow y_n=f(x_n)\in U.$$

Luego, la sucesión $(y_n)_{n=1}^\infty$ de elementos en Y converge a y. Se sigue así que el espacio (X_2,τ_2) es de Fréchet. ■

Anteriormente se habló sobre el ideal $\mathcal{I}_x$. Resulta que hay una relación entre este ideal y los espacios de Fréchet, como veremos en el siguiente resultado. Antes de ello, daremos la siguiente definición y probaremos una proposición que nos servirá más adelante:

DEFINICIÓN 2.17 (Conjuntos $\mathcal{I}$-Positivos)
Sea X un conjunto e $\mathcal{I}$ un ideal sobre X. Se define la **familia de todos los conjuntos $\mathcal{I}$-positivos** por:

$$\mathcal{I}^+=\left\{P\subseteq X\middle|P\notin\mathcal{I}\right\}.$$

Observación 2.41
Notemos que, si (X,τ) es un espacio topológico y $x\in X$, entonces:

$$\mathcal{I}_x=\left\{A\subseteq X\middle|x\notin\overline{A}\right\},$$

por lo cual,

$$\mathcal{I}_x^+=\left\{A\subseteq X\middle|x\in\overline{A}\right\}.$$

Proposición 2.42
Sea (X,τ) un espacio topológico. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X que converge a $x\in X$, entonces $\left\{x_n\middle|n\in\mathbb{N}\right\}\in\mathcal{I}_x^{\perp}$.

Demostración:
Sea:

$$S=\left\{x_n\middle|n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Como la sucesión converge a x, entonces para cada $V\in\mathcal{F}_x$, siendo $\mathcal{F}_x$ el filtro de vecindades de x, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que:

$$n\geqslant N\Rightarrow x_n\in V,$$

por ende,

$$|S\cap(X\setminus V)|<\infty.$$

Recordemos que $\mathcal{I}_x$ es el ideal dual del filtro de vecindades de x, por lo que $V\in\mathcal{F}_x$ si y solo si $X\setminus V\in\mathcal{I}_x$. Por lo cual:

$$|S\cap I|<\infty,\quad\forall I\in\mathcal{I}_x.$$

Se sigue así que $S\in\mathcal{I}_x^{\perp}$. ■

Proposición 2.43 (**Caracterización Espacios de Fréchet con Conjuntos**)
Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces, (X,τ) es de Fréchet si y solo si para todo $x\in X$ y para todo $A\in\mathcal{I}_x^+$ infinito tal que $x\notin A$ existe $S\in[A]^{\omega}$ tal que $S\in\mathcal{I}_x^{\perp}$.

Demostración:
Probaremos la doble implicación:

$\Rightarrow$): Supongamos que (X,τ) es de Fréchet. Sea $x\in X$ y $A\in\mathcal{I}_x^+$ con A infinito tal que $x\notin A$. Como el espacio es de Fréchet, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos en A que converge a x. Sea:

$$S=\left\{x_n\in A\middle|n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Afirmamos que S es numerable. En efecto, si este conjunto fuese finito, digamos $S=\{x_1,\dots,x_m\}$, al tenerse que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x, por ser el espacio T_1, el conjunto:

$$U=X\setminus\{x_1,\dots,x_m\},$$

sería abierto en X y como $x \notin A$ se tiene en particular, dado que $S \subseteq A$, que $x \in U$, así que debe existir $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N \Rightarrow x_n \in U,$$

en particular, existiría $i \in [\![1, m]\!]$ tal que $x_i \in U$, lo cual es una contradicción$\#_c$. Por ende, S es numerable. Por la Proposición (2.42) se sigue que $S \in \mathcal{I}_x^{\perp}$

$\Leftarrow$): Supongamos que para todo $x \in X$ y para todo $A \in \mathcal{I}_x^{+}$ infinito tal que $x \notin A$ existe $S \in [A]^{\omega}$ tal que $S \in \mathcal{I}_x^{\perp}$. Veamos que el espacio (X, τ) es de Fréchet. Sea $A \subseteq X$ no vacío y $x \in \overline{A}$. Se tienen tres casos:

- A es finito, en cuyo caso se sigue que $A = \overline{A}$ (pues al ser el espacio T_1, todo conjunto finito es cerrado), luego tomando la sucesión constante $(x)_{n=1}^{\infty}$ en A se sigue que esta es una sucesión en A que converge a x.

- A es infinito y $x \in A$, entonces nuevamente tomando la sucesión constante con valor x, esta converge a x.

- A es infinito y $x \notin A$. Por hipótesis, al tenerse que $A \in \mathcal{I}_x^{+}$, pues $x \in \overline{A}$, entonces existe $S \in [A]^{\omega}$ tal que $S \in \mathcal{I}_x^{\perp}$. Enumeremos los elementos de S, digamos:

  $$S = \left\{ x_n \middle| n \in \mathbb{N} \right\},$$

  tal que $x_n \neq x_m$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Afirmamos que esta sucesión converge a x. En efecto, como $S \in \mathcal{I}_x^{\perp}$, entonces:

  $$|S \cap I| < \infty, \quad \forall I \in \mathcal{I}_x.$$

  Recordemos que:

  $$\mathcal{F}_x = \left\{ X \setminus I \middle| I \in \mathcal{I}_x \right\},$$

  es el filtro de vecindades, mismo que es el dual de $\mathcal{I}_x$, luego por la desigualdad anterior, al ser el espacio infinito (ya que contiene un subconjunto infinito) se sigue que el conjunto $S \cap V$ con $V \in \mathcal{F}_x$ debe ser infinito, puesto que $|S \cap (X \setminus V)| < \infty$, por lo cual, para todo $V \in \mathcal{F}_x$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$n \geqslant N \Rightarrow x_n \in V.$$

  Se sigue así que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.

Por los tres incisos anteriores se sigue que el espacio (X, τ) es de Fréchet. ∎

Resulta que podemos dar una versión de esta proposición adaptada a grupos topológicos, que gracias a que son homogéneos nos permite simplificarla.

Antes de su prueba, recordemos lo siguiente. Si G es grupo topológico y $A \subseteq G$, entonces:

- Si A es infinito, entonces para todo $g \in G$ se tiene que gA es infinito.

- Si $U \subseteq G$ es abierto, entonces gU es abierto.

Ya que por el Teorema (1.7), la función $x \mapsto gx$ es un automorfismo topológico de G, para todo $g \in G$.

Teorema 2.44 (**Caracterización Grupos Topológicos Fréchet con Conjuntos**)
Sea G un grupo topológico T_0. Entonces, G es de Fréchet si y sólo si para todo $A \in \mathcal{I}_{e_G}^+$ infinito tal que $e_G \notin A$ existe $S \in [A]^\omega$ tal que $S \in \mathcal{I}_{e_G}^\perp$.

Demostración:
Antes, por el Teorema (1.26) se tiene que G es T_1. Probaremos la doble implicación:

$\Rightarrow$): Supongamos que G es de Fréchet, luego, por la Proposición (2.43) dado que $e_G \in G$ se cumple lo deseado.

$\Leftarrow$): Supongamos que para todo $A \in \mathcal{I}_{e_G}^+$ infinito tal que $e_G \notin A$ existe $S \in [A]^\omega$ tal que $S \in \mathcal{I}_{e_G}^\perp$.

Sea $g \in G$ y tomemos $A \in \mathcal{I}_g^+$ infinito tal que $g \notin A$, luego $e_G \notin g^{-1}A$. Afirmamos que $g^{-1}A \in \mathcal{I}_{e_G}^+$. En efecto, tomemos $U \subseteq G$ abierto tal que $e_G \in U$, entonces $g \in gU$. Como $A \in \mathcal{I}_g^+$, se sigue que $g \in \overline{A}$ y, dado que gU es un abierto, se sigue que:

$$\begin{aligned} gU \cap A &\neq \emptyset \\ \Rightarrow U \cap g^{-1}A &\neq \emptyset, \end{aligned}$$

por lo cual $g^{-1}A \in \mathcal{I}_{e_G}^+$. Entonces, como $g^{-1}A$ es infinito ya que A es infinito, se sigue que existe $S_1 \in [g^{-1}A]^\omega$ tal que $S_1 \in \mathcal{I}_{e_G}^\perp$.

Tomemos $S = gS_1$, entonces $S \in [A]^\omega$. Veamos que $S \in \mathcal{I}_g^\perp$. Si $I \in \mathcal{I}_g$, entonces $g \notin \overline{I}$, por lo cual $e_G \notin g^{-1}\overline{I}$, pero, por la Proposición (1.40) inciso *(3)* se tiene que:

$$g^{-1}\overline{I} = \overline{g^{-1}I},$$

por tanto, $e_G \notin \overline{g^{-1}I}$, con lo cual $g^{-1}I \in \mathcal{I}_{e_G}$. Dado que $S_1 \in \mathcal{I}_{e_G}^\perp$, entonces:

$$\left|S_1 \cap g^{-1}I\right| < \infty.$$

Como $|S_1 \cap g^{-1}I| = |gS_1 \cap I|$, se sigue que:

$$|gS_1 \cap I| < \infty,$$

es decir, $|S \cap I| < \infty$. Se sigue así que $S \in \mathcal{I}_g^\perp$. Por la Proposición (2.43) tenemos que el grupo G es de Fréchet. ∎

En esta tesis, nosotros haremos la siguiente definición:

Definición 2.18 (**Espacio de Fréchet en un Punto e Ideal de Fréchet**)
Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que (X, τ) es **de Fréchet en** x si para todo $A \in \mathcal{I}_x^+$ infinito tal que $x \notin A$ existe $S \in [A]^\omega$ tal que $S \in \mathcal{I}_x^\perp$.

En tal caso, decimos que el ideal $\mathcal{I}_x$ **es de Fréchet**.

Como corolario al resultado anterior y usando esta definición tenemos lo siguiente:

Corolario 2.45 (**Caracterización Grupos Topológicos Fréchet con Ideal de Fréchet**)
Sea G un grupo topológico T_0. Entonces, G es de Fréchet si y sólo si G es de Fréchet en e_G, equivalentemente, si el ideal $\mathcal{I}_{e_G}$ es de Fréchet.

Observación 2.46 (**Ideales de Fréchet en la Literatura**)
En la literatura (en particular, en [RG12] y [JTM07]) se define de otra manera un ideal de Fréchet. En estos textos, un ideal $\mathcal{I}$ sobre un conjunto X es de Fréchet si $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\perp\perp}$.

La razón para que la definición se haga diferente en estos textos se debe al siguiente resultado.

Lema 2.47 (**Caracterización Ideales Fréchet Conjuntos Positivos**)
Sean X un conjunto e $\mathcal{I}$ un ideal libre sobre X. Entonces, $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\perp\perp}$ si y solo si para todo $A \in \mathcal{I}^+$ infinito existe $C \in [A]^\omega$ tal que $C \in \mathcal{I}^\perp$.

Demostración:
Probaremos la doble implicación:

$\Rightarrow$): Supongamos que $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\perp\perp}$. Sea $A \in \mathcal{I}^+$ infinito, luego $A \notin \mathcal{I} = \mathcal{I}^{\perp\perp}$, por lo cual existe $B \in \mathcal{I}^\perp$ tal que $A \cap B$ es infinito. Tomemos $C \subseteq A \cap B$ tal que C es numerable. Se tiene que $C \in [A]^\omega$ y, como $\mathcal{I}^\perp$ es ideal sobre X por la Proposición (2.36), se tiene de la definición de ideal que $C \in \mathcal{I}^\perp$, ya que $C \subseteq B$ y $B \in \mathcal{I}^\perp$.

$\Leftarrow$): Supongamos que para todo $A \in \mathcal{I}^+$ infinito existe $C \in [A]^\omega$ tal que $C \in \mathcal{I}^\perp$. Por la Proposición (2.35) se tiene que:

$$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\perp\perp}. \tag{2.10}$$

Veamos la otra contención. Sea $A \in \mathcal{I}^{\perp\perp}$. Se tienen dos casos:

- A es finito. Como $\mathcal{I}$ es libre se sigue del Corolario (2.23) que $\mathsf{Fin}\,(X) \subseteq \mathcal{I}$, por lo cual $A \in \mathcal{I}$.
- A es infinito: Supongamos que $A \notin \mathcal{I}$, luego $A \in \mathcal{I}^+$. Por hipótesis existe $C \in [A]^\omega$ tal que $C \in \mathcal{I}^\perp$, por lo cual $A \cap C$ es un conjunto numerable, con $A \in \mathcal{I}^{\perp\perp}$ y $C \in \mathcal{I}^\perp$, lo cual es una contradicción$\#_c$. Por tanto, $A \in \mathcal{I}$.

De los dos incisos anteriores tenemos que $A \in \mathcal{I}$, por tanto:

$$\mathcal{I}^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{I}. \tag{2.11}$$

De las contenciones (2.10) y (2.11) se sigue que $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\perp\perp}$. ■

El problema es que en este resultado pedimos que el ideal $\mathcal{I}$ sea libre y, en general, en espacios topológicos el ideal $\mathcal{I}_x$ no es libre y, por tanto, la caracterización anterior no se cumple. Esto se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.48 (**Espacio con Puntos Aislados y el Ideal $\mathcal{I}_x$**)
Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$ un punto aislado, luego el conjunto $\{x\} \subseteq X$ es abierto. Observemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_x &= \left\{A \subseteq X \,\middle|\, x \notin \overline{A}\right\} \\ &= \left\{A \subseteq X \,\middle|\, x \notin A\right\},\end{aligned}$$

pues, dado que x es aislado se cumple que $x \notin A$ si y solo si $\{x\} \cap A = \emptyset$ lo cual ocurre si y solo si

$x \notin \overline{A}$, para todo $A \subseteq X$. Ahora, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_x^{\perp} &= \left\{ B \subseteq X \middle| |B \cap A| < \infty, \text{ para todo } A \in \mathcal{I}_x \right\} \\ &= \mathsf{Fin}\,(X)\,. \end{aligned}$$

La igualdad se tiene pues, en particular $X \setminus \{x\} \in \mathcal{I}_x$, luego, si $B \in \mathcal{I}_x^{\perp}$ se debe tener que:

$$|B \cap (X \setminus \{x\})| < \infty,$$

lo cual implica que $|B \cap X| < \infty$. Por tanto, B debe ser un conjunto finito. Finalmente, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_x^{\perp\perp} &= \left\{ C \subseteq X \middle| |C \cap B| < \infty, \text{ para todo } A \in \mathcal{I}_x^{\perp} \right\} \\ &= \left\{ C \subseteq X \middle| |C \cap B| < \infty, \quad \forall B \in \mathsf{Fin}\,(X) \right\} \\ &= \mathcal{P}\,(X)\,. \end{aligned}$$

Por lo cual, $\mathcal{I}_x^{\perp\perp} \nsubseteq \mathcal{I}_x$. Así que, puede que (X, τ) sea de Fréchet, pero no se cumple que $\mathcal{I}_x = \mathcal{I}_x^{\perp\perp}$ dado que x es punto aislado.

De hecho, todo espacio topológico discreto es de Fréchet, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.49 (**Todo Espacio Topológico Discreto es Fréchet**)
Sea (X, τ) un espacio topológico discreto. Entonces, (X, τ) es de Fréchet. En efecto, sea $A \subseteq X$ no vacío y $x \in \overline{A}$, entonces, como (X, τ) es discreto, se sigue que el conjunto $\{x\} \subseteq X$ es abierto, luego $\{x\} \cap A \neq \emptyset$, pues $x \in \overline{A}$, se sigue así que $x \in A$.

Así que, $x \in \overline{A}$ si y sólo si $x \in A$. Tomando la sucesión de valor constante $(x)_{n=1}^{\infty}$ se sigue que (X, τ) es de Fréchet.

Incluso dejando de lado que el punto sea o no aislado, no siempre se cumple que $\mathcal{I}_x^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{I}_x$:

Ejemplo 2.50
Consideremos el espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_{\text{cof}})$, donde τ_{cof} es la topología de los complementos finitos, es decir:

$$A \in \tau_{\text{cof}} \text{ si y solo si } |\mathbb{N} \setminus A| < \infty.$$

El espacio $(\mathbb{N}, \tau_{\text{cof}})$ es T_1, pues $\{n\}$ es cerrado, para todo $n \in \mathbb{N}$. Este espacio es de Fréchet por ser primero numerable. Además, no tiene puntos aislados. En este espacio se cumple que:

$$\overline{A} = \begin{cases} \mathbb{N} & \text{si} \quad A \text{ es infinito} \\ A & \text{si} \quad A \text{ es finito} \end{cases}, \quad \forall A \subseteq \mathbb{N}.$$

Ahora, sea $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_n &= \left\{ A \subseteq \mathbb{N} \middle| n \notin \overline{A} \right\} \\ &= \left\{ A \subseteq \mathbb{N} \middle| A \text{ es finito y } n \notin A \right\} \\ &= \mathsf{Fin}\left(\mathbb{N} \setminus \{n\}\right),\end{aligned}$$

por lo cual:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_n^{\perp} &= \left\{ B \subseteq \mathbb{N} \middle| |B \cap A| < \infty, \quad \forall A \in \mathcal{I}_n \right\} \\ &= \left\{ B \subseteq \mathbb{N} \middle| |B \cap A| < \infty, \quad \forall A \in \mathsf{Fin}\left(\mathbb{N} \setminus \{n\}\right) \right\} \\ &= \mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right),\end{aligned}$$

y, finalmente:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_n^{\perp\perp} &= \left\{ C \subseteq \mathbb{N} \middle| |C \cap B| < \infty, \quad \forall B \in \mathcal{I}_n^{\perp} \right\} \\ &= \left\{ C \subseteq \mathbb{N} \middle| |C \cap B| < \infty, \quad \forall B \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right) \right\} \\ &= \mathsf{Fin}\left(\mathbb{N}\right).\end{aligned}$$

Por lo cual, $\mathcal{I}_n^{\perp\perp} \nsubseteq \mathcal{I}_n$.

Capítulo 3

Ordinales, Cardinales y ω

Nuestro primer objetivo en este capítulo será la construcción de los números ordinales, así como probar algunas propiedades básicas sobre ellos. Una vez hecho esto, hablaremos sobre cardinales y, al igual que con los ordinales, probaremos algunas propiedades de los mismos con el objetivo de enunciar y probar el Lema de Fodor, el cual nos servirá para el siguiente capítulo. Para terminar, mostraremos la existencia y las propiedades de los cardinales $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{b}$, construidos a partir de ω, y su relación con ω_1 y $\mathfrak{c}$.

§3.1 Ordinales

Antes de empezar este capítulo, recordemos los axiomas con los que estaremos trabajando:

Definición 3.1 (Axiomas de ZFC)
El **Lenguaje de la Teoría de Conjuntos** $\mathcal{L}_{TC} = \{\in\}$ consta de una relación binaria entre variables que denominamos **conjuntos**. Si $x \in y$ decimos que x **es elemento de** y o que y **contiene a** x.

Tenemos los siguientes axiomas en $\mathcal{L}_{TC}$:

(A1) **Existencia**: Existe un conjunto que no tiene elementos denotado por $\emptyset$.

(A2) **Extensionalidad**: Si todo elemento de X es elemento de Y y todo elemento de Y es elemento de X, entonces $X = Y$.

(A3) **Comprensión/Separación**: Sea $\boldsymbol{P}(x)$ una propiedad de x. Para cualquier conjunto X existe un conjunto Y tal que $x \in Y$ si y solo si $x \in X$ y $\boldsymbol{P}(x)$. Es decir que existe el conjunto:

$$Y = \left\{ x \in X \middle| \boldsymbol{P}(x) \right\}.$$

(A4) **Par**: Para todo par X, Y de conjuntos existe un conjunto Z tal que $x \in Z$ si y solo si $x = X$ o $x = Y$. Es decir que existe el conjunto:

$$Z = \{X, Y\}.$$

(A5) **Unión**: Para todo conjunto X existe un conjunto U tal que $x \in U$ si y solo si $x \in Y$ para algún $Y \in X$. Es decir que existe el conjunto:

$$U = \bigcup_{Y \in X} Y.$$

(A6) **Potencia**: Para todo conjunto X existe un conjunto P tal que $A \in P$ si y solo si $A \subseteq X$. Es decir que existe el conjunto:

$$P = \mathcal{P}(X).$$

(A7) **Infinitud**: Existe un conjunto X tal que:

- $\emptyset \in X$.
- Para todo $x \in X$, $x \cup \{x\} \in X$.

(A8) **Fundación/Regularidad**: Para todo conjunto X no vacío existe $Y \in X$ tal que $x \in X$ implica que $x \notin Y$.

(A9) **Reemplazo**: Para cada propiedad $\boldsymbol{P}(x, y)$ de x y y tal que para todo x existe un único y para el cual $\boldsymbol{P}(x, y)$ se satisface se tiene lo siguiente:

- Para todo conjunto A existe un conjunto B tal que para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $\boldsymbol{P}(a, b)$.

(A10) **Elección**: Para todo conjunto X de conjuntos no vacíos, existe una función $f : X \to \bigcup X$ tal que para todo $x \in X$, se cumple que $f(x) \in x$.

Con estos axiomas se pueden construir y probar propiedades básicas de conjuntos (la relación de contención $\subseteq$, funciones, relaciones, etc...). Todas estas las daremos por hechas e iremos directamente a la construcción de los ordinales. Recordemos el Axioma de Infinitud: existe un conjunto X tal que:

- $\emptyset \in X$.
- Para todo $x \in X$, $x \cup \{x\} \in X$.

En tal caso, X cumpliría que:

$$\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\} \subseteq X$$

Definición 3.2 (**Conjunto Inductivo**)
Decimos que un conjunto A es **inductivo** si $\emptyset \in A$ y para todo $a \in A$ se tiene que $a \cup \{a\} \in A$.

Se tiene de forma inmediata que el conjunto X cumple lo siguiente:

Corolario 3.1
El conjunto X del Axioma de Infinitud es un conjunto inductivo.

Definición 3.3 (**El Conjunto** ω)
Sea X un conjunto inductivo. Se define:

$$\omega = \left\{ x \in X \middle| \text{para todo } Y \text{ conjunto inductivo se tiene que } x \in Y \right\}$$

Este conjunto cumple una propiedad muy importante:

Lema 3.2 (ω **es Inductivo**)
El conjunto ω es inductivo.

Demostración:
Se tiene lo siguiente:

- $\emptyset \in \omega$, ya que $\emptyset \in Y$ para todo Y conjunto inductivo.
- Si $a \in \omega$ entonces $a \in Y$ para todo Y conjunto inductivo, se sigue por lo mismo que $a \cup \{a\} \in Y$ para todo Y conjunto inductivo, por tanto $a \cup \{a\} \in \omega$.

De los dos incisos anteriores se sigue que ω es inductivo. ■

Observación 3.3 (ω **es el Mínimo Conjunto Inductivo**)
Del Lema (3.2) y de la definición de ω se tiene que este es el mínimo conjunto inductivo.

Una propiedad importante de ω es la siguiente:

Teorema 3.4 (**Teorema de Inducción**)
Para todo $A \subseteq \omega$ si $x \in A$ y, $\forall\, x \in A$ implica que $x \cup \{x\} \in A$, entonces $A = \omega$.

Demostración:
Sea $A \subseteq \omega$ tal que cumple lo anterior. Se tiene que A es inductivo pues:

- $\emptyset \in A$.
- Sea $a \in A$, entonces, por hipótesis $a \cup \{a\} \in A$.

De la definición se sigue que A es inductivo, luego por la Observación (3.3) se sigue que $\omega \subseteq A$, pero $A \subseteq \omega$ por hipótesis, así que $A = \omega$. ■

Ya se sabe que es posible construir a los números naturales junto con el cero (con las operaciones de suma y producto) a partir de los conjuntos inductivos. Por lo que de ahora en adelante para este capítulo y el siguiente convendremos en que:

$$\mathbb{N} = \omega \setminus \{\emptyset\}$$

Para continuar con nuestro estudio de ω introduciremos la siguiente definición:

Definición 3.4
Definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{c|c} \ulcorner 0 \urcorner & \emptyset \\ \ulcorner 1 \urcorner & \{\emptyset\} \\ \vdots & \vdots \\ \ulcorner n \urcorner & \{\ulcorner 0 \urcorner, \ulcorner 1 \urcorner, \dots, \ulcorner n-1 \urcorner\} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

En lógica de primer orden no es posible caracterizar totalmente al conjunto inductivo ω, pues puede haber diversos modelos de ZFC que produzcan diferentes conjuntos inductivos ω. En este texto convendremos en que:

$$\omega = \{\ulcorner 0 \urcorner, \ulcorner 1 \urcorner, \dots, \ulcorner n \urcorner, \dots\}.$$

La razón de tal convención es para poder usar este conjunto como un representante de lo que nosotros entendemos como los números naturales junto con el cero en aritmética. De ahora en adelante denotaremos por n al conjunto $\ulcorner n \urcorner$, para todo $\ulcorner n \urcorner \in \omega$.

Definición 3.5 (**Conjunto Transitivo**)
Decimos que un conjunto X es **transitivo** si para todo $Y \in X$, Y es un subconjunto de X, es decir:

$$Y \in X \Rightarrow Y \subseteq X.$$

Ejemplo 3.5
Los conjuntos $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ son transitivos.

Proposición 3.6 (**Caracterizaciones de los Conjuntos Transitivos**)
Sea X un conjunto. Los siguientes son equivalentes:

(1) X es transitivo.

(2) $Z \in Y \in X$ implica que $Z \in X$.

(3) $X \subseteq \mathcal{P}(X)$.

(4) $\bigcup_{Y \in X} Y \subseteq X$.

Demostración:
(1) $\Rightarrow$ *(2)*: Supongamos que X es transitivo. Si $Z \in Y \in X$, en particular $Y \in X$, luego por ser X transitivo se tiene que $Y \subseteq X$, con lo cual $Z \in X$.

(2) $\Rightarrow$ *(3)*: Supongamos que $Z \in Y \in X$ implica que $Z \in X$. Si $Y \in X$ entonces:

$$Z \in Y \Rightarrow Z \in X,$$

por lo que $Y \subseteq X$, así que $Y \in \mathcal{P}(X)$. Se sigue así que $X \subseteq \mathcal{P}(X)$.

(3) $\Rightarrow$ *(4)*: Supongamos que $X \subseteq \mathcal{P}(X)$. Veamos que:

$$\bigcup_{Y \in X} Y \subseteq X.$$

En efecto, si $Z \in \bigcup_{Y \in X} Y$, entonces $Z \in Y$ para algún $Y \in X$, como $X \subseteq \mathcal{P}(X)$ entonces $Y \in \mathcal{P}(X)$, luego Y es un subconjunto de X, así que $Z \in X$. Se sigue de esta forma la contención.

(4) $\Rightarrow$ *(1)*: Supongamos que $\bigcup_{Y \in X} Y \subseteq X$. Si $Y \in X$ entonces de forma inmediata se tiene que $Y \subseteq X$. Por tanto, X es transitivo. ■

Lema 3.7 (Unión e Intersección de Familia de Conjuntos Transitivos es Transitiva)
Sea X conjunto tal que para todo $Y \in X$ se tiene que Y es transitivo, entonces $\bigcup_{Y \in X} Y$ y $\bigcap_{Y \in X} Y$ son transitivos.

Demostración:
Sea X tal que todos sus elementos son transitivos. Si $A \in B \in \bigcup_{Y \in X} Y$ entonces existe $Y \in X$ tal que $B \in Y$. Por ser Y transitivo y como $A \in B \in Y$, de la Proposición (3.6) se sigue que $A \in Y$, luego $A \in \bigcup_{Y \in X} Y$. Nuevamente de la proposición antes mencionada se sigue que $\bigcup_{Y \in X} Y$ es transitivo.

Para probar que $\bigcap_{Y \in X} Y$ es transitivo se procede de forma análoga a lo hecho anteriormente. ■

Proposición 3.8
$\emptyset$, ω y n, para todo $n \in \omega$ son transitivos.

Demostración:
Veamos uno por uno:

- Como $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(\emptyset)$ se sigue de la Proposición (3.6) que $\emptyset$ es transitivo.
- Sea $n \in \omega$, veamos que:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{m \in n} m &= \bigcup_{m \in n} \{0, 1, \dots, m-1\} \\
&= \bigcup_{m \in n \setminus \{0\}} \{m-1\} \\
&= \{0, 1, \dots, m-2\} \\
&\subseteq \{0, 1, \dots, m-1\} \\
&= n,
\end{aligned}$$

  nuevamente, de la Proposición (3.6) se sigue que n es transitivo.
- Veamos que:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n \in \omega} n &= \bigcup_{n \in \omega \setminus \{0\}} \{0, 1, \dots, n-1\} \\
&= \bigcup_{n \in \omega \setminus \{0\}} \{n-1\} \\
&= \bigcup_{n \in \omega} \{n\} \\
&= \omega,
\end{aligned}$$

  nuevamente, de la Proposición (3.6) se sigue que ω es transitivo.

■

Para continuar, recordemos dos tipos de ordenes:

Definición 3.6 (**Orden Total**)
Sea X un conjunto. Un **orden total para** X es una relación $\preceq$ en el conjunto X que cumple lo siguiente:

(1) (**Reflexiva**): Para todo $a \in X$, $a \preceq a$.

(2) (**Antisimétrica**): Para todo $a, b \in X$, $a \preceq b$ y $b \preceq a$ implica que $a = b$.

(3) (**Transitiva**): Para todo $a, b, c \in X$, $a \preceq b$ y $b \preceq c$ implica $a \preceq c$.

(4) Si $a, b \in X$, entonces se cumple alguna de las siguientes: $a \preceq b$ o $b \preceq a$.

En tal caso decimos que X **es totalmente ordenado por** $\prec$.

Ejemplo 3.9
Los números reales $\mathbb{R}$ están totalmente ordenados por la relación *menor o igual*, $\leqslant$.

Definición 3.7 (**Orden Total Estricto**)
Sea X un conjunto. Un **orden total estricto para** X es una relación $\prec$ en el conjunto X que cumple lo siguiente:

(1) (**Irreflexiva**): Para todo $a \in X$, $a \not\prec a$.

(2) (**Asimétrica**): Para todo $a, b \in X$, $a \prec b$ implica que $b \not\prec a$.

(3) (**Transitiva**): Para todo $a, b, c \in X$, $a \prec b$ y $b \prec c$ implica $a \prec c$.

(4) (**Totalidad**): Si $a, b \in X$, entonces se cumple una y solo una de las siguientes: $a \prec b$, $b \prec a$ o $a = b$.

En tal caso se dice que X **es totalmente ordenado de forma estricta por** $\prec$.

Ejemplo 3.10
Los números reales $\mathbb{R}$ con la relación *menor que*, $<$ son estrictamente ordenados por esta.

Con todo esto, ya estamos en condiciones de dar la definición de ordinal:

Definición 3.8 (**Ordinal**)
Un **número ordinal** o simplemente **ordinal** es un conjunto transitivo y totalmente ordenado de forma estricta por $\in$.

Observación 3.11
Se tiene que α es un ordinal si y solo si se cumple lo siguiente:

- α es transitivo.
- (**Irreflexividad**): Para todo $\beta \in \alpha$, $\beta \notin \beta$.

- (**Asimetría**): Para todo $\beta, \gamma \in \alpha$, $\beta \in \gamma$ impica que $\gamma \notin \beta$.
- (**Transitividad**): Para todo $\beta, \gamma, \epsilon \in \alpha$, $\beta \in \gamma$ y $\gamma \in \epsilon$ implican $\beta \in \epsilon$.
- Para todo $\beta, \gamma \in \alpha$ se cumple una y solo una de las siguientes: $\beta \in \gamma$, $\beta = \gamma$ o $\gamma \in \beta$.

Ejemplo 3.12 (**$\emptyset$ es Ordinal**)
$\emptyset$ es ordinal por ser transitivo y estar totalmente ordenado de forma estricta por $\in$, ya que lo es por vacuidad.

Definición 3.9 (**Buen Orden**)
Un conjunto X es **bien ordenado** si es no vacío, totalmente ordenado y todo subconjunto no vacío $Y \subseteq X$ tiene elemento mínimo bajo la relación del orden total.

Resulta que los ordinales cumplen que están bien ordeandos, como lo muestra el siguiente resultado. Esta propiedad los caracteriza totalmente, como se muestra en el Anexo B.

Lema 3.13 (**Ordinales son Bien Ordenados**)
Si α es ordinal diferente de $\emptyset$, entonces α es bien ordenado por $\in$.

Demostración:
Sea α ordinal y $x \subseteq \alpha$ no vacío. Por el Axioma de Fundación existe $\beta \in x$ tal que $x \cap \beta = \emptyset$. Sea $\gamma \in x$. Afirmamos que $\beta = \gamma$ o $\beta \in \gamma$.

En efecto, tenemos tres casos, ya que α es totalmente ordenado: $\beta \in \gamma$ o $\beta = \gamma$ o $\gamma \in \beta$.

Si $\gamma \in \beta$, como $\gamma \in x$ se seguiría que $\gamma \in x \cap \beta = \emptyset$, lo cual es una contradicción$\#_c$. Por tanto, debe suceder que $\beta = \gamma$ o $\beta \in \gamma$.

Así que x tiene como elemento mínimo a β. ■

Para seguir enunciando propiedades de los ordinales debemos probar los siguientes lemas:

Lema 3.14
No existen x, y, z conjuntos tales que $x \in y \in z \in x$.

Demostración:
Sean x, y, z conjuntos. Consideremos el conjunto $\{x, y, z\}$. Por el Axioma de Fundación debe existir $a \in \{x, y, z\}$ tal que $a \cap \{x, y, z\} = \emptyset$, es decir que:

$$x \notin a, \quad y \notin a \quad \text{y} \quad z \notin a$$

Como $a \in \{x, y, z\}$, se tienen tres casos: $a = x$ o $a = y$ o $a = z$. Si $a = x$, entonces $z \notin x$, si $a = y$ entonces $x \notin y$ y, si $a = z$, entonces $y \notin z$. En cualquier caso tenemos que no puede suceder que $x \in y \in z \in x$. ■

Lema 3.15
Sea x conjunto, entonces $x \notin x$.

Demostración:
Supongamos que $x \in x$, entonces por el Axioma del Par existe el conjunto $\{x\}$, en particular $x \in \{x\}$. Dado que $x \in x$ se sigue que:

$$x \in x \cap \{x\} \tag{3.1}$$

Ahora, por el Axioma de Fundación existe $y \in \{x\}$ tal que $y \cap \{x\} = \emptyset$. Como $y \in \{x\}$, entonces $y = x$, así que $x \cap \{x\} = \emptyset$, pero por (3.1) se tiene que $x \cap \{x\} \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción$\#_c$. Por ende $x \notin x$. ■

Teorema 3.16 (**Propiedades de los Ordinales**)
Se cumple lo siguiente:

(1) Si α es ordinal y $x \in \alpha$, entonces x es ordinal.

(2) Si α es número ordinal, entonces $\alpha \notin \alpha$.

(3) Si α, β, γ son ordinales, entonces $\alpha \in \beta$ y $\beta \in \gamma$ implica que $\alpha \in \gamma$.

(4) Para cualesquiera α, β ordinales se cumple una y solo una de las siguientes: $\alpha \in \beta$ o $\alpha = \beta$ o $\beta \in \alpha$.

Demostración:
De *(1)*: Sea α un ordinal y $x \in \alpha$. Veamos que x es transitivo y es totalmente ordenado de manera estricta por $\in$:

- **Es Transitivo**. Si $z \in y \in x$, como α es ordinal entonces por ser transitivo se tiene que $y \in \alpha$ por la Proposición (3.6), lo cual nuevamente implica por esta proposición que $z \in \alpha$. Por tanto, $x, y, z \in \alpha$. Al ser $\in$ un orden total en α, se sigue que $z \in x$, $z = x$ o $x \in z$.

    - Si $z = x$ se seguiría que $x \in y \in x$. Por el Axioma de Fundación, existiría $a \in \{x, y\}$ tal que $a \cap \{x, y\} = \emptyset$. No puede ser que $a = x$, ya que en tal caso se tendría que $y \in a \cap \{x, y\}$, pues $y \in x$. Tampoco puede suceder que $a = y$, porque en tal caso se seguiría que $x \in a \cap \{x, y\}$, pues $x \in y$. En ambos casos se tiene que $a \in \{x, y\}$ y, $a \neq x$ y $a \neq y$, lo cual es una contradicción$\#_c$. Por tanto, $z \neq x$.
    - Si $x \in z$ se tendría que:
    $$x \in z \in y \in x,$$
    lo cual contradice el Lema (3.14)$\#_c$. Por tanto, $x \notin z$.

  De los dos incisos se sigue que $z \in x$. En consecuencia, x es transitivo por la Proposición (3.6).

- **Totalmente Ordenado de Forma Estricta**. Como $x \in \alpha$, al ser α transitivo por definición se sigue que $x \subseteq \alpha$, por lo cual como $\in$ es un orden total en α se sigue que también lo es en x.

Por los dos incisos anteriores se sigue que x es un número ordinal.

De *(2)*: Sea α un ordinal, en particular α es un conjunto, luego por el Lema (3.15) suceder que $\alpha \notin \alpha$.

De *(3)*: Sean α, β, γ números ordinales tales que $\alpha \in \beta$ y $\beta \in \gamma$, como γ en particular es un conjunto transitivo se sigue de la Proposición (3.6) que $\alpha \in \gamma$.

De *(4)*: Sean α, β ordinales. Tomemos $\gamma = \alpha \cap \beta$, se tiene que γ es un número ordinal, pues es transitivo por el Lema (3.7) y hereda el orden total estricto bajo la relación $\in$ de α.

Afirmamos que si $\gamma \neq \alpha$, entonces $\gamma \in \alpha$. Supongamos que $\gamma \neq \alpha$, como $\gamma = \alpha \cap \beta$, entonces $\gamma \subsetneq \alpha$, así que $\alpha \setminus \gamma$ es un subconjunto de α no vacío. Por el Lema (3.13) este elemento tiene elemento mínimo, digamos:

$$\delta = \min_{\in}(\alpha \setminus \gamma) \in \alpha \setminus \gamma.$$

Probaremos que $\delta = \gamma$.

- Sea $\xi \in \delta$, entonces por minimalidad de δ debe suceder que $\xi \notin \alpha \setminus \gamma$, por ende $\xi \in \gamma$. Se sigue así que $\delta \subseteq \gamma$.
- Sea $\xi \in \gamma$. Por la linealidad de $\in$ tenemos tres casos: $\xi \in \delta$ o $\xi = \delta$ o $\delta \in \xi$. Si:
  - $\xi = \delta$, esto implica que $\delta = \xi \in \gamma \cap (\alpha \setminus \gamma) = \emptyset \#_c$. Por tanto, esto no puede suceder.
  - $\delta \in \xi$, en cuyo caso se sigue que $\delta \in \xi \in \gamma$, al ser γ ordinal se tiene que $\delta \in \gamma$, luego $\delta \in \gamma \cap (\alpha \setminus \gamma) \#_c$. Por tanto, esto no puede suceder.

  Por lo que $\xi \in \delta$, luego $\gamma \subseteq \delta$.

De los dos incisos anteriores se sigue que $\delta = \gamma$, en particular:

$$\gamma = \delta \in \alpha \setminus \gamma \subseteq \alpha,$$

es decir, $\gamma \in \alpha$. De forma análoga se prueba que si $\gamma \neq \beta$ entonces $\gamma \in \beta$.

En conclusión, si $\gamma \neq \alpha$ y $\gamma \neq \beta$, entonces $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma \#_c$. En consecuencia, $\gamma = \alpha$ o bien $\gamma = \beta$, es decir que

- $\beta = \gamma \in \alpha$, si $\gamma \neq \alpha$ y $\gamma = \beta$, o bien
- $\alpha = \gamma \in \beta$, si $\gamma \neq \beta$ y $\gamma = \alpha$, o bien
- $\alpha = \gamma = \beta$, si $\gamma = \alpha$ y $\gamma = \beta$,

lo cual prueba el resultado. ■

Como corolario tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.17 (**Paradoja de Burali-Forti**)
No existe un conjunto X que contenga a todos los ordinales.

Demostración:
Supongamos que tal conjunto X existe, entonces existiría el conjunto:

$$\Omega = \left\{ x \in X \middle| x \text{ es ordinal} \right\},$$

por el Axioma Comprensión. Este conjunto sería un ordinal, ya que es transitivo por el Teorema (3.16) inciso *(3)*, y es bien ordenado por los restantes incisos del teorema antes mencionado y la Observación (3.11). Luego $\Omega \in \Omega$, lo cual contradice el Lema (3.15)$\#_c$. Así que X no puede ser un conjunto.

■

El teorema anterior nos ayuda, ya que nos proporciona un resultado útil para poder probar más propiedades sobre ordinales:

Proposición 3.18 (**Conjuntos de Ordinales son Totalmente Ordenados Estrictamente**)
Sea X un conjunto tal que para todo $\alpha \in X$ se tiene que α es un ordinal. Entonces X es totalmente ordenado de forma estricta por $\in$.

Demostración:
Si $X = \emptyset$ se tiene de forma inmediata que X es ordinal, en particular es totalmente ordenado de forma estricta por $\in$. Supongamos que $X \neq \emptyset$, veamos que:

(1) Sea $\alpha \in X$, entonces como α es ordinal se sigue por ser conjunto que $\alpha \notin \alpha$.

(2) Sean $\alpha, \beta \in X$ tales que $\alpha \in \beta$. Por el Teorema (3.16) inciso *(4)* como α y β son ordinales sigue que $\beta \notin \alpha$.

(3) Sean $\alpha, \beta, \gamma \in X$ tales que $\alpha \in \beta$ y $\beta \in \gamma$. Por el teorema mencionado anteriormente inciso *(3)* al ser los tres ordinales se sigue que $\alpha \in \gamma$.

(4) Sean $\alpha, \beta \in X$, nuevamente por el teorema mencionado anteriormente inciso *(4)* se tiene por ser ambos ordinales que se cumple una y solo una de las siguientes: $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$ o $\beta \in \alpha$.

Por los incisos *(1)* a *(4)* se sigue que X es totalmente ordenado de manera estricta por $\in$. ■

Definición 3.10 (**Relaciones $<$ y $\leqslant$**)
Sean α, β ordinales. Decimos que α **es menor a** β y lo denotamos por $\alpha < \beta$, si $\alpha \in \beta$. Además, decimos que α **es menor o igual a** β y lo denotamos por $\alpha \leqslant \beta$, si $\alpha < \beta$ o $\alpha = \beta$.

Observación 3.19
Del Teorema (3.11) se sigue que $<$ es una relación, restringida a algún ordinal α, que hace de α un conjunto totalmente ordenado de forma estricta y bien ordenado.

Proposición 3.20
Sean α, β ordinales. Entonces:
$$\alpha \leqslant \beta \text{ si y solo si } \alpha \subseteq \beta.$$

Demostración:
Probaremos la doble implicación:

$\Rightarrow$): Si $\alpha \leqslant \beta$, entonces $\alpha < \beta$ o $\alpha = \beta$, es decir que $\alpha \in \beta$ o $\alpha = \beta$. Como β es transitivo se sigue que $\alpha \subseteq \beta$ o $\beta = \alpha$, es decir que $\alpha \subseteq \beta$.

$\Leftarrow$): Si $\alpha \subseteq \beta$ por ser α y β ordinales se tienen tres casos:

- $\alpha \in \beta$, en cuyo caso se sigue que $\alpha < \beta$ lo cual implica que $\alpha \leqslant \beta$.
- $\alpha = \beta$, lo cual implica que $\alpha \leqslant \beta$.
- $\beta \in \alpha$, lo cual implica dado que $\alpha \subseteq \beta$ que $\beta \in \beta$, lo cual contradice el Lema (3.15)$\#_c$. Por ende no puede suceder que $\beta \in \alpha$.

Por tanto, se tiene que $\alpha < \beta$ o $\alpha = b$, es decir que $\alpha \leqslant \beta$. ■

Nuestro objetivo ahora será construir ordinales más grandes a partir de ordinales que ya tenemos. Esto lo hacemos con la siguiente definición:

Definición 3.11 (**Sucesor de un Ordinal**)
Si α es ordinal se define el **sucesor de** α por $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Teorema 3.21 (**Propiedades del Sucesor de un Ordinal**)
Dado un ordinal α se cumple lo siguiente:

(1) $S(\alpha)$ es ordinal.

(2) $\alpha < S(\alpha)$.

(3) No existe un ordinal β tal que $\alpha < \beta < S(\alpha)$.

Demostración:
De *(1)*: Veamos que $S(\alpha)$ es transitivo y es totalmente ordenado de forma estricta por $\in$:

- **Transitividad**. Sea $\beta \in S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$, se tienen dos casos:
  - $\beta \in \alpha$, como α es ordinal, entonces $\beta \subseteq \alpha$, luego $\beta \subseteq \alpha \cup \{\alpha\} = S(\alpha)$.
  - $\beta \in \{\alpha\}$, en cuyo caso se sigue que $\beta = \alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\} = S(\alpha)$.

  Por ambos incisos se sigue que $\beta \subseteq S(\alpha)$. Por tanto, $S(\alpha)$ es transitivo.
- **Totalmente Ordenado de Forma Estricta**. Notemos que todos los elementos de $S(\alpha)$ son ordinales. De la Proposición (3.18) se sigue que $S(\alpha)$ es ordenado de forma estricta por $\in$.

Por los dos incisos anteriores se tiene que $S(\alpha)$ es ordinal.
De *(2)*: Como $\alpha \in S(\alpha)$ entonces $\alpha < S(\alpha)$.
De *(3)*: Sea β un ordinal. Por tricotomía se tienen tres casos:

- $\beta < \alpha$, es decir que $\beta \in \alpha$. Por el inciso *(2)* $\alpha < S(\alpha)$, luego $\beta < \alpha < S(\alpha)$.
- $\beta = \alpha$, nuevamente del inciso *(2)* se sigue que $\beta = \alpha < S(\alpha)$.
- $\alpha < \beta$, se tiene que $\alpha \in \beta$. Como β es ordinal, en particular es transitivo, luego $\alpha \subseteq \beta$. Por tanto:
$$\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta,$$
esto es que $S(\alpha) \subseteq \beta$, por la Proposición (3.20) se sigue que $S(\alpha) \leqslant \beta$. Por tanto, $\alpha < S(\alpha) \leqslant \beta$.

Por los tres incisos anteriores se sigue que no existe β ordinal tal que $\alpha < \beta < S(\alpha)$. ■

Corolario 3.22
Sean α y β ordinales tales que $\alpha < \beta$, entonces $S(\alpha) \leqslant \beta$.

Demostración:
Supongamos que $\beta < S(\alpha)$, se tiene así que:
$$\alpha < \beta < S(\alpha),$$
lo cual es una contradicción del inciso *(3)* del Teorema (3.21)$\#_c$. En consecuencia, $S(\alpha) \leqslant \beta$. ■

Ejemplo 3.23 (**Elementos de ω y ω son ordinales**)
Sea:

$$A = \left\{ n < \omega \middle| n \text{ es ordinal} \right\}.$$

Se tiene que $\emptyset = 0 \in A$. Ahora, si $n \in A$, entonces n es ordinal, luego $S(n) = n \cup \{n\}$ es ordinal por el Teorema (3.21) inciso *(1)*, con lo que $S(n) \in A$. Se sigue así por el Teorema (3.4) que $A = \omega$.

Por tanto, todo elemento de ω es ordinal. Ahora, ω es un conjunto transitivo y es totalmente ordenado de manera estricta por $\in$ por el Teorema (3.16), ya que todos los elementos de ω son ordinales. Se sigue así que ω también es ordinal.

Teorema 3.24
Sea X un conjunto tal que para todo $\alpha \in X$ se tiene que α es un ordinal. Entonces:

(1) $\bigcup_{\alpha \in X} \alpha$ es un ordinal que además es el supremo de X.

(2) Si $X \neq \emptyset$, entonces $\bigcap_{\alpha \in X} \alpha$ es un ordinal el cual es el mínimo de X.

Demostración:
De *(1)*: Sea:

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in X} \alpha.$$

Este conjunto es transitivo por el Lema (3.7). Además, todos los elementos de γ son ordinales, ya que todos los α son ordinales, para todo $\alpha \in \gamma$. Por lo que de la Proposición (3.18) se sigue que está totalmente ordenado de manera estricta por $\in$. Así que γ es ordinal.

Veamos que γ es el supremo de X. Sea $\alpha \in X$, entonces por como está dado γ se tiene que $\alpha \subseteq \gamma$, luego de la Proposición (3.20) se sigue que $\alpha \leqslant \gamma$. Esto es que γ es cota superior de X.

Si ϵ es otro ordinal tal que $\alpha \leqslant \epsilon$ para todo $\alpha \in X$ se sigue por la proposición mencionada anteriormente que $\alpha \subseteq \epsilon$ para todo $\alpha \in X$, así que:

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in X} \alpha \subseteq \epsilon,$$

es decir que $\gamma \leqslant \epsilon$. Se sigue así que γ es el supremo de X.

De *(2)*: Sea:

$$\epsilon = \bigcap_{\alpha \in X} \alpha.$$

Procediendo de manera análoga al igual que como se procedió con γ en el inciso *(1)*, se tiene que ϵ es un ordinal el cuál es el ínfimo de X. Para ver que es el mínimo basta con probar que $\epsilon \in X$.

Al ser ϵ el ínfimo de X se cumple que:

$$\epsilon \leqslant \alpha, \quad \forall \alpha \in X.$$

Si $\epsilon < \alpha$ para todo $\alpha \in X$ se seguiría por el Corolario (3.22) que $S(\epsilon) \leqslant \alpha$ para todo $\alpha \in X$, luego $S(\epsilon)$ es una cota inferior de X tal que $\epsilon < S(\epsilon)$, lo cual contradice el hecho de que ϵ es el ínfimo de $X\#_c$. Por tanto, debe existir $\alpha_0 \in X$ tal que $\epsilon = \alpha_0$, se sigue así que $\epsilon \in X$. ■

§3.2 Inducción y Recursión Transfinita

La ventaja que nos ofrecen los ordinales es que son una extensión de los números naturales, y como en ellos se hacía inducción resulta que también puede hacerse inducción sobre los ordinales, a pesar de que estos no formen un conjunto (como consecuencia del Corolario (3.17)), como lo muestra el siguiente resultado:

Teorema 3.25 (**Principio de Inducción Transfinita**)
Dada una propiedad $\boldsymbol{P}(x)$ de x se tiene que:

$$(\forall\alpha \text{ ordinal})((\forall\beta<\alpha\ \boldsymbol{P}(\beta))\Rightarrow \boldsymbol{P}(\alpha))\Rightarrow(\forall\alpha \text{ ordinal})\boldsymbol{P}(\alpha).$$

Demostración:
Probaremos la contrapositiva. Supongamos que existe un ordinal β tal que $\neg\boldsymbol{P}(\beta)$. Se tienen dos casos:

- Para todo ordinal ξ tal que $\xi<\beta$ se cumple $\boldsymbol{P}(\xi)$. Tomemos $\alpha=\beta$.
- Existe un ordinal ξ tal que $\xi<\beta$ que cumple $\neg\boldsymbol{P}(\xi)$. Sea:

  $$A=\left\{\xi<\beta\middle|\neg\boldsymbol{P}(\xi)\right\}\subseteq\beta,$$

  tenemos que A es no vacío y, como β es ordinal entonces A está bien ordenado por $\in$, se sigue que A tiene elemento mínimo digamos $\alpha=\text{mín}(A)$.

En ambos casos hemos tenemos un ordinal α tal que $\neg\boldsymbol{P}(\alpha)$ y tal que:

$$\forall\gamma<\alpha \text{ se cumple } \boldsymbol{P}(\gamma),$$

es decir que $\exists\alpha$ ordinal tal que $\forall\gamma<\alpha$ se tiene $\boldsymbol{P}(\gamma)$ y $\neg\boldsymbol{P}(\alpha)$. Lo anterior prueba la contrapositiva.

■

Resulta que podemos clasificar a los ordinales en tres tipos:

Definición 3.12 (**Ordinal Sucesor y Límite**)
Sea α un ordinal.

- Decimos que α es un **ordinal sucesor** si existe un ordinal β tal que $\alpha=S(\beta)$.
- En caso de que α no sea ordinal sucesor, diremos que α es **ordinal límite**.

Ejemplo 3.26
Los ordinales: 0 y ω son ordinales límite. En cambio, los ordinales: $1,2,3,\ldots,n,\ldots$ son ordinales sucesores.

A diferencia de los ordinales sucesores, los ordinales límite tienen propiedades que los diferencian en gran medida de los mencionados anteriormente, como lo muestra la siguiente proposición:

Proposición 3.27 (**Caracterización de Ordinales Límite**)
Sea α un ordinal límite no cero. Las siguientes son equivalentes:

(1) α es ordinal límite.

(2) $\forall \beta < \alpha$ se tiene que $S(\beta) < \alpha$.

(3) $\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$.

Demostración:
(1) $\Rightarrow$ *(2)*: Supongamos que α es ordinal límite no cero, entonces por definición α no es sucesor de ningún ordinal, es decir que para todo ordinal β se tiene que $S(\beta)$ es diferente de α.

Sea $\beta < \alpha$, entonces $S(\beta)$ es diferente de α. Si $\alpha < S(\beta)$ se seguiría que $\alpha \leqslant \beta < S(\beta)$ por el Teorema (3.21), lo cual contradice el hecho de que $\beta < \alpha \#_c$. Por tanto, debe tenerse que $S(\beta) < \alpha$.

(2) $\Rightarrow$ *(3)*: Supongamos que para todo $\beta < \alpha$ se tiene que $S(\beta) < \alpha$. Por ser α ordinal, en particular es transitivo, luego de la Proposición (3.6) se sigue que:

$$\bigcup_{\beta<\alpha} \beta \subseteq \alpha.$$

Sea $\gamma \in \alpha$, esto es que $\gamma < \alpha$, se tiene por hipótesis que $S(\gamma) < \alpha$, luego $S(\gamma) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$, así que $\gamma \in \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$. Con lo que se tiene la contención:

$$\alpha \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \beta.$$

De ambas contenciones se sigue la igualdad.

(3) $\Rightarrow$ *(1)*: Supongamos que:

$$\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta.$$

Sea γ un ordinal. Se tienen tres casos:

- $\gamma < \alpha$. Como $\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$, si $S(\gamma) = \alpha$ se tendría que:

$$\begin{aligned} S(\gamma) &= \bigcup_{\beta<\alpha} \beta \\ &= \bigcup_{\beta<S(\gamma)} \beta \\ &= \gamma, \end{aligned}$$

  lo cual contradice el Teorema (3.21)$\#_c$. Por tanto, $S(\gamma) \neq \alpha$.

- Si $\alpha \leqslant \gamma$ se sigue nuevamente del teorema antes mencionado que $\alpha < S(\gamma)$, en particular $\alpha \neq S(\gamma)$.

Por los dos incisos anteriores se tiene que α no es sucesor de γ, luego α debe ser ordinal límite. ■

OBSERVACIÓN 3.28 (**Caracterización Alternativa Ordinal Límite**)
Sea α ordinal no cero. Entonces, α es límite si y solo si para todo ordinal β tal que $\beta < \alpha$ existe un ordinal γ tal que $\beta < \gamma < \alpha$. Esta caracterización se tiene de forma inmediata por la proposición anterior y por el Teorema (3.24) inciso *(1)*.

La proposición anterior nos permite hacer una distinción clara entre tres tipos de ordinales:

- Ordinal cero, $\alpha = 0$.
- Ordinal sucesor, $\alpha = S(\beta)$ para algún ordinal β.
- Ordinal límite α no cero.

Esta distinción nos ayudará a probar una segunda versión del Principio de Inducción Transfinita:

TEOREMA 3.29 (**Segunda Versión del Principio de Inducción Transfinita**)
Dada una propiedad $\boldsymbol{P}(x)$ de x tal que:

(a) Se cumple $\boldsymbol{P}(0)$.

(b) Para todo ordinal α se tiene que $\boldsymbol{P}(\alpha)$ implica $\boldsymbol{P}(S(\alpha))$.

(c) Para todo ordinal límite α no cero, si $\boldsymbol{P}(\beta)$ se cumple para todo $\beta < \alpha$, entonces $\boldsymbol{P}(\alpha)$.

Entonces $\boldsymbol{P}(\alpha)$ para todo ordinal α.

Demostración:
Sea α ordinal tal que $\boldsymbol{P}(\beta)$ se cumple para todo $\beta < \alpha$. Debemos probar que $\boldsymbol{P}(\alpha)$. Se tienen tres casos:

- Si α es cero por *(a)* se sigue que $\boldsymbol{P}(0)$.
- Si α es ordinal sucesor entonces existe un ordinal β tal que $\alpha = S(\beta)$, luego $\beta < \alpha$, así que del inciso *(b)* se sigue que $\boldsymbol{P}(S(\beta))$, es decir que $\boldsymbol{P}(\alpha)$.
- Si α es ordinal límite no cero, entonces de *(c)* se sigue que $\boldsymbol{P}(\alpha)$.

Por los tres incisos se tiene que $(\forall\beta < \alpha)\boldsymbol{P}(\beta)$ implica $\boldsymbol{P}(\alpha)$. Del Teorema (3.25) se sigue que $\boldsymbol{P}(\alpha)$ para todo ordinal α. ■

Al igual que con los números naturales nos interesa definir operaciones sobre ordinales. Para ello usaremos una versión del Teorema de Recursión Transfinita que se prueba en el Anexo A.

Antes, explicaremos algunos elementos del teorema para comprender la forma en que procederemos. Consideremos una propiedad $\boldsymbol{P}(x, y)$ tal que para todo x existe un único y para el cual $\boldsymbol{P}(x, y)$. Denotemos por $\mathbf{F}$ a la *función* que a cada x lo asigna a y, es decir:

$$\mathbf{F}(x) = y,$$

en otras palabras $\mathbf{F}(x)$ denota al único y tal que $\boldsymbol{P}(x, \mathbf{F}(x))$. En este caso $\mathbf{F}$ es llamada **clase función** o ***función*** (en italica), ya que formalmente no es una función, pero a cada conjunto le asigna un único conjunto, con lo cual se comporta como si fuese una. Para comprender mejor esta idea, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.30 (Existencia del Conjunto Potencia)
Sea A conjunto. Considere la propiedad $\boldsymbol{Q}(x, y)$:

$$\text{Para todo } u \text{ se tiene que } u \in y \text{ si y solo si } u \subseteq x.$$

Esta propiedad cumple que:

(a) Para todo x existe un único y tal que $\boldsymbol{Q}(x, y)$.

La prueba de esto se hace usando el Axioma de Potencia. Por el Axioma de Reemplazo se tiene que para un conjunto A existe un conjunto B tal que:

$$b \in B \text{ si y solo si } b \subseteq A,$$

es decir que existe el conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$. En este caso la clase función o *función* $\mathbf{F}_1$ sería aquella tal que $\mathbf{F}_1(A) = \mathcal{P}(A)$.

En el Anexo A se hace un análisis de un teorema importante que es el Teorema de Recursión Transfinita. Para no detenernos en detalles adicionales, simplemente enunciamos el último teorema del anexo mencionado anteriormente, ya que el mismo nos permitirá definir operaciones entre ordinales:

Teorema 3.31
Sean $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ y $\mathbf{G}_3$ *funciones* de dos variables, y sea $\mathbf{G}$ la *función* de dos variables que define la propiedad definida en (A.5). Entonces, la propiedad $\boldsymbol{H}$ formulada en (A.4) define una *función* $\mathbf{F}$ tal que:

(a) $\mathbf{F}_z(0) = \mathbf{G}_1(z, \emptyset)$.

(b) $\mathbf{F}_z(S(\alpha)) = \mathbf{G}_2(z, \mathbf{F}_z(\alpha))$ para todo ordinal α.

(c) $\mathbf{F}_z(\alpha) = \mathbf{G}_3(z, \mathbf{F}_z \restriction \alpha)$ para todo ordinal límite $\alpha \neq 0$.

Para todo ordinal α y para cualquier conjunto z.

Demostración:
Una prueba detallada de este teorema se encuentra al final del Anexo A. Las propiedades (A.5) y (A.4) pueden ser consultadas en el mismo anexo. ■

Con este teorema ya podemos hacer la definición de suma, multiplicación y exponenciación de ordinales:

Definición 3.13 (Suma de Ordinales)
Para todo ordinal β:

(a) $\beta + 0 = \beta$.

(b) $\beta + S(\alpha) = S(\beta + \alpha)$ para todo ordinal α.

(c) $\beta + \alpha = \sup\left\{\beta + \gamma \middle| \gamma < \alpha\right\}$ para todo ordinal límite $\alpha \neq 0$.

Para ver que esta definición de suma es conforme al Teorema (3.31), consideremos las *funciones* $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ y $\mathbf{G}_3$ dadas por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_1(z,x) &= z \\
\mathbf{G}_2(z,x) &= \begin{cases} S(x) & \text{si} \quad x \text{ es ordinal} \\ \emptyset & \quad\quad \text{en otro caso} \end{cases} \\
\mathbf{G}_3(z,x) &= \begin{cases} \sup\left(\operatorname{ran}(x)\right) & \text{si} \quad x \text{ es función} \\ \emptyset & \quad\quad \text{en otro caso} \end{cases}
\end{aligned}$$

Entonces, el teorema anterior proporciona una *función* $\mathbf{F}$ tal que para todo z:

(a) $\mathbf{F}(z,0) = \mathbf{G}_1(z,0) = z$.

(b) Para todo ordinal α:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(z,S(\alpha)) &= \mathbf{G}_2(z,\mathbf{F}(z,\alpha)) \\
&= \begin{cases} S(\mathbf{F}(z,\alpha)) & \text{si} \quad \mathbf{F}(z,\alpha) \text{ es ordinal} \\ \emptyset & \quad\quad \text{en otro caso} \end{cases}
\end{aligned}$$

(c) Para todo $\alpha \neq 0$ ordinal límite:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(z,\alpha) &= \mathbf{G}_3(z,\mathbf{F}_z \restriction \alpha) \\
&= \begin{cases} \sup\left(\operatorname{ran}(\mathbf{F}_z \restriction \alpha)\right) & \text{si} \quad \mathbf{F}_z \restriction \alpha \text{ es función} \\ \emptyset & \quad\quad \text{en otro caso} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sup\left\{\mathbf{F}(z,\gamma) \middle| \gamma < \alpha\right\} & \text{si} \quad \mathbf{F}_z \restriction \alpha \text{ es función} \\ \emptyset & \quad\quad \text{en otro caso} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donde $\mathbf{F}_z$ denota a la *función* tal que a cada x lo mapea a $\mathbf{F}_z(x) = \mathbf{F}(z,x)$. Si α y β son ordinales, escribimos $\alpha + \beta$ en lugar de $\mathbf{F}(\alpha,\beta)$ y rápidamente se verifica que $\mathbf{F}(\alpha,\beta)$ siempre es un ordinal. Con lo que tenemos formalmente definida la suma de ordinales. La razón de hacer esta definición de esta manera es por el Corolario (3.17), pues tal resultado nos dice que no existe el conjunto de todos los ordinales.

Con las operaciones de producto y exponenciación no se hará un análisis tan detallado para mostrar que están bien definidas tales operaciones, pues es análogo el procedimiento al hecho aquí con la suma de ordinales.

Proposición 3.32 (**Cero es Elemento Neutro Aditivo**)
Sea α ordinal, entonces $0 + \alpha = \alpha$.

Demostración:
Procederemos por inducción transfinita sobre α:

- Si $\alpha = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} 0 + \alpha &= 0 + 0 \\ &= 0 \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

- Supongamos que el resultado se cumple para algún ordinal α, esto es que $0 + \alpha = \alpha$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 + S(\alpha) &= S(0 + \alpha) \\ &= S(\alpha). \end{aligned}$$

- Supongamos que $\alpha \neq 0$ es un ordinal límite tal que $0 + \beta = \beta$ para todo $\beta < \alpha$. Entonces:

$$\begin{aligned} 0 + \alpha &= \sup \left\{ 0 + \beta \middle| \beta < \alpha \right\} \\ &= \sup \left\{ \beta \middle| \beta < \alpha \right\} \\ &= \bigcup_{\beta < \alpha} \beta \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

  por la Proposición (3.27), ya que α es ordinal límite no cero.

Se sigue de los tres incisos usando Teorema (3.29) que $0 + \alpha = \alpha$ para todo ordinal α. ■

Observación 3.33 ($S(\alpha) = \alpha + 1$)
Si α es un ordinal, entonces:

$$\alpha + 1 = \alpha + S(0) = S(\alpha + 0) = S(\alpha),$$

por lo que $S(\alpha) = \alpha + 1$.

Ejemplo 3.34 (**Suma de Ordinales No Conmutativa**)
De la definición de suma de ordinales tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1 + \omega &= \sup \left\{ 1 + n \middle| n < \omega \right\} \\ &= \omega, \end{aligned}$$

por lo que:

$$1 + \omega \neq \omega + 1.$$

Así que la suma de ordinales no es conmutativa.

Ejemplo 3.35 (**Suma de Ordinales No Cancelativa por la Derecha**)

Veamos que:

$$\begin{aligned} 2+\omega &= \left\{2+n \middle| n<\omega\right\} \\ &= \omega, \end{aligned}$$

por lo cual, del ejemplo anterior se sigue que:

$$1+\omega = 2+\omega,$$

por lo que no se puede cumplir la cancelación por la derecha. ¿Se cumplirá la cancelación por la izquierda?

Más adelante se responderá la pregunta planteada en el ejemplo anterior. Antes de ello, tenemos que usar algunas definiciones como lo es la siguiente:

Definición 3.14 (Producto de Ordinales)
Para todo ordinal β:

(a) $\beta \cdot 0 = 0$.

(b) $\beta \cdot S(\alpha) = \beta \cdot \alpha + \beta$ para todo ordinal α.

(c) $\beta \cdot \alpha = \sup\left\{\beta \cdot \gamma \middle| \gamma < \alpha\right\}$ para todo ordinal límite $\alpha \neq 0$.

Ejemplo 3.36
Sea β ordinal. Se tiene lo siguiente:

(1) $\beta \cdot 1 = \beta \cdot (0+1) = \beta \cdot 0 + \beta = 0 + \beta = \beta$ por la Proposición (3.32).

(2) $\beta \cdot 2 = \beta(1+1) = \beta \cdot 1 + \beta = \beta + \beta$. En particular, $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$.

(3) $\beta \cdot \omega = \sup\left\{\beta \cdot n \middle| n < \omega\right\} = \sup\{\beta, \beta+\beta, \dots\}$.

Ejemplo 3.37
Para todo ordinal α se cumple que $1 \cdot \alpha = \alpha$.

Demostración:
Procedemos por inducción transfinita sobre α.

- Para 0 se tiene que $1 \cdot 0 = 0$.
- Supongamos que $1 \cdot \alpha = \alpha$ para algún ordinal α, entonces:

$$\begin{aligned} 1 \cdot S(\alpha) &= 1 \cdot \alpha + 1 \\ &= \alpha + 1 \\ &= S(\alpha), \end{aligned}$$

por lo que $1 \cdot S(\alpha) = S(\alpha)$.

- Supongamos que $\alpha \neq 0$ es ordinal límite tal que $1 \cdot \beta = \beta$ para todo $\beta < \alpha$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \alpha &= \sup \left\{ 1 \cdot \beta \middle| \beta < \alpha \right\} \\ &= \sup \left\{ \beta \middle| \beta < \alpha \right\} \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

  por lo que $1 \cdot \alpha = \alpha$.

Se sigue de los tres incisos anteriores usando el Teorema (3.29) que $1 \cdot \alpha = \alpha$, para todo ordinal α. ■

Lema 3.38
Para todo ordinal α se cumple que $0 \cdot \alpha = 0$.

Demostración:
Procederemos por inducción transfinita sobre α:

- Si $\alpha = 0$ se tiene que $0 \cdot \alpha = 0 \cdot 0 = 0$.
- Supongamos que $0 \cdot \alpha = 0$ para algún ordinal α. Se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 \cdot S(\alpha) &= 0 \cdot \alpha + 0 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Supongamos que $\alpha \neq 0$ es ordinal límite tal que para todo $\beta < \alpha$ se tiene que: $0 \cdot \beta = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} 0 \cdot \alpha &= \sup \left\{ 0 \cdot \beta \middle| \beta < \alpha \right\} \\ &= \sup \left\{ 0 \middle| \beta < \alpha \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por los tres incisos anteriores usando el Teorema (3.29) se sigue que $0 \cdot \alpha = 0$ para todo ordinal α. ■

Definición 3.15 (**Exponenciación de Ordinales**)
Para todo ordinal β:

(1) $\beta^0 = 1$.

(2) $\beta^{S(\alpha)} = \beta^\alpha \cdot \beta$ para todo ordinal α.

(3) $\beta^\alpha = \sup \left\{ \beta^\gamma \middle| \gamma < \alpha \right\}$ para todo ordinal límite $\alpha \neq 0$.

Ejemplo 3.39
Se tiene lo siguiente:

(1) $\beta^1 = \beta$, $\beta^2 = \beta \cdot \beta$, $\beta^3 = \beta \cdot \beta \cdot \beta$.

(2) $\beta^\omega = \sup\left\{\beta^n \middle| n < \omega\right\}$. En particular: $1^\omega = 1$, $2^\omega = \omega$ y, para todo $1 < n < \omega$, $n^\omega = \omega$.

Lema 3.40
Sean α y β ordinales tales que $\alpha \leqslant \beta$. Entonces $S(\alpha) \leqslant S(\beta)$.

Demostración:
Se tienen dos casos:

- $\alpha = \beta$ en cuyo caso se tiene que $S(\alpha) = S(\beta)$.
- $\alpha < \beta$. Por el Teorema (3.21) se tiene que $S(\alpha) \leqslant \beta$, luego $S(\alpha) \leqslant \beta < S(\beta)$.

Por los dos incisos se sigue que $S(\alpha) \leqslant S(\beta)$. ■

Proposición 3.41
Sean α, β y γ ordinales tales que $\beta \leqslant \gamma$. Entonces:

(a) $\beta + \alpha \leqslant \gamma + \alpha$.

(b) $\beta \cdot \alpha \leqslant \gamma \cdot \alpha$.

Demostración:
De *(a)*: Procederemos por inducción transfinita sobre α:

- Si $\alpha = 0$ el resultado se tiene de forma inmediata, ya que $\beta + 0 = \beta \leqslant \gamma = \gamma + 0$.
- Supongamos que el resultado se cumple para algún ordinal α, es decir:
$$\beta + \alpha \leqslant \gamma + \alpha, \tag{3.2}$$
entonces:
$$\begin{aligned} \beta + S(\alpha) &= S(\beta + \alpha) \\ &\leqslant S(\gamma + \alpha) \\ &= \gamma + S(\alpha), \end{aligned}$$
por el Lema (3.40) y usando (3.2). Así que $\beta + S(\alpha) \leqslant \gamma + S(\alpha)$.
- Supongamos que $\alpha \neq 0$ es ordinal límite tal que para todo $\epsilon < \alpha$ se tiene que:
$$\beta + \epsilon \leqslant \gamma + \epsilon.$$
Entonces:
$$\begin{aligned} \beta + \alpha &= \sup\left\{\beta + \epsilon \middle| \epsilon < \alpha\right\} \\ &\leqslant \sup\left\{\gamma + \epsilon \middle| \epsilon < \alpha\right\} \\ &\leqslant \gamma + \alpha, \end{aligned}$$
con lo que $\beta + \alpha \leqslant \gamma + \alpha$.

Por los tres incisos y usando el Teorema (3.29) se sigue que $\beta + \alpha \leqslant \gamma + \alpha$, para todo ordinal α.
De *(b)*: Es análogo a lo hecho en el inciso *(a)*. ■

Proposición 3.42
Sean α, β y γ ordinales tales que $\beta < \gamma$, entonces $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

Demostración:
Procederemos por inducción transfinita sobre γ, antes notemos que $\gamma > 0$:

- Supongamos que γ es un ordinal tal que para todo ordinal β se tiene que $\beta < \gamma$ implica $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$. Sea β ordinal tal que $\beta < S(\gamma)$, se tienen dos casos:

  - $\beta = \gamma$. Si esto sucede, se tiene lo siguiente:

  $$\alpha + \beta = \alpha + \gamma < S(\alpha + \gamma) = \alpha + S(\gamma).$$

  - $\beta < \gamma$. Si esto sucede, por hipótesis de inducción se tiene que:

  $$\alpha + \beta < \alpha + \gamma,$$

  pero, $\alpha + \gamma < S(\alpha + \gamma) = \alpha + S(\gamma)$, por lo cual $\alpha + \beta < \alpha + S(\gamma)$.

  En cualquier caso, se tiene que $\alpha + \beta < \alpha + S(\gamma)$.

- Supongamos que $\gamma \neq 0$ es ordinal límite tal que para todo ordinal β se tiene que $\beta < \gamma$ implica que para todo $\xi < \gamma$ con $\beta < \xi$ se cumple:

  $$\alpha + \beta < \alpha + \xi.$$

  Sea β ordinal tal que $\beta < \gamma$. Por ser γ ordinal límite existe $\zeta < \gamma$ tal que $\beta < \zeta$. Por hipótesis de inducción se tiene que:

  $$\alpha + \beta < \alpha + \zeta,$$

  luego, como $\alpha + \zeta \leqslant \sup \left\{ \alpha + \xi \middle| \xi < \gamma \right\}$, entonces:

  $$\alpha + \beta < \sup \left\{ \alpha + \xi \middle| \xi < \gamma \right\} = \alpha + \gamma.$$

Por los dos incisos y usando el Teorema (3.29) se sigue que $\beta < \gamma$ implica que $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ ■

Este resultado nos permite de forma inmediata probar el siguiente corolario, respondiendo así a la pregunta planteada en el Ejemplo (3.35):

Corolario 3.43 (Propiedad Cancelativa por la Izquierda de Suma de Ordinales)
Sean α, β y γ ordinales tales que $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, entonces $\beta = \gamma$.

Demostración:
Si $\beta \neq \gamma$, entonces $\beta < \gamma$ ó $\gamma < \beta$, luego por la Proposición (3.42) se tiene que $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ ó $\alpha + \gamma < \alpha + \beta$, es decir que $\alpha + \beta \neq \alpha + \gamma$. Usando la contrapositiva se sigue el resultado. ■

El objetivo de la siguiente proposición es de probar un teorema que será fundamental para la última demostración del Capítulo 4.

Proposición 3.44
Sean α y β ordinales tales que β es ordinal límite no cero, entonces $\alpha+\beta$ es ordinal límite no cero.

Demostración:
Se tiene que como $0<\beta$, entonces $\alpha<\alpha+\beta$ por la Proposición (3.42), se sigue que $0<\alpha+\beta$ (pues $0\leqslant\alpha$). Así que $\alpha+\beta$ es ordinal no cero. Veamos que es límite. Sea $\gamma<\alpha+\beta$, se tienen dos casos:

- $\gamma<\alpha$, tomemos $\gamma'=\alpha$, este cumple que $\gamma<\gamma'<\alpha+\beta$.
- $\alpha\leqslant\gamma$. Como β es ordinal límite, entonces:

$$\alpha+\beta=\bigcup_{\xi<\beta}\alpha+\xi,$$

(ya que $\sup\left\{\alpha+\xi\middle|\xi<\beta\right\}=\bigcup_{\xi<\beta}\alpha+\xi$). Por tanto, existe $\xi<\beta$ tal que $\gamma\in\alpha+\xi$, es decir que $\gamma<\alpha+\xi$. Sea $\gamma'=\alpha+\xi$, se tiene así que:

$$\gamma<\gamma'<\alpha+\beta,$$

la segunda desigualdad se tiene, porque como $\xi<\beta$ tenemos por la Proposición (3.42) que $\alpha+\xi<\alpha+\beta$, es decir que $\gamma'<\alpha+\beta$.

En ambos casos para $\gamma<\alpha+\beta$ hemos encontrado un ordinal γ' tal que $\gamma<\gamma'<\alpha+\beta$. Se sigue así que $\alpha+\beta$ es ordinal límite. ■

Para el siguiente teorema, recordemos que si tenemos $0\leqslant n,m<\omega$ tales que $n\geqslant m$, entonces existe un único $0\leqslant k<\omega$ tal que:

$$n=m+k,$$

en tal caso k denota a la diferencia entre los números naturales n y m, esto es que $k=n-m$. Esto nos permite de alguna manera introducir naturalmente la operación de resta con elementos de ω (con algunas condiciones extras) y uno esperaría que con ordinales suceda lo mismo. El siguiente resultado es una generalización de lo anterior.

Teorema 3.45 (Diferencia Ordinal)
Sean α y β ordinales tales que $\alpha\leqslant\beta$, entonces existe un único ordinal γ con $\gamma\leqslant\beta$ tal que $\beta=\alpha+\gamma$.

Demostración:
Primero probaremos la existencia y luego la unicidad.

- **Existencia**. Si $\alpha\leqslant\beta$, entonces se tienen dos casos:
  - $\alpha=\beta$, en cuyo caso existe $\gamma=0$ con $\gamma\leqslant\beta$ (pues $0\leqslant\alpha=\beta$) tal que $\beta=\alpha=\alpha+\gamma$.
  - $\alpha<\beta$. Consideremos el conjunto:

$$S=\left\{\xi\leqslant\beta\middle|\alpha+\xi\leqslant\beta\right\}.$$

Este conjunto es no vacío, ya que $0 \in S$. Además, es acotado dado que por la Proposición (3.42) se tiene que para todo ϑ ordinal tal que $\beta < \vartheta$ se cumple que:

$$\alpha + \beta < \alpha + \vartheta,$$

y por las Proposiciones (3.32) y (3.41) se tiene:

$$\beta = 0 + \beta \leqslant \alpha + \beta,$$

ya que $0 \leqslant \alpha$. Por tanto:

$$\beta < \alpha + \vartheta,$$

siempre que $\beta < \vartheta$. Se tiene así que el conjunto S es acotado. Además, S cumple lo siguiente: si $\xi \in S$, entonces para todo $\zeta < \xi$ se tiene que:

$$\alpha + \zeta < \alpha + \xi \leqslant \beta,$$

por lo cual, como $\xi \leqslant \beta$ entonces $\zeta \leqslant \beta$, así que $\xi \in S$, esto es que:

$$\xi \in S \Rightarrow \forall \zeta \leqslant \xi, \zeta \in S. \tag{3.3}$$

Por ser S acotado no vacío, se sigue que tiene supremo, digamos γ. Afirmamos que $\beta = \alpha + \gamma$. En efecto, si no sucede esto, debe suceder alguno de los siguientes dos casos:

- $\alpha + \gamma < \beta$, por el Corolario (3.22) se tiene que:

  $$S(\alpha + \gamma) \leqslant \beta,$$

  como $\alpha + S(\gamma) = S(\alpha + \gamma)$, se sigue que $S(\gamma) \in S$ y es tal que $\gamma < S(\gamma)$ lo cual contradice la elección de γ como el supremo de $S\#_c$.
- $\beta < \alpha + \gamma$. No puede suceder que $\gamma = 0$, ya que $\alpha < \beta$, por lo que γ es ordinal sucesor o es ordinal límite no cero. Afirmamos que en cualquiera de los dos casos existe $\xi < \gamma$ tal que:

  $$\beta < \alpha + \xi.$$

  Se tienen dos casos para γ:

  - γ es ordinal sucesor, entonces existe un ordinal ξ tal que $\gamma = S(\xi)$. Ahora, $\xi < \gamma$ y como:

    $$S(\alpha + \xi) = \alpha + S(\xi) = \alpha + \gamma > \beta,$$

    entonces $\alpha + \xi \geqslant \beta$. Si $\alpha + \xi = \beta$ entonces se tendría que ξ sería el máximo de S por (3.3), lo cual contradice el hecho de que γ es supremo de $S\#_c$. Por lo cual $\alpha + \xi > \beta$.
  - γ es ordinal límite no cero. Por la Proposición (3.44) se tiene que $\alpha + \gamma$ es ordinal límite no cero, luego para $\beta < \alpha + \gamma$ existe un ordinal $\xi < \gamma$ tal que:

    $$\beta < \alpha + \xi < \alpha + \gamma.$$

  En cualquier caso, hemos encontrado un ordinal $\xi < \gamma$ tal que $\beta < \alpha + \xi$. Si $\xi < \zeta$, entonces $\alpha + \xi < \alpha + \zeta$, luego $\beta < \alpha + \zeta$, por tanto $\zeta \notin S$. Por (3.3) se sigue que ξ es cota superior de S, lo cual es una contradicción ya que $\xi < \gamma$ y γ es el supremo de $S\#_c$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que $\beta = \alpha + \gamma$. No puede suceder que $\beta < \gamma$, ya que en tal caso se seguiría que $\beta < \alpha + \gamma$. Por tanto, $\gamma \leqslant \beta$.

Por los dos incisos anteriores se tiene que existe un ordinal γ con $\gamma \leqslant \beta$ tal que $\beta = \alpha + \gamma$.

- **Unicidad**. Si γ y ξ son ordinales tales que:

$$\beta = \alpha + \gamma \quad \text{y} \quad \beta = \alpha + \xi,$$

entonces, $\alpha + \gamma = \alpha + \xi$, luego por el Corolario (3.43) se sigue que $\gamma = \xi$.

■

Más propiedades de suma, producto y exponenciación de ordinales pueden ser encontradas en [HH03].

§3.3 Cardinales

Continuando con nuestro estudio de ordinales pasamos ahora al estudio de cardinales. Más adelante veremos dos cardinales $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{b}$ que están íntimamente ligados con el estudio de los espacios de Fréchet.

El objetivo de esta sección es formalizar la noción de cardinalidad $|X|$ de un conjunto X. Para ello, retomemos la definición de equipotencia:

Definición 3.16 (Equipotencia)
Sean X y Y conjuntos. Decimos que ambos son **equipotentes** si existe una función biyectiva $f : X \to Y$. Tal relación es denotada por $X \sim Y$.

Reuslta que la relación de equipotencia tiene varias propiedades, como son las que se enuncian a continuación:

Proposición 3.46 (Propiedades de la Relación Equipotencia)
Se cumple lo siguiente:

(1) Si X es conjunto entonces $X \sim X$.

(2) Si X y Y son conjuntos, entonces $X \sim Y$ implica que $Y \sim X$.

(3) Si X, Y y Z son conjuntos, entonces $X \sim Y$ y $Y \sim Z$ implica que $X \sim Z$.

Por lo que, si X es un conjunto entonces la relación de equipotencia restringida a $\mathcal{P}(X)$ es una relación de equivalencia.

Ejemplo 3.47
Los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ son equipotentes.

Ejemplo 3.48
Los conjuntos X y $\mathcal{P}(X)$ no son equipotentes.

Ejemplo 3.49
Consideremos los conjuntos ω y $\omega+1$. Se tiene que ambos son equipotentes. En efecto, sea $f: \omega+1 \to \omega$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = \omega \\ x+1 & \text{e.o.c.} \end{cases}, \quad \forall x \in \omega+1$$

Se tiene que f está bien definida y es biyección, por lo cual ω y $\omega+1$ son equipotentes.

Un tipo de ordinales que resultan relevantes son los siguientes:

Definición 3.17 (**Ordinal Inicial**)
Un número ordinal α es un **ordinal inicial** si no es equipotente a algún ordinal β tal que $\beta < \alpha$.

Observación 3.50
Si α es ordinal inicial y β es un ordinal equipotente a α, entonces $\alpha \leqslant \beta$.

Ejemplo 3.51 (**ω y n son Ordinales Iniciales**)
Cada número natural es un ordinal inicial. ω es un ordinal inicial, pero los conjuntos $\omega+1$, $\omega+\omega$ y $\omega \cdot \omega$ no son ordinales iniciales.

Una propiedad importante que se discute y prueba en la primera sección del Anexo B es la siguiente: si $(X, \preceq)$ es un conjunto bien ordenado, entonces $(X, \preceq)$ es isomorfo a un único número ordinal. Este resultado es muy relevante, ya que nos muestra que los ordinales nos permiten, aparte de ser una extensión de los números naturales, clasificar completamente a los conjuntos bien ordenados. Los Teoremas (B.5) y (B.7) prueban este resultado.

La segunda sección del Anexo B está dedicada a probar el Teorema (B.11), la cual muestra que todo conjunto puede ser bien ordenado usando el Lema de Zorn.

Estos resultados nos servirán para probar el siguiente teorema, que resultará imprescindible para formalizar la noción de cardinalidad:

Teorema 3.52
Todo conjunto X es equipotente a un único ordinal inicial.

Demostración:
Sea X un conjunto, por el Teorema (B.11) existe un buen orden para X, digamos $\preceq$. Ahora, por el Teorema (B.5) se tiene que $(X, \preceq)$ es isomorfo a algún único ordinal, digamos α, en particular se tiene que X y α son equipotentes. Sea:

$$A = \left\{ \beta \leqslant \alpha \middle| \beta \text{ es equipotente a } X \right\}.$$

Este conjunto de ordinales es no vacío, luego tiene elemento mínimo, ya que $\alpha+1$ es bien ordenado por ser ordinal. Sea α_0 el mínimo de A. Afirmamos que α_0 es ordinal inicial. Si $\beta < \alpha_0$ es tal que es equipotente a α_0 se seguiría que X es equipotente a β lo cual contradice la elección de $\alpha_0 \#_c$. Por tanto, α_0 es ordinal inicial.

Ahora, si α_1 es otro ordinal inicial tal que X es equipotente a α_1, se sigue que α_0 y α_1 son equipotentes. Como ambos son ordinales iniciales debe suceder por la Observación (3.50) que $\alpha_0 \leqslant \alpha_1$ y $\alpha_1 \leqslant \alpha_0$, esto es que $\alpha_1 = \alpha_0$.

Por ende el ordinal inicial α_0 es el único ordinal inicial equipotente a X. ■

Con este teorema probado, tenemos las herramientas suficientes para definir la cardinalidad de un conjunto:

Definición 3.18 (**Número Cardinal**)
Sea X un conjunto. El **número cardinal de** X, denotado por $|X|$ se define como el único ordinal inicial equipotente a X.

Observación 3.53 (**Diferencia entre Tipo de Orden y Cardinalidad**)
Sea X un conjunto. En el Anexo B se prueba que todo conjunto puede ser bien ordenado, luego existe un buen orden $\preceq$ para X. Como consecuencia del Teorema (B.5) se tiene que $(X, \preceq)$ es isomorfo (como conjunto bien ordenado) a un único número ordinal, digamos α, que por la Definición (B.3) es llamado el **tipo de orden de** X.

Ahora, por el teorema anterior se tiene que existe un único ordinal inicial β tal que X y β son equipotentes.

Es natural preguntarse: ¿$\alpha = \beta$? La respuesta es que no, ya que la cardinalidad de $\omega + 1$ es ω, pero su tipo de orden es $\omega + 1$. Así que, en general, el tipo de orden y la cardinalidad no son la misma para cualquier conjunto.

Como se menciona en la observación anterior, el tipo de orden y la cardinalidad de un conjunto no coinciden en general. En el Anexo A se hace un análisis más detallado del tipo de orden de un conjunto bien ordenado.

Ejemplo 3.54
Si X es numerable, entonces $|X| = \omega$. Si X es finito de n-elementos, entonces $|X| = n$.

Para seguir, nuestro objetivo ahora será dar una forma de producir ordinales iniciales ya que de momento solo tenemos por el Ejemplo (3.51) como ordinales iniciales a ω y n, para todo $n < \omega$.

Observación 3.55
Si α y β son ordinales tales que $\alpha \leqslant \beta$, entonces $|\alpha| \leqslant |\beta|$, pues como $\alpha < \beta$ entonces $\alpha \subseteq \beta$ (pues al ser ordinales, en particular son conjuntos transitivos).

Ahora nuestro objetivo será el de encontrar una forma de construir ordinales iniciales a partir de los que ya tenemos. Esto lo hacemos usando la siguiente definición:

Definición 3.19 (**Número de Hartogs de un Conjunto**)
Sea A un conjunto. Se define el **número de Hartogs de** A, denotado por $\hbar(A)$ como el mínimo número ordinal que no es equipotente a algún subconjunto de A.

Proposición 3.56 (**Existencia del Número de Hartogs**)

Sea A un conjunto, entonces el número de Hartogs de A existe.

Demostración:
Como A es conjunto, entonces A no es equipotente a $\mathcal{P}(A)$, más aún, $\mathcal{P}(A)$ no es equipotente a ningún subconjunto de A. Sea $\alpha = |\mathcal{P}(A)|$. Se tiene que el conjunto:

$$\Omega = \left\{ \beta \leqslant \alpha \middle| \beta \text{ no es equipotente a ningún subconjunto de } A \right\},$$

es no vacío. Como $\alpha+1$ es bien ordenado se sigue que A tiene mínimo elemento, digamos α_0. Afirmamos que α_0 es el mínimo ordinal tal que no es equipotente a ningún subconjunto de A. En efecto, si γ fuese otro ordinal tal que $\gamma < \alpha_0$ y γ no es equipotente a ningún subconjunto de A se seguiría que $\gamma \in \Omega$ lo cual contradiría la elección de $\alpha_0 \#_c$. Por tanto, $\alpha_0 = \hbar(A)$. ■

El número de Hartogs nos ayudará para poder constuir cardinales más grandes que ω como lo muestra la siguiente proposición:

Proposición 3.57
Para todo conjunto A, $\hbar(A)$ es un ordinal inicial.

Demostración:
Si β es un ordinal tal que $\beta < \hbar(A)$ entonces β es equipotente a algún subconjunto de A, luego β no puede ser equipotente a $\hbar(A)$, ya que por definición de número de Hartogs, $\hbar(A)$ no es equipotente a algún subconjunto de $A\#_c$. Por tanto, $\hbar(A)$ es ordinal inicial. ■

Con lo que estamos en posición de definir ordinales iniciales usando recursión transfinita:

Definición 3.20
Se definen por recursión transfinita los siguientes ordinales iniciales:

- $\omega_0 = \omega$.
- $\omega_{\alpha+1} = \hbar(\omega_\alpha)$ para todo ordinal α.
- $\omega_\alpha = \sup \left\{ \omega_\beta \middle| \beta < \alpha \right\}$ si $\alpha \neq 0$ es ordinal límite.

Observación 3.58
Se cumple lo siguiente:

(1) Sean α y β ordinales. Si $\alpha < \beta$, entonces $\omega_\alpha < \omega_\beta$.

(2) Si α y β son ordinales tales que $\alpha < \beta$ y los ordinales ω_α y ω_β son iniciales, entonces $|\omega_\alpha| < |\omega_\beta|$. En efecto, por *(1)* y la Observación (3.55) se tiene que $|\omega_\alpha| \leqslant |\omega_\beta|$. No puede suceder que $|\omega_\alpha| = |\omega_\beta|$, ya que se contradiría la definición anterior por ser ambos ordinales iniciales y el hecho de que $\omega_\alpha < \omega_\beta$. Por tanto, $|\omega_\alpha| < |\omega_\beta|$.

Demostración:
De *(1)*: Procederemos por inducción transfinita sobre β.

- Si $\beta = 0$ el resultado se cumple de forma inmediata por vacuidad.

- Supongamos que β es un ordinal tal que para todo ordinal α se cumple que si $\alpha < \beta$, entonces $\omega_\alpha < \omega_\beta$. Por definición de $\omega_{\beta+1}$ se tiene que $\omega_\beta < \omega_{\beta+1}$, pues si $\omega_{\beta+1} \leqslant \omega_\beta$, tendríamos que $\omega_{\beta+1}$ es equipotente a un subconjunto de ω_β, lo cual contradice la definición de número de Hartogs$\#_c$. Por tanto:
$$\omega_\beta < \omega_{\beta+1}. \tag{3.4}$$
Sea α un ordinal tal que $\alpha < \beta + 1$. Se tienen dos casos:
  - Si $\alpha < \beta$, por hipótesis se tiene que $\omega_\alpha < \omega_\beta$, por (3.4) se sigue que $\omega_\alpha < \omega_{\beta+1}$.
  - Si $\alpha = \beta$, entonces por (3.4) se sigue que $\omega_\alpha < \omega_{\beta+1}$.

  En cualquier caso, $\omega_\alpha < \omega_{\beta+1}$.
- Supongamos que β es ordinal límite no cero tal que para todo ordinal α se cumple que si $\alpha < \beta$, entonces $\omega_\alpha < \omega_\beta$. Sea $\alpha < \beta$, por definición de ω_β se tiene que:
$$\omega_\beta = \sup\left\{\omega_\gamma \middle| \gamma < \beta\right\}.$$
Como β es ordinal límite no cero, entonces no es sucesor de ningún ordinal, por lo cual, dado que $\alpha < \beta$, se sigue del Corolario (3.22) que $\alpha + 1 < \beta$. Por el inciso anterior se tiene que $\omega_\alpha < \omega_{\alpha+1}$, luego:
$$\omega_\alpha < \omega_{\alpha+1} \leqslant \sup\left\{\omega_\gamma \middle| \gamma < \beta\right\} = \omega_\beta.$$

Por los tres incisos anteriores y usando el Teorema (3.29) se sigue que para todo ordinal β, si α es un ordinal tal que $\alpha < \beta$, entonces $\omega_\alpha < \omega_\beta$. ■

Lema 3.59
Para todo ordinal α se tiene que $\alpha \leqslant \omega_\alpha$.

Demostración:
Procederemos por inducción transfinita sobre α:

- Se tiene que $0 \leqslant \omega_0 = \omega$.
- Supongamos que α es un ordinal tal que $\alpha \leqslant \omega_\alpha$, Como $\omega_{\alpha+1} = \hbar(\omega_\alpha)$ se sigue del inciso *(1)* de la Observación (3.58) que $\omega_\alpha < \omega_{\alpha+1}$, luego $\alpha < \omega_{\alpha+1}$. Si $\omega_{\alpha+1} < \alpha + 1$, tendríamos que:
$$\alpha < \omega_{\alpha+1} < \alpha + 1,$$
lo cual contradice el Teorema (3.21) inciso *(3)*$\#_c$. Por tanto, $\alpha + 1 \leqslant \omega_{\alpha+1}$.
- Supongamos que para α ordinal límite no cero se cumple que para todo $\beta < \alpha$, $\beta \leqslant \omega_\beta$. Luego:
$$\sup\left\{\beta \middle| \beta < \alpha\right\} \leqslant \sup\left\{\omega_\beta \middle| \beta < \alpha\right\},$$
por lo cual, de la Proposición (3.27) y por definición de ω_α tenemos que:
$$\alpha \leqslant \omega_\alpha.$$

Por los tres incisos anteriores y usando el Teorema (3.29) se sigue que $\alpha \leqslant \omega_\alpha$, para todo ordinal α. ■

Teorema 3.60 (**Caracterización de los Ordinales Iniciales Infinitos**)
Se cumple lo siguiente:

(a) ω_α es un número ordinal inicial infinito para todo ordinal α.

(b) Si Ω es un ordinal inicial infinito, entonces $\Omega = \omega_\alpha$ para algún ordinal α.

Demostración:
De *(a)*: Procederemos por inducción transfinita sobre α.

- Para $\alpha = 0$ se tiene que $\omega_\alpha = \omega_0 = \omega$ es ordinal inicial infinito.

- Supongamos que ω_α es ordinal inicial infinito. Por la Proposición (3.57) se tiene que $\omega_{\alpha+1} = \hbar(\omega_\alpha)$ es ordinal inicial, el cual es además infinito, pues $\omega_\alpha \subseteq \omega_{\alpha+1}$, ya que $\omega_\alpha < \omega_{\alpha+1}$, dicha desigualdad se tiene por la Observación (3.58) inciso *(1)*. Así que $\omega_{\alpha+1}$ es ordinal inicial infinito.

- Supongamos que $\alpha \neq 0$ es ordinal límite tal que para todo $\beta < \alpha$ se tiene que ω_β es ordinal inicial infinito.

  Veamos que ω_α es infinito, en efecto esto se tiene, ya que $0 < \alpha$ y por ende $\omega_0 \subseteq \omega_\alpha$. Supongamos que ω_α no es ordinal inicial, entonces existe γ ordinal tal que $\gamma < \omega_\alpha$ y $|\omega_\alpha| = |\gamma|$. Como:

  $$\omega_\alpha = \sup\left\{\omega_\beta \middle| \beta < \alpha\right\},$$

  se tiene que existe $\beta < \alpha$ tal que $\gamma \leqslant \omega_\beta < \omega_\alpha$. Además, como α es ordinal límite se sigue que $\beta + 1 < \alpha$. Por tanto:

  $$|\omega_\alpha| = |\gamma| \leqslant |\omega_\beta| < |\omega_{\beta+1}| \leqslant |\omega_\alpha|,$$

  pues, por definición de cardinalidad se tiene que $\omega_\beta = |\omega_\beta|$ y $\omega_{\beta+1} = |\omega_{\beta+1}|$ y, por las Observaciones (3.55) y (3.58) inciso *(2)*. Así que $|\omega_\alpha| < |\omega_\alpha|$ lo cual es una contradicción$\#_c$. Por tanto, ω_α es ordinal límite.

De los tres incisos anteriores y usando el Teorema (3.29) se sigue que ω_α es ordinal límite infinito, para todo ordinal α.

De *(b)*: Por el Lema (3.59) se tiene que existe α ordinal tal que $\Omega \leqslant \omega_\alpha$ (por ejemplo, $\alpha = \Omega$). Por lo que, basta probar que para todo ordinal inicial Ω tal que $\Omega \leqslant \omega_\alpha$ existe un ordinal $\gamma \leqslant \alpha$ tal que:

$$\Omega = \omega_\gamma.$$

Procederemos por inducción sobre α.

- Si $\alpha = 0$ el resultado se tiene de forma inmediata, ya que si Ω es ordinal inicial infinito tal que $\Omega \leqslant \omega_\alpha = \omega_0 = \omega$, forzosamente $\Omega = \omega$, así que tomando $\gamma = \alpha$ se tiene el resultado.

- Supongamos que existe un ordinal α tal que para todo ordinal inicial infinito $\Omega \leqslant \omega_\alpha$ existe $\gamma \leqslant \alpha$ tal que $\Omega = \omega_\gamma$.

  Sea ahora Ω ordinal inicial infinito tal que $\Omega \leqslant \omega_{\alpha+1}$. Si $\Omega = \omega_{\alpha+1}$, se tiene el resultado tomando $\gamma = \alpha + 1$. Supongamos que $\Omega < \omega_{\alpha+1}$, es decir que $\Omega < \hbar(\omega_\alpha)$. Si $\omega_\alpha < \Omega$, entonces al ser Ω ordinal inicial se sigue que no es equipotente a ω_α, por lo cual por definición de número de Hartogs se tiene que $\hbar(\omega_\alpha) \leqslant \Omega$, pero esto contradice el hecho de que $\Omega < \hbar(\omega_\alpha)\#_c$. Por tanto, $\Omega \leqslant \omega_\alpha$. Por hipótesis de inducción, existe $\gamma \leqslant \alpha < \alpha + 1$ tal que $\Omega = \omega_\gamma$.

- Supongamos que $\alpha \neq 0$ es un ordinal límite tal que para todo $\beta < \alpha$ se tiene que si Ω es ordinal inicial infinito tal que $\Omega \leqslant \omega_\beta$, entonces existe $\gamma \leqslant \beta$ tal que $\Omega = \omega_\gamma$. Sea Ω un ordinal inicial infinito tal que $\Omega \leqslant \omega_\alpha$. Si $\Omega = \omega_\alpha$ se tiene el resultado. Si $\Omega < \omega_\alpha$, como:

$$\omega_\alpha = \sup \left\{ \omega_\beta \middle| \beta < \alpha \right\},$$

entonces, existe $\beta < \alpha$ tal que $\Omega \leqslant \omega_\beta < \alpha$, así que existe $\gamma \leqslant \beta < \alpha$ tal que $\Omega = \omega_\gamma$.

Por los tres incisos anteriores y usando el Teorema (3.29) se sigue que para todo ordinal inicial infinito Ω existe γ ordinal tal que $\Omega = \omega_\gamma$. ■

Con los resultados de esta sección se concluye que cualquier conjunto es equipotente a un ordinal inicial y, si es infinito, es equipotente a algún ω_α con α ordinal. Haremos una distinción entre los ordinales iniciales infinitos ω_α y los demás ordinales con la siguiente definición:

Definición 3.21 (Alephs)
Para cada ordinal α se define el ordinal inicial infinito:

$$\aleph_\alpha = \omega_\alpha$$

llamado **aleph** α.

En esencia los alephs son representantes de *clases de equivalencia* de conjuntos con la misma cardinalidad, pues estos cumplen que:

$$|\omega_\alpha| = \aleph_\alpha,$$

es decir que la cardinalidad de $\aleph_\alpha$ es $\aleph_\alpha$. Dado que la cardinalidad de todo conjunto coincide con algún aleph por el Teorema (3.60) inciso *(b)*, ya que por definición si X es un conjunto infinito, entonces $|X|$ es el único ordinal inicial infinito equipotente a X, luego existe un ordinal α tal que $|X| = \aleph_\alpha$. Resulta conveniente estudiar las operaciones entre ordinales pero ahora restringida a alephs.

Antes de ello, recapitulemos algunos resultados obtenidos sobre operaciones con ordinales:

Lema 3.61
Sean α, β y γ ordinales tales que $\beta \leqslant \gamma$. Entonces:

(1) $\alpha + \beta \leqslant \alpha + \gamma$ y $\beta + \alpha \leqslant \gamma + \alpha$.

(2) $\alpha \cdot \beta \leqslant \alpha \cdot \gamma$ y $\beta \cdot \alpha \leqslant \gamma \cdot \alpha$.

Demostración:
De *(1)*: El resultado se tiene por las Proposiciones (3.42) y (3.41) inciso *(a)*.

De *(2)*: La segunda parte se tiene por la Proposición (3.41) inciso *(b)*. Probaremos que $\alpha \cdot \beta \leqslant \alpha \cdot \gamma$, para ello, procederemos por inducción transfinita sobre γ, esto es, probaremos que para todo ordinal β tal que $\beta \leqslant \gamma$ se tiene que $\alpha \cdot \beta \leqslant \alpha \cdot \gamma$.

- Para $\gamma = 0$ se tiene que si β es un ordinal tal que $\beta \leqslant \gamma$, entonces $\beta = 0$, así que:

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot \gamma.$$

- Supongamos que γ es un ordinal tal que para todo ordinal β con $\beta \leqslant \gamma$ se tiene que $\alpha \cdot \beta \leqslant \alpha \cdot \gamma$. Sea β ordinal tal que $\beta \leqslant S(\gamma)$, se tienen dos casos:
  - $\beta \leqslant \gamma$, en cuyo caso se sigue por el inciso *(1)* que:
  $$\alpha \cdot \beta \leqslant \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + 0 \leqslant \alpha \cdot \gamma + \gamma = \alpha \cdot S(\gamma),$$
  pues $0 \leqslant \gamma$.
  - $\beta = S(\gamma)$, se sigue así que:
  $$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot S(\gamma).$$

  en cualquier caso se tiene que $\alpha \cdot \beta \leqslant \alpha \cdot S(\gamma)$.
- Supongamos que γ es un ordinal límite no cero tal que para todo ordinal ϵ con $\epsilon < \gamma$ se cumple lo siguiente: para todo ordinal β tal que $\beta \leqslant \epsilon$ se tiene:
  $$\alpha \cdot \beta \leqslant \alpha \cdot \epsilon.$$
  Sea β ordinal con $\beta \leqslant \gamma$. Se tienen dos casos:
  - Si $\beta = \gamma$ de forma inmediata se tiene que $\alpha \cdot \beta \leqslant \alpha \cdot \gamma$.
  - Si $\beta < \gamma$, entonces:
  $$\alpha \cdot \beta \leqslant \sup \left\{ \alpha \cdot \epsilon \middle| \epsilon < \gamma \right\} = \alpha \cdot \gamma.$$

  de los dos incisos anteriores se sigue que $\alpha \cdot \beta \leqslant \alpha \cdot \gamma$

Por los tres incisos anteriores y usando el Teorema (3.29) se sigue que para todo ordinal γ se tiene que si β es un ordinal con $\beta \leqslant \gamma$, entonces $\alpha \cdot \beta \leqslant \alpha \cdot \gamma$, lo cual prueba el resultado. ■

Sorprendentemente, la suma y producto de alephs difiere enormemente de la suma y producto usual de ordinales. Para ello, un resultado fundamental es el siguiente teorema, cuya demostración es un poco extensa y puede encontrarse en [HH03]:

Teorema 3.62
$\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ para todo ordinal α.

Como corolario tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.63 (Suma y Producto de Alephs)
Sean α y β ordinales tales que $\alpha \leqslant \beta$. Entonces:

(a) $\aleph_\beta \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$.

(b) Para todo $0 < n < \omega$: $n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot n = \aleph_\alpha$.

(c) $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\beta + \aleph_\alpha = \aleph_\beta$.

(d) Para todo $n < \omega$: $n + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha + n = \aleph_\alpha$.

Demostración:
Por la Observación (3.58) inciso *(1)* tenemos que:

$$\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\beta.$$

De *(a)*: Como $\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\beta$ entonces por el Lema (3.61) inciso *(2)* se tiene que:

$$\aleph_\beta = \aleph_\beta \cdot 1 \leqslant \aleph_\beta \cdot \aleph_\alpha \quad \text{y} \quad \aleph_\beta = 1 \cdot \aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta, \tag{3.5}$$

pues $1 \leqslant \aleph_\alpha$ y por el Ejemplo (3.37): $\aleph_\beta = 1 \cdot \aleph_\beta$. Además:

$$\aleph_\beta \cdot \aleph_\alpha \leqslant \aleph_\beta \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta \quad \text{y} \quad \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta \leqslant \aleph_\beta \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta, \tag{3.6}$$

por el lema antes mencionado inciso *(2)* dado que $\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\beta$. De las desigualdades (3.5) y (3.6) se sigue que $\aleph_\beta \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\beta$ y $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$, esto es que $\aleph_\beta \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$.

De *(b)*: Sea $0 < n < \omega$. Se tiene por el lema antes mencionado inciso *(2)*:

$$\aleph_\alpha = 1 \cdot \aleph_\alpha \leqslant n \cdot \aleph_\alpha \quad \text{y} \quad \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot 1 \leqslant \aleph_\alpha \cdot 1, \tag{3.7}$$

pues $1 \leqslant n$, además:

$$n \cdot \aleph_\alpha \leqslant \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \quad \text{y} \quad \aleph_\alpha \cdot n \leqslant \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha, \tag{3.8}$$

ya que $n \leqslant \aleph_\alpha$. De las desigualdades (3.7) y (3.8) se sigue que: $n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ y $\aleph_\alpha \cdot n = \aleph_\alpha$, esto es que $n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot n = \aleph_\alpha$.

De *(c)*: Análogo a lo hecho en *(a)*.

De *(d)*: Análogo a lo hecho en *(d)*. ∎

§3.4 Cardinales Regulares y Singulares

Resulta que podemos hacer una diferenciación de ordinales en dos tipos: regulares y singulares. La razón de esta diferenciación tiene sustento en la construcción de cierto tipo de sucesiones, por lo cual nuestro primer objetivo será definirlas y trabajar un poco con ellas:

Definición 3.22 (**Sucesión Transfinita**)
Sean ϑ un ordinal y X un conjunto.

- Una **sucesión transfinita de elementos de X de longitud ϑ** es una función $f : \vartheta \to X$. En este caso la función f es denotada por $(x_\nu | \nu < \vartheta)$ o por $(x_\nu)_{\nu<\vartheta}$.
- En el caso de que X es un conjunto cuyos elementos sean ordinales, diremos que $(x_\nu)_{\nu<\vartheta}$ es una **sucesión transfinita de ordinales**. En este caso la sucesión será denotada por $(\alpha_\nu)_{\nu<\vartheta}$.
  - Diremos que una sucesión transfinita es **creciente** si $\nu < \mu < \vartheta$ implica que $\alpha_\nu < \alpha_\mu$.
  - Si ϑ es un ordinal límite y la sucesión $(\alpha_\nu)_{\nu<\vartheta}$ es creciente, definimos el **límite de la sucesión** $(\alpha_\nu)_{\nu<\vartheta}$ por:

    $$\alpha = \lim_{\nu\to\vartheta} \alpha_\nu = \sup\left\{\alpha_\nu \middle| \nu < \vartheta\right\},$$

    en tal caso α es llamado **límite de la sucesión**.

Observación 3.64 (**Cardinal Infinito es Ordinal Límite**)
Si α es ordinal infinito, entonces la función $f : \alpha + 1 \to \alpha$ dada por:

$$f(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \beta = \alpha \\ \beta + 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant \beta < \omega \\ \beta & \text{si} \quad \omega \leqslant \beta < \alpha \end{cases}, \quad \forall \beta < \alpha + 1,$$

es una biyección entre $\alpha + 1$ y α.

Sea κ cardinal infinito, entonces κ es ordinal límite. En efecto, por ser cardinal es ordinal inicial, es decir que no tiene ningún subconjunto equipotente a él mismo, luego de lo anterior no puede ser ordinal sucesor. Además, por ser infinito no puede ser 0, con lo que debe ser ordinal límite.

Un lema que resultará útil más adelante es el siguiente:

Lema 3.65
Sea $(\alpha_\nu)_{\nu<\vartheta}$ una sucesión transfinita de ordinales de longitud ϑ, siendo este ordinal límite no cero, tal que:

$$\sup_{\nu<\vartheta} \alpha_\nu = \kappa \quad \text{y} \quad \alpha_\nu < \kappa, \quad \forall \nu < \vartheta, \tag{3.9}$$

con κ cardinal infinito. Entonces, existe una subsucesión creciente $\left(\alpha_{f(\mu)}\right)_{\mu<\lambda}$ de longitud λ, siendo este ordinal límite no cero, con $\lambda \leqslant \vartheta$ y tal que:

$$\lim_{\mu\to\lambda} \alpha_{f(\mu)} = \kappa,$$

con $f : \lambda \to \vartheta$ función creciente.

Demostración:
Primero construiremos al ordinal límite no cero λ. Sea:

$$C = \left\{ \nu < \vartheta \middle| \alpha_{\nu'} < \alpha_\nu \text{ para todo } \nu' < \nu \right\},$$

se tiene que $C \subseteq \vartheta$, como ϑ es bien ordenado bajo la relación $\leqslant$ se sigue que $(C, \leqslant)$ es un conjunto bien ordenado. Tomemos λ como el tipo de orden de $(C, \leqslant)$ (la definición de tipo de orden puede consultarse en el Anexo B). Afirmamos dos cosas:

- $\lambda \leqslant \vartheta$. Como $C \subseteq \vartheta$ y al ser λ el tipo de orden de $(C, \leqslant)$ se tiene por el Lema (B.8) que $\lambda \leqslant \vartheta$.
- λ **es ordinal límite**. Dado que $0 \in C$, se tiene que λ no puede ser 0. Si fuese ordinal sucesor, tendríamos que existe un ordinal $\beta < \vartheta$ tal que $\lambda = S(\beta)$. Sea $f : \lambda \to C$ una biyección tal que:

  $$\gamma \leqslant \delta \Rightarrow f(\gamma) \leqslant f(\delta), \tag{3.10}$$

  para todo $\gamma, \delta < \lambda = S(\beta)$. Por definición de C se cumple para $\beta < S(\beta)$ que:

  $$\alpha_\nu < \alpha_{f(\beta)}, \quad \forall \nu < f(\beta),$$

en particular, dado que $f(\beta)$ es el máximo de C por (3.10), se tiene que:

$$\alpha_\nu \leqslant \alpha_{f(\beta)}, \quad \forall \nu < \vartheta.$$

Por lo cual $\sup_{\nu<\vartheta} \alpha_\nu = \alpha_{f(\beta)} < \kappa$ ya que $f(\beta) < \vartheta$, lo cual contradice (3.9)$\#_c$. Por ende, λ debe ser ordinal límite no cero.

Sea $f : \lambda \to C$ con $C \subseteq \vartheta$ la función del segundo punto, esto es que es una biyección entre λ y C tal que:

$$\gamma \leqslant \delta \Rightarrow f(\gamma) \leqslant f(\delta), \tag{3.11}$$

para todo $\gamma, \delta < \lambda$. Afirmamos que f es creciente. En efecto, sean $\gamma, \delta < \lambda$ tales que $\gamma < \delta$, por (3.11) se tiene que $f(\gamma) \leqslant f(\delta)$, pero al ser f biyección debe suceder forzosamente que $f(\gamma) < f(\delta)$. Se sigue así que f es creciente.

Consideremos la subsucesión $\left(\alpha_{f(\mu)}\right)_{\mu<\lambda}$, por construcción esta sucesión es creciente. Para finalizar hay que mostrar que:

$$\lim_{\mu\to\lambda} \alpha_{f(\mu)} = \kappa.$$

En efecto, por definición de límite y como $\alpha_\nu < \kappa$ para todo $\nu < \vartheta$, en particular $\alpha_{f(\mu)} < \kappa$ para todo $\mu < \lambda$, se sigue que:

$$\lim_{\mu\to\lambda} \alpha_{f(\mu)} \leqslant \kappa.$$

Supongamos que $\beta = \lim_{\mu\to\lambda} \alpha_{f(\mu)} < \kappa$. Como $\sup_{\nu<\vartheta} a_\nu = \kappa$, entonces existe $\nu < \vartheta$ tal que:

$$\beta < \alpha_\nu < \kappa.$$

Tomemos:

$$\nu_0 = \min\left\{\nu < \vartheta \middle| \beta < \alpha_\nu\right\}, \tag{3.12}$$

este mínimo existe, pues el conjunto de la derecha es no vacío, ya que contiene a ν. Se tiene que $\nu_0 \in C$, porque al ser ν_0 el mínimo se tiene que no existe $\nu' < \nu_0$ tal que:

$$\beta < \alpha_{\nu'},$$

por lo cual:

$$\alpha_{\nu'} \leqslant \beta < \alpha_{\nu_0}, \quad \forall \nu' < \nu_0.$$

Se sigue así que $\nu_0 \in C$. Como $\operatorname{ran}(f) = C$, entonces existe $\mu_0 < \lambda$ tal que:

$$f(\mu_0) = \nu_0,$$

luego:

$$\alpha_{f(\mu_0)} \leqslant \lim_{\mu\to\lambda} \alpha_{f(\mu)} = \beta < \kappa,$$

es decir que $\alpha_{\nu_0} \leqslant \beta$ lo cual contradice la elección de ν_0 en (3.12)$\#_c$. Por tanto:

$$\lim_{\mu\to\lambda} \alpha_{f(\mu)} = \kappa$$

■

Observación 3.66
Por el Teorema (3.24) si X es un conjunto de ordinales, entonces:

$$\sup X = \bigcup_{\alpha \in X} \alpha.$$

La observación anterior nos ayudará más adelante, ya que la misma nos permite determinar límites de sucesiones transfinitas crecientes de ordinales. Con todo lo que hemos enunciado hasta ahora estamos en condiciones de hacer la siguiente definición:

Definición 3.23 (Cardinales Singulares y Regulares)
Un cardinal infinito κ es llamado **singular** si existe una sucesión transfinita creciente de ordinales $(\alpha_\nu)_{\nu<\vartheta}$ con $\alpha_\nu < \kappa$ para todo $\nu < \vartheta$, siendo ϑ un ordinal límite menor a κ, tal que:

$$\kappa = \lim_{\nu \to \vartheta} \alpha_\nu.$$

En caso de que no suceda lo anterior para el cardinal κ diremos que κ es **regular**.

Ejemplo 3.67 ($\aleph_\omega$ es Singular)
Se tiene que $\aleph_\omega$ es cardinal singular. En efecto, notemos que por definición de $\aleph_\omega$ y la Observación (3.66):

$$\aleph_\omega = \bigcup_{n<\omega} \aleph_n = \sup \left\{ \aleph_n \middle| n < \omega \right\}.$$

La sucesión $(\aleph_n)_{n<\omega}$ es una sucesión transfinita creciente de ordinales tales que $\aleph_n < \aleph_\omega$, para todo $n < \omega < \aleph_\omega$, que por lo anterior cumple que:

$$\aleph_\omega = \lim_{n \to \omega} \aleph_n.$$

Se sigue que $\aleph_\omega$ es cardinal singular.

Nuestro objetivo ahora será probar algunas propiedades y caracterizar tanto cardinales regulares como singulares. Para ello, antes enunciamos la siguiente definición:

Definición 3.24 (Conjunto Acotado y No Acotado de Ordinales)
Un subconjunto $X \subseteq \kappa$ con κ cardinal infinito es **acotado** si $\sup(X) < \kappa$ y es **no acotado** si $\sup(X) = \kappa$.

Teorema 3.68 (Propiedades de los Cardinales Regulares)
Sea κ un cardinal regular.

(a) Si $X \subseteq \kappa$ es tal que $|X| < \kappa$ entonces X es acotado. Por ende, todo subconjunto no acotado de κ tiene cardinalidad κ.

(b) Si $\lambda < \kappa$ y $f : \lambda \to \kappa$, entonces $\operatorname{ran}(f)$ es acotado.

Demostración:

De *(a)*: Si X es vacío es claro que X es acotad. Supongamos que X es no vacío, si tiene elemento máximo, entonces es acotado, por lo que supongamos que X no tiene elemento máximo. En tal caso se sigue que el tipo de orden de $(X, \leqslant)$ es un ordinal límite (la definición de tipo de orden se hace en el Anexo B), digamos ϑ. Sea:

$$\left\{\alpha_\nu \in X \middle| \nu < \vartheta\right\}$$

una enumeración creciente de X. Como $|\vartheta| = |X| < \kappa$, entonces $\vartheta < \kappa$, luego como κ es cardinal regular se sigue que:

$$\sup X = \lim_{\nu \to \vartheta} \alpha_\nu < \kappa.$$

Así que X es acotado. La segunda parte se tiene usando la contrapositiva de lo probado anteriormente.

De *(b)*: Como $|\operatorname{ran}(f)| \leqslant |\lambda| < \kappa$ se sigue del inciso *(a)* que $\operatorname{ran}(f)$ es acotado. ■

Para caracterizar a los ordinales singulares debemos introducir la siguiente definición:

Definición 3.25 (**Suma Infinita de Cardinales**)
Sea $\left\{\kappa_i \middle| i \in I\right\}$ un conjunto de cardinales. Definimos su **suma** como:

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \left|\bigcup_{i \in I} X_i\right|,$$

donde $\left\{X_i \middle| i \in I\right\}$ es una familia de conjuntos disjuntos a pares tales que $|X_i| = \kappa_i$, para todo $i \in I$.

Notemos que esta definición no depende de la elección de los X_i, ya que solo depende de la cardinalidad de estos conjuntos.

Veamos ahora que esta definición coincide con la definición de suma finita de ordinales. Para ello, sean κ_1 y κ_2 ordinales. Si X_1 y X_2 son conjuntos disjuntos tales que $|X_1| = \kappa_1$ y $|X_2| = \kappa_2$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\sum_{i \in \{1,2\}} \kappa_i &= \left|\bigcup_{i \in \{1,2\}} X_i\right| \\ &= |X_1 \cup X_2| \\ &= |X_1| + |X_2| \\ &= \kappa_1 + \kappa_2,\end{aligned}$$

con lo que esta suma de cardinales extiende naturalmente la suma finita de cardinales.

El siguiente lema es probado en [HH03] y nos ayudará para caracterizar a los cardinales singulares.

Lema 3.69
Sean λ cardinal infinito y $\left\{\kappa_\alpha \middle| \alpha < \lambda\right\}$ un conjunto de cardinales tales que $\kappa_\alpha > 0$, para todo

$\alpha < \lambda$. Entonces:

$$\sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha = \lambda \cdot \sup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha.$$

Con el lema anterior podemos ahora caracterizar los cardinales singulares:

Lema 3.70 (**Caracterización de los Cardinales Singulares**)
Un cardinal infinito κ es singular si y solo si:

$$\kappa = \sum_{\nu<\vartheta} \kappa_\nu,$$

siendo $(\kappa_\nu)_{\nu<\vartheta}$ una sucesión transfinita de cardinales de longitud ϑ tal que $\kappa_\nu < \kappa$ para todo $\nu < \vartheta$ y $\vartheta < \kappa$ con ϑ ordinal límite.

Demostración:

$\Rightarrow$): Supongamos que κ es singular, entonces por definición existe una sucesión transfinita creciente de ordinales $(\alpha_\nu)_{\nu<\vartheta}$ de longitud ϑ con $\vartheta < \kappa$ y $\alpha_\nu < \kappa$ para todo $\nu < \vartheta$, con ϑ ordinal límite, tal que $\kappa = \text{lím}_{\nu\to\vartheta} \alpha_\nu$. Por la Observación (3.66) y la definición de límite de una sucesión transfinita creciente de ordinales se tiene que:

$$\bigcup_{\nu<\vartheta} \alpha_\nu = \sup\left\{\alpha_\nu \middle| \nu < \vartheta\right\} = \lim_{\nu\to\vartheta} \alpha_\nu = \kappa. \tag{3.13}$$

Notemos que:

$$\bigcup_{\nu<\vartheta} \alpha_\nu = \bigcup_{\nu<\vartheta} \left(\alpha_\nu \setminus \bigcup_{\xi<\nu} \alpha_\xi\right).$$

Sea $A_\nu = \alpha_\nu \setminus \left(\bigcup_{\xi<\nu} \alpha_\xi\right)$ para todo $\nu < \vartheta$. Tomemos:

$$\kappa_\nu = |A_\nu| = \left|\alpha_\nu \setminus \bigcup_{\xi<\nu} \alpha_\xi\right|, \quad \forall \nu < \vartheta.$$

Se tiene que la sucesión transfinita $(\kappa_\nu)_{\nu\in\vartheta}$ de longitud ϑ es tal que:

$$\sum_{\nu<\vartheta} \kappa_\nu = \left|\bigcup_{\nu<\vartheta} A_\nu\right|,$$

pues los A_ν son disjuntos a pares, además cumple que $\kappa_\nu \leqslant |\alpha_\nu| \leqslant \alpha_\nu < \kappa$ para todo $\nu < \kappa$. Por construcción de los A_ν se tiene que $\bigcup_{\nu<\vartheta} A_\nu = \bigcup_{\nu<\vartheta} \alpha_\nu$, por lo cual de (3.13) y de la igualdad anterior se sigue que:

$$\sum_{\nu\in\vartheta} \kappa_\nu = |\kappa| = \kappa,$$

donde la segunda igualdad se tiene por ser κ cardinal, así que $(\kappa_\nu)_{\nu<\vartheta}$ es la sucesión deseada.

$\Leftarrow$): Supongamos que:

$$\kappa = \sum_{\nu<\vartheta} \kappa_\nu,$$

con $(\kappa_\nu)_{\nu<\vartheta}$ una sucesión transfinita de cardinales tales que $\kappa_\nu < \kappa$ para todo $\nu < \vartheta$ con $\vartheta < \kappa$ siendo ϑ ordinal límite. Tomemos:

$$K = \left\{ \nu < \vartheta \middle| \kappa_\nu > 0 \right\},$$

y sea λ el tipo de orden de $(K, \leqslant)$. Por el Lema (B.8) se tiene que $\lambda \leqslant \vartheta$. Sea $f : \lambda \to K$ una biyección tal que:

$$\xi < \zeta \Rightarrow f(\xi) \leqslant f(\zeta),$$

para todo $\xi, \zeta < \lambda$. Veamos que:

$$\kappa = \sum_{\mu<\lambda} \kappa_{f(\mu)}.$$

En efecto, como $\kappa = \sum_{\nu<\vartheta} \kappa_\nu$, entonces para $\left\{ X_\nu \middle| \nu < \vartheta \right\}$ familia de conjuntos disjuntos a pares tales que $|X_\nu| = \kappa_\nu$, para todo $\nu < \vartheta$, se tiene que:

$$\kappa = \left| \bigcup_{\nu<\vartheta} X_\nu \right| = \left| \bigcup_{\mu<\lambda} X_{f(\mu)} \right|,$$

ya que podemos eliminar los conjuntos X_ν tales que $\kappa_\nu = 0$, pues estos son vacíos. Por tanto, $\kappa = \sum_{\mu<\lambda} \kappa_{f(\mu)}$. Ahora, existe una biyección $g : |\lambda| \to \lambda$, por lo cual para la familia de cardinales $\left\{ \kappa_{f\circ g(\eta)} \middle| \eta < |\lambda| \right\}$ se cumple que:

$$\bigcup_{\mu<\lambda} X_{f(\mu)} = \bigcup_{\eta<|\lambda|} X_{f\circ g(\eta)},$$

así que:

$$\kappa = \left| \bigcup_{\eta<|\lambda|} X_{f\circ g(\eta)} \right| = \sum_{\eta<|\lambda|} \kappa_{f\circ g(\eta)},$$

siendo esta suma tal que $\kappa_{f\circ g(\eta)} > 0$, para todo $\eta < |\lambda|$. Por el Lema (3.69) se tiene que:

$$\kappa = |\lambda| \cdot \sup_{\eta<|\lambda|} \kappa_{f\circ g(\eta)}.$$

Como $|\lambda| \leqslant \lambda \leqslant \vartheta < \kappa$, forzosamente debe suceder por el Corolario (3.63) que:

$$\kappa = \sup_{\eta<|\lambda|} \kappa_{f\circ g(\eta)}.$$

En particular, por la elección de K se debe cumplir que:

$$\kappa = \sup_{\nu<\vartheta} \kappa_\nu.$$

Por tanto, la sucesión transfinita $(\kappa_\nu)_{\nu<\vartheta}$ tiene como supremo a κ y es tal que $\kappa_\nu < \kappa$ para todo $\nu < \vartheta$. Por el Lema (3.65) existe una subsucesión creciente $\left(\kappa_{h(\upsilon)}\right)_{\upsilon<\sigma}$ de longitud $\sigma \leqslant \vartheta$, con σ ordinal límite, tal que:

$$\lim_{\upsilon\to\sigma} \kappa_{h(\upsilon)} = \kappa,$$

se cumple que $\kappa_{h(\upsilon)} < \kappa$, para todo $\upsilon < \sigma$ y que $\sigma \leqslant \vartheta < \kappa$. Se sigue de la definición que κ es cardinal singular. ■

Como corolario tenemos el siguiente resultado, el cual nos ayudará más adelante para probar la regularidad del cardinal $\mathfrak{b}$:

Corolario 3.71
Un cardinal infinito κ es singular si y solo si:

$$\kappa = \bigcup_{\nu<\vartheta} A_\nu,$$

donde $(A_\nu)_{\nu<\vartheta}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos a pares tales que $|A_\nu| < \kappa$ para todo $\nu < \vartheta$ y $\vartheta < \kappa$ con ϑ ordinal límite.

Demostración:
$\Rightarrow$): Se hizo en el Lema (3.70).

$\Leftarrow$): Por definición de suma de cardinales y por ser κ cardinal se sigue que:

$$\kappa = \left|\bigcup_{\nu<\vartheta} A_\nu\right| = \sum_{\nu<\vartheta} |A_\nu|,$$

con $|A_\nu| < \kappa$ para todo $\nu < \vartheta$ y $\vartheta < \kappa$ con ϑ ordinal límite. Del Lema (3.70) se sigue el resultado. ■

Ejemplo 3.72 (ω_1 **es Regular**)
El cardinal ω_1 es regular. En efecto, si fuese singular se tendría por el Corolario (3.71) que:

$$\omega_1 = \bigcup_{\nu<\vartheta} A_\nu,$$

donde $(A_\nu)_{\nu<\vartheta}$ es una sucesión transfinita de conjuntos disjuntos a pares tales que $|A_\nu| < \omega_1$ y $\vartheta < \omega_1$ con ϑ ordinal límite. En particular debe tenerse que:

$$|A_\nu| \leqslant \omega_0 = \omega,$$

y

$$|\vartheta| \leqslant \omega_0 = \omega.$$

Por lo cual estaríamos diciendo que ω_1 es unión a lo sumo numerable de conjuntos a lo sumo numerables, el cual sabemos que es a lo sumo numerable, lo cual contradice la elección de ω_1, pues por definición es el menor ordinal que no equipotente a ningún subconjunto de ω_0, en particular no puede ser a lo sumo numerable$\#_c$.

Por tanto, ω_1 es regular.

§3.5 Lema de Fodor

Para terminar nuestro estudo de ordinales, tendremos como objetivo probar Lema de Fodor, mismo que resultará fundamental para un resultado del Capítulo 4. Antes de ello, estudiaremos un poco las propiedades topológicas de los conjuntos de ordinales.

Sea α ordinal. Podemos dotar al espacio $(\alpha, <)$ de la topología del orden, es decir, topología que tiene como básicos a los conjuntos de la forma:

$$(\lambda, \mu) = \left\{\beta < \alpha \middle| \lambda < \beta < \mu\right\},$$

con $\lambda, \mu < \alpha$ tales que $\lambda < \mu$. Denotamos a este espacio topológico por $[0, \alpha)$. Estudiaremos algunas propiedades de este espacio.

Antes, notemos que dado un conjunto X de ordinales, siempre existe un ordinal α tal que $\beta < \alpha$ para todo $\beta \in X$ (tome, por ejemplo $\alpha = \sup X + 1$).

Observación 3.73
Sean α y β ordinales tales que $\beta < \alpha$ y $X \subseteq \alpha$. Si $\beta = 0$ o β es ordinal sucesor, entonces estos no pueden ser puntos de acumulación de X, ya que:

- Si $\beta = 0$ entonces $U = [0, 1) = \{0\} = \{\beta\}$ es un abierto que contiene a β.
- Si β es ordinal sucesor, entonces existe un ordinal γ tal que $\beta = \gamma + 1$, con lo que el conjunto $U = (\gamma, \gamma + 2) = \{\gamma + 1\} = \{\beta\} \subseteq \alpha$ es un abierto que contiene a β.

En ambos casos hemos construido un abierto U que contiene a β tal que:

$$X \cap (U \setminus \{\beta\}) = \emptyset$$

Con lo que β no es punto de acumulación de X.

La observación anterior motiva al siguiente lema:

Lema 3.74
Sean α ordinal y $X \subseteq \alpha$. Si β es ordinal tal que es punto de acumulación de X, entonces β es ordinal límite no cero.

Demostración:
Es inmediato de la Observación (3.73). ■

El siguiente lema nos ayuda a caracterizar a los puntos de acumulación de un conjunto de ordinales. Antes, de la definición de punto de acumulación se tiene que si β es punto de acumulación de algún $X \subseteq \alpha$, entonces $\beta < \alpha$, pues el punto de acumulación debe ser elemento de α.

Lema 3.75 (**Caracterización de los Puntos de Acumulación**)
Sean α ordinal, $X \subseteq \alpha$ y $\beta < \alpha$. Entonces, un ordinal límite β es punto de acumulación de X si y solo si $\sup(X \cap \beta) = \beta$.

Demostración:
$\Rightarrow$): Supongamos que β ordinal límite es punto de acumulación de X. Por lo enunciado anteriormente debe suceder que $\beta < \alpha$. Como β es punto de acumulación de X se tiene que para todo abierto $U \subseteq \alpha$:

$$X \cap (U \setminus \{\beta\}) \neq \emptyset.$$

En particular, para todo $\gamma < \beta$ el conjunto:

$$U_\gamma = \left\{\lambda \middle| \gamma < \lambda < \beta + 1\right\},$$

es un abierto subconjunto de α que contiene a β, ya que $\beta + 1 \leqslant \alpha$ para el cual se cumple que:

$$X \cap (U_\gamma \setminus \{\beta\}) \neq \emptyset, \quad \forall \gamma < \beta.$$

Por tanto, para todo $\gamma < \beta$ existe $\lambda_\gamma < \beta$ con $\lambda_\gamma \in X$ tal que:

$$\gamma < \lambda_\gamma < \beta,$$

por lo cual:

$$\sup(X \cap \beta) = \beta,$$

ya que $\beta = \sup_{\gamma<\beta} \gamma$ por ser ordinal límite.

$\Leftarrow$): Supongamos que:

$$\sup(X \cap \beta) = \beta.$$

Para ver que β es punto de acumulación de X basta con probar que para todo abierto U que contenga a β se cumple que:

$$X \cap (U \setminus \{\beta\}) \neq \emptyset.$$

En particular, como $\beta < \alpha$ basta probar lo anterior para conjuntos de la forma:

$$U_\gamma = \left\{\lambda \middle| \gamma < \lambda < \beta + 1\right\} = (\gamma, \beta + 1), \quad \forall \gamma < \beta,$$

pues, U_γ es un básico que contiene a β. Como β es el supremo de $X \cap \beta$, entonces:

$$\beta = \bigcup_{\epsilon \in X \cap \beta} \epsilon,$$

por lo cual, para todo $\gamma < \beta$ existe $\epsilon_\gamma \in X \cap \beta$ tal que $\gamma \in \epsilon_\gamma$, esto es que $\gamma < \epsilon_\gamma$, así que:

$$X \cap (U_\gamma \setminus \{\beta\}) \neq \emptyset, \quad \forall \gamma < \beta.$$

Se sigue así que β es punto de acumulación de X. ■

Ejemplo 3.76
Si $X = \omega = [0, \omega)$, entonces $\omega > 0$ no es punto de acumulación de X a pesar de que $\sup(\omega) = \omega$, pues $X \cap \omega = \omega$. Esto se debe que $\omega \notin X$.

En cambio, si $X = \omega + 1 = [0, \omega] = [0, \omega + 1)$ entonces $\omega > 0$ sí es punto de acumulación de X.

Definición 3.26 (Conjunto CLUB y Estacionario)
Sea κ un cardinal regular no numerable. Un subconjunto $C \subseteq \kappa$ es llamado **CLUB** (por las siglas en inglés de *CLosed UnBounded*) si C es no acotado en κ y es cerrado en κ.

Un subconjunto $S \subseteq \kappa$ es llamado **estacionario** si $S \cap C \neq \emptyset$ para todo C subconjunto CLUB de κ.

Ejemplo 3.77
El conjunto $C = \omega_1$ es CLUB. En efecto, esto se sigue del hecho de que ω_1 es regular no numerable por el Ejemplo (3.72), de que es no acotado y es cerrado en ω_1.

Más aún, todo conjunto de la forma $[\alpha, \kappa)$ con $\alpha < \kappa$ es CLUB, siendo κ cardinal regular no numerable.

Lema 3.78 (**Caracterización de los Conjuntos CLUB**)
Sea κ un cardinal regular no numerable. Un subconjunto no acotado $C \subseteq \kappa$ es cerrado si y solo si para toda sucesión creciente $(\alpha_\xi)_{\xi<\gamma}$ en C de longitud γ con $\gamma < \kappa$ tal que:

$$\lim_{\xi\to\gamma} \alpha_\xi = \alpha < \kappa,$$

se tiene que $\alpha \in C$.

Demostración:
$\Rightarrow$): Supongamos que $C \subseteq \kappa$ es cerrado. Sea $(\alpha_\xi)_{\xi<\gamma}$ una sucesión creciente de elementos de C de longitud γ con $\gamma < \kappa$. Se tiene por el Teorema (3.24):

$$\alpha = \lim_{\xi\to\gamma} \alpha_\xi = \bigcup_{\xi<\gamma} \alpha_\xi = \sup\left\{\alpha_\xi \middle| \xi < \gamma\right\}. \tag{3.14}$$

Tenemos tres casos:

- α es 0, en cuyo caso la sucesión tenía longitud $\gamma = 1$, luego $\alpha = \alpha_0 \in C$.
- α es ordinal sucesor, en cuyo caso debe tenerse que γ es ordinal sucesor, así que existe $\xi < \gamma$ tal que $\gamma = \xi + 1$. Se tiene así por (3.14) que:
$$\alpha = \alpha_\xi \in C.$$
- α es ordinal límite. Veamos que:
$$\sup(C \cap \alpha) = \alpha.$$
En efecto, como:
$$\left\{\alpha_\xi \middle| \xi < \gamma\right\} \subseteq C \cap \alpha,$$
se sigue que:
$$\sup\left\{\alpha_\xi \middle| \xi < \gamma\right\} \leqslant \sup(C \cap \alpha) \leqslant \alpha,$$
y por (3.14) obtenemos que $\sup(C \cap \alpha) = \alpha$. Por el Lema (3.75) se tiene que α es punto de acumulación, luego al ser C cerrado se sigue que $\alpha \in C$.

Por los tres incisos anteriores se sigue que $\alpha \in C$.

$\Leftarrow$): Supongamos que para toda sucesión creciente $(\alpha_\xi)_{\xi<\gamma}$ en C de longitud γ con $\gamma < \kappa$ se tiene que:

$$\lim_{\xi\to\gamma} \alpha_\xi \in C.$$

Para probar que C es cerrado basta con ver que contiene a todos sus puntos de acumulación. Sea α un punto de acumulación de C, se cumple que:

$$\sup(C \cap \alpha) = \alpha.$$

Por el Lema (3.74) se tiene que α es ordinal límite no cero. El conjunto $C \cap \alpha$ es bien ordenado por $\leqslant$ (ya que es subconjunto de α), tomemos a γ como el tipo de orden de $(C \cap \alpha, \leqslant)$ (la definición de tipo de orden puede consultarse en el Anexo B), por el Lema (B.8) se tiene que $\gamma = \|(C \cap \alpha, \leqslant)\| \leqslant \alpha$ y como $\alpha < \kappa$, entonces $\gamma < \kappa$.

Al ser γ el tipo de orden de $(C \cap \alpha, \leqslant)$, existe una biyección $f : \gamma \to C \cap \alpha$ tal que:

$$\xi \leqslant \zeta \Rightarrow f(\xi) \leqslant f(\zeta),$$

para todo $\xi, \zeta < \gamma$. Esta función es creciente pues si $\xi, \zeta < \gamma$ son tales que $\xi < \zeta$ se tiene por lo anterior que $f(\xi) < f(\zeta)$, ya que f es biyección. Definimos la sucesión $(\beta_\xi)_{\xi<\gamma}$ dada como sigue:

$$\beta_\xi = f(\xi), \quad \forall \xi < \gamma.$$

Básicamente esta sucesión enumera todos los elementos de $C \cap \alpha$ de forma creciente, pues, f es creciente. Por construcción tenemos que:

$$\lim_{\xi \to \gamma} \beta_\xi = \sup(C \cap \alpha) = \alpha < \kappa$$

por lo cual, usando la hipótesis se sigue que $\alpha \in C$. Con lo cual C contiene a todos sus puntos de acumulación. ■

Proposición 3.79
Sea κ cardinal regular no numerable. Si $C \subseteq \kappa$ y $D \subseteq \kappa$ son conjuntos CLUB, entonces $C \cap D$ también lo es.

Demostración:
Como $C, D \subseteq \kappa$ son CLUB, en particular son cerrados, luego su intersección $C \cap D$ es cerrada. Así que basta con probar que $C \cap D$ es no acotado.

Sea $\alpha_0 < \kappa$. Como C es no acotado, entonces existe $\alpha_1 \in C$ tal que $\alpha_0 < \alpha_1$. Análogamente, existe $\alpha_2 \in D$ tal que $\alpha_1 < \alpha_2$. Procediendo por inducción tenemos construida una sucesión $(\alpha_n)_{n<\omega}$ tal que:

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \dots$$

donde $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots \in C$ y $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \dots \in D$. Tomemos:

$$\alpha = \lim_{n \to \omega} \alpha_n.$$

Como C y D son conjuntos CLUB, se sigue por el Lema (3.78) que:

$$\lim_{n \to \omega} \alpha_{2n+1} \in C \quad \text{y} \quad \lim_{n \to \omega} \alpha_{2(n+1)} \in D,$$

pero:

$$\alpha = \lim_{n \to \omega} \alpha_n = \lim_{n \to \omega} \alpha_{2(n+1)} = \lim_{n \to \omega} \alpha_{2n+1},$$

por lo cual $\alpha \in C \cap D$. Así que para todo $\alpha_0 < \kappa$ existe $\alpha \in C \cap D$ tal que $\alpha_0 < \alpha$. Por tanto, $C \cap D$ es no acotado. Se sigue así que $C \cap D$ es conjunto CLUB. ■

Lema 3.80
Sea κ cardinal regular no numerable. Entonces, si $S \subseteq \kappa$ es estacionario y $C \subseteq \kappa$ es CLUB se tiene que $S \cap C$ es estarionario.

Demostración:
Sea $D \subseteq \kappa$ conjunto CLUB. Se tiene que:

$$(S \cap C) \cap D = S \cap (C \cap D),$$

donde $C \cap D$ es CLUB por la Proposición (3.79), así que al ser S estacionario se sigue que $S \cap (C \cap D) \neq \emptyset$, esto es que:

$$(S \cap C) \cap D \neq \emptyset.$$

Por tanto, $S \cap C$ es estacionario. ■

Un hecho interesante de los conjuntos CLUB es que la intersección de los mismos sigue siendo CLUB, siempre que sea una cantidad menor κ:

Proposición 3.81
Sea κ cardinal regular no numerable. Si $\gamma < \kappa$ y $(C_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ es una sucesión de conjuntos CLUB de longitud γ, entonces el conjunto:

$$C = \bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha$$

es CLUB.

Demostración:
Procederemos por inducción sobre $\gamma < \kappa$.

- El caso $\gamma = 0$ es inmediato, ya que la sucesión constaría de un solo elemento.
- Supongamos que existe un ordinal $\gamma < \kappa$ tal que para toda sucesión de conjuntos CLUB de longitud γ se tiene que su intersección es CLUB. Sea $(C_\alpha)_{\alpha<\gamma+1}$ una sucesión de conjuntos CLUB de longitud $\gamma + 1$. Se tiene que:

  $$\bigcap_{\alpha<\gamma+1} C_\alpha = \left(\bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha \right) \cap C_\gamma,$$

  donde $\bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha$ es CLUB por hipótesis de inducción. Por el Lema (3.79) se sigue que $\bigcap_{\alpha<\gamma+1} C_\alpha$ es CLUB.
- Supongamos que $\gamma \neq 0$ es ordinal límite tal que para toda sucesión de conjuntos CLUB de longitud $\epsilon < \gamma$ se tiene que su intersección es CLUB. Sea $(C_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ una sucesión de conjuntos CLUB de longitud γ. Se tiene que el conjunto:

  $$C = \bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha,$$

  es cerrado por ser intersección arbitraria de cerrados. Veamos que es no acotado. Para ello, definimos:

  $$D_\alpha = \bigcap_{\xi\leqslant\alpha} C_\xi, \quad \forall \alpha < \gamma.$$

  Por hipótesis de inducción D_α es CLUB, para todo $\alpha < \gamma$ y, además, $C = \bigcap_{\alpha<\gamma} D_\alpha$. Se cumple que:

  $$D_0 \supseteq D_1 \supseteq \cdots \supseteq D_\alpha \supseteq \dots, \quad \forall \alpha < \gamma \tag{3.15}$$

  Sea $\alpha < \kappa$. Construimos una sucesión de ordinales de longitud γ por recursión transfinita como sigue:

- Tomemos β_0 ordinal tal que $\beta_0 \in D_0$ y $\alpha < \beta_0$, esto es posible, pues D_0 es CLUB.
- Para todo ordinal $\xi < \gamma$ tomemos $\beta_\xi \in D_\xi$ tal que:

$$\sup\left\{\beta_\nu \middle| \nu < \xi\right\} < \beta_\xi,$$

  esto es posible pues, nuevamente D_ξ es CLUB y $\sup\left\{\beta_\nu \middle| \nu < \xi\right\} < \kappa$, por ser κ cardinal regular.

La sucesión construida cumple que:

$$\beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_\xi < \ldots, \quad \forall \xi < \gamma,$$

es decir, que $(\beta_\xi)_{\xi<\gamma}$ es creciente con $\gamma < \kappa$. Por ser κ cardinal regular debe suceder que:

$$\beta = \lim_{\xi \to \gamma} \beta_\xi < \kappa.$$

Ahora, para cada $\eta < \kappa$ se tiene que β es el límite de la sucesión $(\beta_\xi)_{\eta\leqslant\xi<\gamma}$ de elementos en D_η (por (3.15)), por lo que al ser D_η CLUB, del Lema (3.78) se sigue que $\beta \in D_\eta$. Así que:

$$\beta \in \bigcap_{\alpha<\gamma} D_\alpha,$$

es decir que $\beta \in C$. Se concluye que para todo $\alpha < \gamma$ existe $\beta \in C$ tal que $\alpha < \beta < \kappa$. Por tanto, C es no acotado en κ, luego C es CLUB por ser cerrado.

Por los tres incisos anteriores y el Teorema (3.29) se sigue el resultado. ■

¿Por qué solo una intersección de una sucesión de longitud $\gamma < \kappa$?

Ejemplo 3.82 (Intersección Arbitraria Conjuntos CLUB no es CLUB)
Sea κ cardinal regular no numerable. Consideremos la sucesión $(C_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ de conjuntos CLUB dados por:

$$C_\alpha = [\alpha, \kappa), \quad \forall \alpha < \kappa.$$

Se verifica que $\bigcap_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \emptyset$, que es un subconjunto cerrado de κ, pero que es acotado.

Definición 3.27 (Intersección Diagonal)
Sean κ cardinal y $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ una sucesión de subconjuntos de κ. La **intersección diagonal de** $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ se define como el conjunto:

$$\mathop{\triangle}_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \left\{\xi < \kappa \middle| \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} X_\alpha\right\}.$$

Lema 3.83 (Caracterizaciones de la Intersección Diagonal)
Sean κ cardinal y $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ sucesión de subconjuntos de κ. Entonces:

(1) $\mathop{\triangle}_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \mathop{\triangle}_{\alpha<\kappa} \left(\bigcap_{\xi\leqslant\alpha} X_\alpha\right)$.

(2) $\underset{\alpha<\kappa}{\triangle} X_\alpha = \underset{\alpha<\kappa}{\triangle} Y_\alpha$ donde $Y_\alpha = \left\{\xi \in X_\alpha \middle| \alpha < \xi\right\}$.

(3) $\underset{\alpha<\kappa}{\triangle} X_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha<\kappa} \left(X_\alpha \cup \left\{\xi \middle| \xi \leqslant \alpha\right\}\right)$.

Demostración:
De *(1)*: Probaremos la doble contención:

- Si $\zeta \in \underset{\alpha<\kappa}{\triangle} X_\alpha$, entonces $\zeta < \kappa$ es tal que $\zeta \in \bigcap_{\alpha<\zeta} X_\alpha$, así que $\zeta \in X_\alpha$, para todo $\alpha < \zeta$, luego en particular:
$$\zeta \in \bigcap_{\xi\leqslant\alpha} X_\xi,$$
para todo $\alpha < \zeta$, así que $\zeta \in \bigcap_{\alpha<\zeta} \left(\bigcap_{\xi\leqslant\alpha} X_\xi\right)$ con lo que de la definición de intersección diagonal se tiene que $\zeta \in \underset{\alpha<\kappa}{\triangle} \left(\bigcap_{\xi\leqslant\alpha} X_\xi\right)$.

- Si $\zeta \in \underset{\alpha<\kappa}{\triangle} \left(\bigcap_{\xi\leqslant\alpha} X_\xi\right)$, entonces $\zeta < \kappa$ es tal que $\zeta \in \bigcap_{\alpha<\zeta} \left(\bigcap_{\xi\leqslant\alpha} X_\xi\right)$. Notemos que:
$$\bigcap_{\alpha<\zeta} \left(\bigcap_{\xi\leqslant\alpha} X_\xi\right) \subseteq \bigcap_{\alpha<\zeta} X_\alpha,$$
por ende $\zeta \in \bigcap_{\alpha<\zeta} X_\alpha$. Se sigue así que $\zeta \in \underset{\alpha<\kappa}{\triangle} X_\alpha$.

Por los dos incisos anteriores se tiene la igualdad.
De *(2)*: Probaremos la doble contención. Para ello, notemos antes que:
$$\begin{aligned} \underset{\alpha<\kappa}{\triangle} Y_\alpha &= \left\{\xi < \kappa \middle| \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} Y_\alpha\right\} \\ &= \left\{\xi < \kappa \middle| \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} \left\{\zeta \in X_\alpha \middle| \alpha < \zeta\right\}\right\}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

- Si $\xi \in \underset{\alpha<\kappa}{\triangle} X_\alpha$, entonces $\xi < \kappa$ es tal que $\xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} X_\alpha$, así que $\xi \in X_\alpha$ para todo $\alpha < \xi$, luego:
$$\xi \in \left\{\zeta \in X_\alpha \middle| \alpha < \zeta\right\}, \quad \forall \alpha < \xi,$$
así que $\xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} \left\{\zeta \in X_\alpha \middle| \alpha < \zeta\right\}$, lo cual implica por (3.16) que $\xi \in \underset{\alpha<\kappa}{\triangle} Y_\alpha$.

- Si $\xi \in \underset{\alpha<\kappa}{\triangle} Y_\alpha$, entonces $\xi < \kappa$ es tal que:
$$\xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} \left\{\zeta \in X_\alpha \middle| \alpha < \zeta\right\},$$

por lo cual $\xi \in \left\{\zeta \in X_\alpha \middle| \alpha < \zeta\right\}$, para todo $\alpha < \xi$, es decir que $\xi \in X_\alpha$ para todo $\alpha < \xi$, luego:

$$\xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} X_\alpha.$$

Por tanto, $\xi \in \underset{\alpha<\kappa}{\triangle} X_\alpha$.

De los dos incisos anteriores se sigue la igualdad.

De *(3)*: Probaremos la doble contención:

- Si $\xi \in \underset{\alpha<\kappa}{\triangle} X_\alpha$, entonces $\xi < \kappa$ es tal que $\xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} X_\alpha$, así que $\xi \in X_\alpha$ para todo $\alpha < \xi$. Ahora, si $\alpha < \kappa$ es tal que $\xi \leqslant \alpha$, entonces $\xi \in \left\{\zeta \middle| \zeta \leqslant \alpha\right\}$. Por tanto:

$$\xi \in X_\alpha \cup \left\{\zeta \middle| \zeta \leqslant \alpha\right\},$$

para todo $\alpha < \kappa$. Se sigue así que:

$$\xi \in \bigcap_{\alpha<\kappa} X_\alpha \cup \left\{\zeta \middle| \zeta \leqslant \alpha\right\}.$$

- Si $\xi \in \bigcap_{\alpha<\kappa} X_\alpha \cup \left\{\zeta \middle| \zeta \leqslant \alpha\right\}$ se tiene que:

$$\xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} X_\alpha \cup \left\{\zeta \middle| \zeta \leqslant \alpha\right\},$$

pues, $\bigcap_{\alpha<\kappa} X_\alpha \cup \left\{\zeta \middle| \zeta \leqslant \alpha\right\} \subseteq \bigcap_{\alpha<\xi} X_\alpha \cup \left\{\zeta \middle| \zeta \leqslant \alpha\right\}$, ya que $\xi \leqslant \alpha$, para todo $\alpha < \kappa$, luego $\xi < \kappa$. Lo anterior implica que:

$$\xi \in X_\alpha \cup \left\{\zeta \middle| \zeta \leqslant \alpha\right\}, \quad \forall \alpha < \xi,$$

donde $\xi \notin \left\{\zeta \middle| \zeta \leqslant \alpha\right\}$, para todo $\alpha < \xi$, así que:

$$\xi \in X_\alpha, \quad \forall \alpha < \xi.$$

Se sigue así que $\xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} X_\alpha$, es decir que $\xi \in \underset{\alpha<\kappa}{\triangle} X_\alpha$.

De los dos incisos anteriores se sigue la igualdad. ■

Proposición 3.84 (**Intersección Diagonal de κ Conjuntos CLUB es CLUB**)
Sea κ cardinal regular no numerable y $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ una sucesión de subconjuntos CLUB de κ, entonces el conjunto:

$$C = \underset{\alpha<\kappa}{\triangle} C_\alpha$$

es CLUB.

Demostración:
Sea $C = \mathop{\triangle}\limits_{\alpha<\kappa} C_\alpha$. Por el Lema (3.83) inciso *(1)* se tiene que:

$$\mathop{\triangle}\limits_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \mathop{\triangle}\limits_{\alpha<\kappa} D_\alpha,$$

donde $D_\alpha = \bigcap_{\xi\leqslant\alpha} C_\xi$ para todo $\alpha < \kappa$. Estos conjuntos son CLUB por la Proposición (3.81) y cumplen que:

$$D_0 \supseteq D_1 \supseteq \cdots \supseteq D_\alpha \supseteq \cdots, \quad \forall\alpha < \kappa. \tag{3.17}$$

Hay que probar que C es cerrado y no acotado.

- C **es cerrado**: Basta con probar que C contiene a todos sus puntos de acumulación. Sea ζ punto de acumulación de C, por el Lema (3.74) se tiene que ζ es ordinal límite no cero. Observemos que:

$$\begin{aligned} \eta \in C &\iff \eta \in \mathop{\triangle}\limits_{\alpha<\kappa} D_\alpha \\ &\iff \eta \in \bigcap_{\alpha<\eta} D_\alpha, \end{aligned} \tag{3.18}$$

  con lo que basta probar que $\zeta \in D_\alpha$ para todo $\alpha < \zeta$. Sea $\alpha < \zeta$, tomemos:

$$X_\alpha = \left\{\nu \in C \middle| \alpha < \nu < \zeta\right\}.$$

  Si $\nu \in X_\alpha$, entonces $\nu \in C$ así que de (3.18) se sigue que $\nu \in \bigcap_{\xi<\nu} D_\xi$, luego por (3.17) se tiene que $\nu \in D_\alpha$, ya que $\bigcap_{\xi<\nu} D_\xi \subseteq D_\alpha$, pues $\alpha < \nu$. Por tanto, $X_\alpha \subseteq D_\alpha$. Notemos que:

$$\sup(X_\alpha) = \sup(C \cap \zeta) = \zeta,$$

  por ser ζ punto de acumulación de C y por el Lema (3.75), con lo cual al ser D_α conjunto CLUB debe tenerse que $\zeta \in D_\alpha$.

- C **es no acotado**: Sea $\alpha < \kappa$. Construimos la sucesión $(\beta_n)_{n<\omega}$ como sigue:

  - Sea β_0 ordinal tal que $\alpha < \beta_0 < \kappa$ y $\beta_0 \in D_0$, lo anterior es posible, ya que D_0 es CLUB, en particular es no acotado. Como $\beta_0 < \kappa$ podemos tomar ahora β_1 ordinal tal que $\beta_0 < \beta_1 < \kappa$ y $\beta_1 \in D_{\beta_0}$, lo cual nuevamente se puede hacer por ser D_{β_0} CLUB.
  - Supongamos construidos $\beta_0, \ldots, \beta_n$ con $0 < n < \omega$ tales que $\beta_i < \beta_{i+1} < \kappa$ para todo $i < n$, y:

$$\beta_{i+1} \in D_{\beta_i}, \quad \forall i < n.$$

    Como $\beta_n < \kappa$ podemos tomar β_{n+1} ordinal tal que $\beta_n < \beta_{n+1} < \kappa$ y $\beta_{n+1} \in D_{\beta_n}$.

  Aplicando inducción tenemos construida una sucesión $(\beta_n)_{n<\omega}$ tal que:

$$\alpha < \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_n < \cdots, \quad \forall n < \omega, \tag{3.19}$$

  con $\beta_{n+1} \in D_{\beta_n}$ y $\beta_n < \kappa$ para todo $n < \omega$. Afirmamos que:

$$\beta = \lim_{n\to\omega} \beta_n \in C.$$

En efecto, por (3.18) basta con probar que $\beta \in D_\xi$ para todo $\xi < \beta$. Sea $\xi < \beta$, como:

$$\beta = \lim_{n\to\omega} \beta_n = \sup \left\{ \beta_n \middle| n < \omega \right\},$$

entonces, debe tenerse que existe $n_0 < \omega$ tal que $\xi < \beta_{n_0}$, ya que en caso contrario se tendría que ξ es cota superior del conjunto $\left\{ \beta_n \middle| n < \omega \right\}$, con lo que $\beta \leqslant \xi$, lo cual no puede suceder. Ahora, por (3.17) y usando (3.19) se tiene que:

$$\beta_k \in D_{\beta_{n_0}}, \quad \forall k > n_0,$$

por lo que la sucesión $(\beta_{n+n_0})_{n<\omega}$ está en $D_{\beta_{n_0}}$, luego al ser este conjunto CLUB se sigue que su límite, el cual es β debe estar en $D_{\beta_{n_0}}$. Así que:

$$\beta \in D_\xi,$$

pues por (3.17) y como $\xi < \beta_0$ se tiene que $D_{\beta_0} \subseteq D_\xi$. Por tanto, $\beta \in C$ es tal que $\alpha < \beta < \kappa$. Se sigue así que C es no acotado en κ.

Por los dos incisos anteriores se sigue que C es CLUB. ■

Definición 3.28 (Función Ordinal)
Una **función ordinal** es una función $f : A \to B$ donde $A \subseteq \alpha$ y $B \subseteq \beta$ y, α y β son ordinales.

Definición 3.29 (Función Regresiva)
Una función ordinal f en un conjunto S es **regresiva** si:

$$f(\alpha) < \alpha, \quad \forall \alpha \in S,$$

con $\alpha > 0$.

Teorema 3.85 (Lema de Fodor)
Sea κ un cardinal regular no numerable. Si $f : S \to \kappa$ es una función regresiva en un conjunto estacionario $S \subseteq \kappa$, entonces existe un subconjunto estacionario $S_0 \subseteq S$ y $\gamma < \kappa$ tal que:

$$f(\alpha) = \gamma, \quad \forall \alpha \in S_0.$$

Demostración:
Supongamos que para todo $\gamma < \kappa$ el conjunto:

$$S_\gamma = \left\{ \alpha \in S \middle| f(\alpha) = \gamma \right\}$$

no es estacionario. Entonces, para todo $\gamma < \kappa$ existe un conjunto CLUB $C_\gamma \subseteq \kappa$ tal que:

$$S_\gamma \cap C_\gamma = \emptyset.$$

Como S es estacionario, debe suceder que para todo $\alpha \in S \cap C_\gamma$ se tiene que $f(\alpha) \neq \gamma$. Tomemos:

$$C = \mathop{\triangle}_{\gamma<\kappa} C_\gamma,$$

se tiene por la Proposición (3.84) que C es CLUB, luego, del Lema (3.80) se sigue que $S \cap C$ es estacionario, en particular es no vacío.

Se cumple que si $\alpha \in S \cap C$ entonces $\alpha \in S$ y, de la definición de intersección diagonal:

$$\alpha \in \bigcap_{\gamma<\alpha} C_\gamma,$$

por lo cual $f(\alpha) \neq \gamma$ para todo $\gamma < \alpha$, es decir que $f(\alpha) \geqslant \alpha$ lo cual contradice el hecho de que f sea regresiva$\#_c$. Por tanto, existe un conjunto estacionario $S_0 \subseteq S$ y $\gamma < \kappa$ tal que:

$$f(\alpha) = \gamma, \quad \forall \alpha \in S_0$$

■

§3.6 Número de pseudointersección $\mathfrak{p}$

En esta sección, se definirá el cardinal $\mathfrak{p}$ a partir de algunas propiedades de ω y probaremos unos resultados sobre la existencia y propiedades de este cardinal.

Definición 3.30 (**Preorden**)
Sea X un conjunto. Un **preorden para** X es una relación $\preceq$ tal que:

- (**Reflexiva**): Para todo $x \in X$, $x \preceq x$.
- (**Transitiva**): Para todo $x, y, z \in X$, $x \preceq y$ y $y \preceq z$ implican $x \preceq z$.

En tal caso decimos que X **está preordenado por** $\preceq$ o que $\preceq$ **es un preorden para** X.

Definición 3.31 (**La Relación** $\subseteq^*$)
Sean $A, B \subseteq \omega$, decimos que A **está casi totalmente contenido en** B o que B **contiene casi totalmente a** A si $|A \setminus B| < \omega$. Tal relación es denotada por $A \subseteq^* B$.

Proposición 3.86 ($\subseteq^*$ **es un Preorden**)
La relación $\subseteq^*$ es un preorden para $\mathcal{P}(\omega)$.

Demostración:
Para probar que $\subseteq^*$ es un preorden basta con ver que es una relación reflexiva y transitiva.

- **Reflexividad**. Sea $A \subseteq \omega$, entonces $A \setminus A = \emptyset$, luego $|A \setminus A| = 0 < \omega$, con lo que $A \subseteq^* A$.
- **Transitividad**. Sean $A, B, C \subseteq \omega$ tales que $A \subseteq^* B$ y $B \subseteq^* C$, entonces:

$$|A \setminus B| < \omega \quad \text{y} \quad |B \setminus C| < \omega.$$

Afirmamos que:

$$A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C).$$

En efecto, si $x \in A \setminus C$, entonces $x \in A$ y $x \notin C$. Se tienen dos casos:

- $x \in B$, se sigue que $x \in B \setminus C$.
- $x \notin B$, se sigue que $x \in A \setminus B$.

Por los dos casos anteriores se sigue la contención. Ahora, observemos que:

$$\begin{aligned} |A \setminus C| &\leqslant |(A \setminus B) \cup (B \setminus C)| \\ &\leqslant |A \setminus B| + |B \setminus C| \\ &< \omega, \end{aligned}$$

por ende, $A \subseteq^* C$.

■

Definición 3.32 (Pseudointersección de una Familia)
Sea $A \subseteq \omega$ y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de ω. Decimos que A es una **pseudointersección de la familia** $\mathcal{F}$ si $A \subseteq^* F$, para todo $F \in \mathcal{F}$. En caso de que suceda lo anterior decimos que $\mathcal{F}$ **tiene una pseudointersección**.

Veamos algunos ejemplos de la definición anterior.

Proposición 3.87 (Toda Familia tiene Pseudointersección)
Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de ω, entonces todo subconjunto finito de ω es pseudointersección de $\mathcal{F}$.

Demostración:
Sea $A \subseteq \omega$ finito, entonces para todo $F \in \mathcal{F}$ se tiene que:

$$|A \setminus F| \leqslant |A| < \omega,$$

esto es que $A \subseteq^* F$. Por tanto, A es pseudointersección de $\mathcal{F}$. ■

La proposición anterior muestra que dada una familia $\mathcal{F}$ siempre podemos encontrar una pseudointersección de la misma que sea finita y que esta no necesariamente es única. El siguiente ejemplo muestra que hay familias que no tienen como pseudointersección a un algún conjunto numerable.

Ejemplo 3.88 ($\mathsf{Fin}(\omega)$ no tiene Pseudointersección Numerable)
Consideremos la familia $\mathsf{Fin}(\omega)$ de todos los subconjuntos finitos de ω. Entonces, $\mathsf{Fin}(\omega)$ tiene pseudointersección finita pero no tiene pseudointersección numerable.

Demostración:
Por la proposición anterior todo subconjunto finito de ω es pseudointersección de $\mathsf{Fin}(\omega)$. Veamos que no tiene pseudointersección numerable. Para todo $A \subseteq \omega$ numerable se cumple que:

$$|A \setminus F| = \omega,$$

para todo $F \in \mathsf{Fin}(\omega)$, ya que F es finito. Así que $A \nsubseteq^* F$ se sigue entonces que $\mathsf{Fin}(\omega)$ no puede tener pseudointersección numerable. ■

El hecho anterior motiva la siguiente pregunta: ¿cómo garantizar la existencia de una pseudointersección numerable? La respuesta a esta pregunta la veremos más adelante. Antes, una definición:

Definición 3.33 (Familia Centrada)
Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de ω es **centrada** si para todo $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{A}'| < \omega$ se cumple que:

$$\left|\bigcap \mathcal{A}'\right| = \omega.$$

De la definición se sigue que no toda familia es centrada, más aún, si algún elemento A de la familia $\mathcal{A}$ es finito, entonces la familia no puede ser centrada (por ejemplo, tomando $\mathcal{A}' = \{A\}$).

Proposición 3.89 (Filtro Propio Libre es Centrado)
Sea $\mathcal{F}$ un filtro propio libre sobre ω, entonces $\mathcal{F}$ es centrado.

Demostración:
Supongamos que existe una subfamilia finita $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ tal que:

$$\left|\bigcap \mathcal{F}'\right| < \omega.$$

Al ser $\mathcal{F}$ filtro se tiene que:

$$\bigcap \mathcal{F}' \in \mathcal{F}. \tag{3.20}$$

Como $\mathcal{F}$ es filtro libre, de la Proposición (2.22) se sigue que $\mathsf{CoFin}\,(\omega) \subseteq \mathcal{F}$, en particular se tiene:

$$\omega \setminus \bigcap \mathcal{F}' \in \mathcal{F}. \tag{3.21}$$

Nuevamente, al ser $\mathcal{F}$ filtro por (3.20) y (3.21) debe suceder que:

$$\emptyset = \left(\bigcap \mathcal{F}'\right) \cap \left(\omega \setminus \bigcap \mathcal{F}'\right) \in \mathcal{F},$$

lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{F}$ es propio$\#_c$. Por tanto, $\mathcal{F}$ es centrado. ■

Observación 3.90 ($\mathsf{CoFin}\,(\omega)$ es Centrada)
Al tenerse que $\mathsf{CoFin}\,(\omega)$ es un filtro propio libre sobre ω de subconjuntos numerables (por lo obtenido en el Capítulo 2), de la proposición anterior se sigue que $\mathsf{CoFin}\,(\omega)$ es una familia centrada.

Lema 3.91
Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X y $A \in \mathcal{U}$. Entonces, para cualquier par de subconjuntos disjuntos $A_1, A_2 \subseteq A$ con $A = A_1 \cup A_2$ se tiene que $A_1 \in \mathcal{U}$ ó $A_2 \in \mathcal{U}$.

Demostración:
Sean $A_1, A_2 \subseteq A$ conjuntos disjuntos tales que $A = A_1 \cup A_2$. Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro se tiene por la Proposición (2.30) que $A_1 \in \mathcal{U}$ ó $\omega \setminus A_1 \in \mathcal{U}$. Si sucede lo primero, hemos terminado. Si $\omega \setminus A_1 \in \mathcal{U}$ al tenerse que $A \in \mathcal{U}$ obtenemos:

$$A_2 = A \cap (\omega \setminus A_1) \in \mathcal{U}.$$

Por tanto, $A_1 \in \mathcal{U}$ ó $A_2 \in \mathcal{U}$. ■

PROPOSICIÓN 3.92
Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre sobre ω, entonces $\mathcal{U}$ es centrado y no tiene pseudointersección numerable.

Demostración:
Por ser $\mathcal{U}$ ultrafiltro se tiene que $\mathcal{U}$ es filtro propio libre, por lo que de la Proposición (3.89) es centrado. Así que basta probar que no tiene pseudointersección numerable.

Supongamos que $A \subseteq \omega$ es numerable y es pseudointersección de $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro sobre ω se sigue de la Proposición (2.30) que $A \in \mathcal{U}$ ó $B = \omega \setminus A \in \mathcal{U}$. Analicemos ambos casos:

- Si $A \in \mathcal{U}$ al ser A numerable se tiene que existen dos subconjuntos disjuntos numerables $A_1, A_2 \subseteq A$ tales que:
$$A = A_1 \cup A_2.$$
Por el Lema (3.91) debe suceder que $A_1 \in \mathcal{U}$ ó $A_2 \in \mathcal{U}$.
  - Si $A_1 \in \mathcal{U}$ entonces al ser A pseudointersección de $\mathcal{U}$ se tiene que $A \subseteq^* A_1$, esto es que $|A \setminus A_1| < \omega$, lo cual no puede suceder, pues $A \setminus A_1 = A_2$, siendo A_2 numerable$\#_c$.
  - Si $A_2 \in \mathcal{U}$ de forma análoga al inciso anterior se llega a una contradicción.

  Por tanto, $A \notin \mathcal{U}$.
- Si $B \in \mathcal{U}$ afirmamos que B es numerable. En efecto, como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro libre, entonces $\mathsf{CoFin}(\omega) \subseteq \mathcal{U}$ por la Proposición (2.22), luego si B fuese finito se tendría que $A = \omega \setminus B \in \mathcal{U}$, lo cual implicaría que $\emptyset = A \cap B \in \mathcal{U}$, cosa que contradice el hecho de que $\mathcal{U}$ es propio$\#_c$. Así que B es numerable. Como en el inciso anterior, se tiene que existen dos subconjuntos disjuntos numerables $B_1, B_2 \subseteq B$ tales que:
$$B = B_1 \cup B_2.$$
Como $\mathcal{U}$ ultrafiltro por el Lema (3.91) debe suceder que $B_1 \in \mathcal{U}$ ó $B_2 \in \mathcal{U}$. Por tanto, al ser A pseudointersección de $\mathcal{U}$ se tiene que $A \subseteq^* B_1$ ó $A \subseteq^* B_2$, esto es que $|A \setminus B_1| < \omega$ ó $|A \setminus B_2| < \omega$, pero:
$$A \cap B_i = \emptyset, \quad i = 1, 2,$$
ya que $B_i \subseteq B$ para $i = 1, 2$, por lo cual $|A \setminus B_1| = |A \setminus B_2| = |A| = \omega$, lo cual es una contradicción$\#_c$. Así que $B \notin \mathcal{U}$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que A no puede ser pseudointersección de $\mathcal{U}$. Por ende, $\mathcal{U}$ no tiene pseudointersección numerable. ■

PROPOSICIÓN 3.93
Si $\mathcal{A}$ es una familia finita centrada de elementos de $[\omega]^\omega$, entonces tiene pseudointersección numerable.

Demostración:
Podemos suponer que $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$. Como $\mathcal{A}$ es centrada, en particular al ser $\mathcal{A}$ finita se tiene que:
$$A = \bigcap \mathcal{A},$$

es un conjunto numerable, para el cual se cumple que:

$$|A \setminus A_i| = |\emptyset| = 0, \quad \forall i \in [\![0, n]\!].$$

Luego, A es una pseudointersección numerable de $\mathcal{A}$. ■

Con estos resultados estamos en condiciones de hacer la siguiente definición:

Definición 3.34 (Número de Pseudointersección)
El **número de pseudointersección** $\mathfrak{p}$ se define como:

$$\mathfrak{p} = \text{mín}\left\{|\mathcal{A}| \,\middle|\, \mathcal{A} \text{ es una familia centrada de elementos de } [\omega]^\omega \text{ sin pseudointersección numerable}\right\}.$$

Observación 3.94
Si tenemos una familia centrada $\mathcal{A}$ de elementos de $[\omega]^\omega$ tal que $|\mathcal{A}| < \mathfrak{p}$, se tiene que $\mathcal{A}$ tiene una pseduointersección numerable.

Naturalmente, uno se hace la pregunta si la definición anterior tiene sentido y si es posible determinar una cota para el cardinal $\mathfrak{p}$, esto lo hacemos con el siguiente resultado:

Proposición 3.95 (Existencia de $\mathfrak{p}$)
El número de pseudointersección existe y es tal que $\omega_1 \leqslant \mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{c}$.

Demostración:
Primero, veremos que el conjunto:

$$\mathcal{P} = \left\{|\mathcal{A}| \,\middle|\, \mathcal{A} \text{ es una familia centrada de } [\omega]^\omega \text{ sin pseudointersección numerable}\right\},$$

es no vacío. En efecto, por el Teorema (2.31) para el filtro propio $\mathsf{CoFin}(\omega)$ existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre ω tal que $\mathsf{CoFin}(\omega) \subseteq \mathcal{U}$, en particular, $\mathcal{U}$ es libre por la Proposición (2.22). De la Proposición (3.92) se sigue que $\mathcal{U}$ es una familia centrada que no tiene pseudointersección numerable. Afirmamos que $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$.

En efecto, si $A \in \mathcal{U}$ fuese tal que $A \notin [\omega]^\omega$, entonces A sería un conjunto finito, luego como $\mathsf{CoFin}(\omega) \subseteq \mathcal{U}$ se tiene que $\omega \setminus A \in \mathcal{U}$. Por tanto:

$$\emptyset = A \cap (\omega \setminus A) \in \mathcal{U},$$

lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{U}$ sea propio$\#_c$. Así que, $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$. Se sigue así que:

$$\mathcal{U} \in \mathcal{P}.$$

Por ende, la familia $\mathcal{P}$ es no vacía, luego tiene elemento mínimo $\mathfrak{p} = \text{mín}\,\mathcal{P}$.

Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de ω. Como la cardinalidad de $[\omega]^\omega$ es menor o igual que la de $[\omega]^{\leqslant\omega}$, la cual es $\mathfrak{c}$, ya que:

$$[\omega]^{\leqslant\omega} = \mathcal{P}(\omega),$$

entonces, si $\mathcal{A} \in \mathcal{P}$ debe tenerse forzosamente que:

$$|\mathcal{A}| \leqslant |\mathcal{P}(\omega)| = \mathfrak{c},$$

así que $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{c}$.

Veamos ahora la otra desigualdad. Por la Proposción (3.93) todos los elementos de $\mathcal{P}$ deben ser familias infinitas, porque en caso contrario poseerían una pseudointersección numerable. Supongamos que $\mathcal{A} \in \mathcal{P}$ es tal que $\mathcal{A}$ es numerable, digamos:

$$\mathcal{A} = \left\{ A_i \middle| i < \omega \right\}.$$

Definimos:

$$B_i = \bigcap_{j=0}^{i} A_j, \quad \forall i < \omega.$$

Construimos por inducción una sucesión $(x_n)_{n<\omega}$ de elementos en ω como sigue:

- Sea $x_0 \in B_0$, el cual existe, ya que $B_0 = A_0$ es numerable. Como $\mathcal{A}$ es centrada, entonces el conjunto $A_0 \cap A_1$ es numerable, luego $B_1 \setminus \{x_0\}$ también lo es. Tomamos así $x_1 \in B_1 \setminus \{x_0\}$.

- Supongamos elegidos $x_0, \ldots, x_n < \omega$ tales que:

  $$x_i \in B_i \setminus \{x_0, \ldots, x_{i-1}\}, \quad \forall i \in [\![0, n]\!],$$

  para algún $n < \omega$. Como $\mathcal{A}$ es centrada entonces el conjunto:

  $$B_{n+1} = \bigcap_{j=0}^{n+1} A_j,$$

  es numerable, luego $B_{n+1} \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$ también lo es, así que existe $x_{n+1} \in B_{n+1} \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$.

Por inducción tenemos construida una sucesión $(x_n)_{n<\omega}$ de elementos distintos tales que:

$$x_i \in \bigcap_{j=0}^{i} A_j, \quad \forall i < \omega. \tag{3.22}$$

Tomemos el conjunto:

$$A = \left\{ x_n \middle| n < \omega \right\},$$

por estar formado de elementos distintos se sigue que es numerable. Además, cumple que:

$$|A \setminus A_i| < \omega, \quad \forall i < \omega,$$

pues por (3.22), $x_n \in A_i$ para todo $n < \omega$ con $n \geqslant i$ y para todo $i < \omega$, con lo que el conjunto $A \setminus A_i$ es finito. Por tanto, A es una pseudointersección numerable de $\mathcal{A}$, lo cual es una contradicción por la elección de $\mathcal{A}\#_c$.

Así que, todo elemento de $\mathcal{P}$ es infinito no numerable, es decir que $\omega_1 \leqslant \mathfrak{p}$. ■

§3.7 Número de acotación $\mathfrak{b}$

Otro cardinal importante en el Problema de Malykhin es el cardinal $\mathfrak{b}$. En esta sección se estudia la construcción, existencia y algunas propiedades del mismo.

DEFINICIÓN 3.35 (Relaciones $\leqslant^*$ y $<^*$)
Sean $f, g : \omega \to \omega$ funciones, decimos que $f \leqslant^* g$ si:

$$\left|\left\{n < \omega \middle| g(n) < f(n)\right\}\right| < \omega,$$

en este caso, $f(n) \leqslant g(n)\ \forall n < \omega$. Además, $f <^* g$ si:

$$\left|\left\{n < \omega \middle| g(n) \leqslant f(n)\right\}\right| < \omega,$$

en este caso, $f(n) < g(n)\ \forall n \in \omega$.

Recordemos que ${}^{\omega}\omega$ denota al conjunto de todas las funciones de ω en ω, con lo que $\leqslant^*$ y $<^*$ son relaciones sobre este conjunto. Nuestro objetivo ahora es mostrar que estas dos relaciones son preórdenes.

Antes, una caracterización de ambas relaciones que nos será útil más adelante:

OBSERVACIÓN 3.96 (Caracterización de $\leqslant^*$ y $<^*$)
Sean $f, g \in {}^{\omega}\omega$, entonces $f \leqslant^* g$ si y solo si existe $N < \omega$ tal que:

$$n \geqslant N \Rightarrow f(n) \leqslant g(n),$$

para todo $n < \omega$. Análogamente, $f <^* g$ si y solo si existe $N < \omega$ tal que:

$$n \geqslant N \Rightarrow f(n) < g(n),$$

para todo $n < \omega$.

En otras palabras, $f \leqslant^* g$ si $f(n) \leqslant g(n)$ para casi todo salvo una cantidad finita de $n < \omega$. Análogamente, $f <^* g$ si $f(n) < g(n)$ para casi todo salvo una cantidad finita de $n < \omega$.

PROPOSICIÓN 3.97 ($\leqslant^*$ es Preorden)
La relación $\leqslant^*$ es un preorden sobre ${}^{\omega}\omega$.

Demostración:
Veamos que $\leqslant^*$ es reflexiva y transitiva:

- **Reflexividad**: Sea $f \in {}^{\omega}\omega$, entonces el conjunto:

$$\left\{n < \omega \middle| f(n) < f(n)\right\},$$

  es vacío, luego $\left|\left\{n < \omega \middle| f(n) < f(n)\right\}\right| = 0 < \omega$. Por tanto, $f \leqslant^* f$.

- **Transitividad**: Sean $f, g, h \in {}^{\omega}\omega$ tales que $f \leqslant^* g$ y $g \leqslant^* h$, es decir:

$$\left|\left\{n < \omega \middle| g(n) < f(n)\right\}\right| < \omega \quad \text{y} \quad \left|\left\{n < \omega \middle| h(n) < g(n)\right\}\right| < \omega.$$

  Si $m \in \left\{n < \omega \middle| h(n) < f(n)\right\}$ tenemos dos casos:

- $g(m) < f(m)$, se sigue que $m \in \left\{n < \omega \middle| g(n) < f(n)\right\}$.
- $f(m) \leqslant g(m)$, por lo que $h(m) < g(m)$, así que $m \in \left\{n < \omega \middle| h(n) < g(n)\right\}$.

De los dos incisos anteriores tenemos la siguiente contención:

$$\left\{n < \omega \middle| h(n) < f(n)\right\} \subseteq \left\{n < \omega \middle| g(n) < f(n)\right\} \cup \left\{n < \omega \middle| h(n) < g(n)\right\}.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\left|\left\{n < \omega \middle| h(n) < f(n)\right\}\right| &\leqslant \left|\left\{n < \omega \middle| g(n) < f(n)\right\} \cup \left\{n < \omega \middle| h(n) < g(n)\right\}\right| \\ &\leqslant \left|\left\{n < \omega \middle| g(n) < f(n)\right\}\right| + \left|\left\{n < \omega \middle| h(n) < g(n)\right\}\right| \\ &< \omega,\end{aligned}$$

se sigue así que $f \leqslant^* h$.

De los dos incisos anteriores se tiene que $\leqslant^*$ es un preorden sobre ${}^{\omega}\omega$. ∎

Observación 3.98 ($<^*$ **es Preorden**)
De forma análoga se prueba que $<^*$ es un preorden sobre ${}^{\omega}\omega$.

Una de las propiedades del preorden $\leqslant^*$ es la enunciada en la siguiente proposición:

Proposición 3.99
Existe un conjunto $B \subseteq {}^{\omega}\omega$ no acotado bajo la relación $\leqslant^*$.

Demostración:
Afirmamos que el conjunto ${}^{\omega}\omega$ es no acotado bajo la relación $\leqslant^*$. En efecto, sea $f \in {}^{\omega}\omega$, entonces la función $g \in {}^{\omega}\omega$ definida como:

$$g(n) = f(n) + 1, \quad \forall n < \omega,$$

es tal que $g \neq f$ y además:

$$\begin{aligned}\left|\left\{n < \omega \middle| g(n) < f(n)\right\}\right| &= \left|\left\{n < \omega \middle| f(n) + 1 < f(n)\right\}\right| \\ &= 0 \\ &< \omega,\end{aligned}$$

por tanto, $f \leqslant^* g$. ∎

Esta proposición nos permite hacer la siguiente definición:

Definición 3.36 (**Número de Acotación** $\mathfrak{b}$)
Se define el **número de acotación** $\mathfrak{b}$ por:

$$\mathfrak{b} = \min\left\{|B| \middle| B \text{ es un subconjunto no acotado de } {}^{\omega}\omega \text{ bajo la relación } \leqslant^*\right\}.$$

Observación 3.100
Siempre que tengamos un subconjunto $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ tal que $|A| < \mathfrak{b}$, se tendrá que A es un subconjunto acotado de ${}^{\omega}\omega$ bajo la relación $\leqslant^*$.

En el estudio del Problema de Malykhin, el número de acotación resulta relevante para ciertas propiedades que nos proporcionan información sobre la estructura de un espacio topológico que se construirá a partir de este. Naturalmente, resulta relevante conocer si existe una relación entre el número de pseudointersección $\mathfrak{p}$ y el número de acotación $\mathfrak{b}$. Resulta que tal relación entre ambos cardinales existe. Con el objetivo de probar la misma debemos antes probar el siguiente lema:

Lema 3.101
Si $\mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_n\} \subseteq [\omega]^{\omega}$ es una familia tal que:

$$m < k \Rightarrow A_k \subseteq^* A_m,$$

para todo $k, m \leqslant n$, entonces:

$$\left|\bigcap \mathcal{A}\right| = \omega.$$

Demostración:
Procederemos por inducción sobre $n < \omega$:

- Si $n = 0$ el resultado se tiene de forma inmediata, ya que $A_0 \in [\omega]^{\omega}$.
- Supongamos el resultado cierto para algún $n < \omega$. Sean $A_0, \ldots, A_n, A_{n+1} \in [\omega]^{\omega}$ tales que:

$$m < k \Rightarrow A_k \subseteq^* A_m, \tag{3.23}$$

para todo $m, k \leqslant n + 1$. Tomemos:

$$B = \bigcap_{m=0}^{n} A_m.$$

Por hipótesis de inducción este conjunto es numerable. Además, cumple que:

$$|B \setminus A_{n+1}| \leqslant \left|\bigcup_{m=0}^{n} A_m \setminus A_{n+1}\right| \leqslant \sum_{m=0}^{n} |A_m \setminus A_{n+1}|,$$

donde $|A_m \setminus A_{n+1}| < \omega$, para todo $m < \omega$ tal que $0 \leqslant m \leqslant n$, usando (3.23). Se sigue así que:

$$|B \setminus A_{n+1}| < \omega,$$

esto junto con el hecho de que B es numerable implica que $B \cap A_{n+1}$ es numerable, es decir que:

$$\left|\bigcap_{m=0}^{n+1} A_m\right| = |B \cap A_{n+1}| = \omega.$$

Aplicando inducción se sigue el resultado. ■

Proposición 3.102 (**Relación entre $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{b}$**)
Se cumple que $\omega_1 \leqslant \mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{c}$.

Demostración:
Por la Proposición (3.95) basta con probar que $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{c}$.

- Probaremos que para todo cardinal κ se tiene que:

$$\kappa < \mathfrak{p} \Rightarrow \kappa < \mathfrak{b},$$

ya que probando esto tendríamos que si $\mathfrak{b} < \mathfrak{p}$ entonces $\mathfrak{b} < \mathfrak{b}$, lo cual sería una contradicción, con lo cual debe suceder que $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{b}$.

Sea κ cardinal y B un subconjunto de ${}^{\omega}\omega$ de cardinalidad κ tal que $\kappa < \mathfrak{p}$, digamos:

$$B = \left\{ b_\eta \in {}^{\omega}\omega \middle| \eta \leqslant \kappa \right\}.$$

Construimos por recursión transfinita sobre $\eta \leqslant \kappa$ la sucesión $(f_\eta)_{\eta \leqslant \kappa}$ de funciones en ${}^{\omega}\omega$ dada como sigue:

  - Si $\eta = 0$ con $\eta \leqslant \kappa$, definimos por recursión a la función $f_0 : \omega \to \omega$ de la siguiente manera: $f_0(0) = b_0(0)$ y,

$$f_0(n+1) = \text{máx}\left(\left\{ b_0(k) < \omega \middle| k \leqslant 2(n+1) \right\} \cup \{f_0(n)+1\} \right), \quad \forall n < \omega.$$

  f_0 está bien definida y cumple que es estrictamente creciente.

  - Supongamos que para η ordinal no cero con $\eta \leqslant \kappa$ tenemos construida la sucesión $(f_\xi)_{\xi<\eta}$ de funciones en ${}^{\omega}\omega$ estrictamente crecientes tales que:

$$\xi < \zeta \Rightarrow \operatorname{ran}(f_\zeta) \subseteq^* \operatorname{ran}(f_\xi), \tag{3.24}$$

  y:

$$f_\xi(n) \geqslant \text{máx}\left\{ b_\xi(k) \middle| k \leqslant 2n \right\}, \quad \forall n < \omega,$$

  para todo ξ y ζ ordinales menores a η. Sea:

$$\mathcal{A} = \left\{ \operatorname{ran}(f_\xi) \in [\omega]^\omega \middle| \xi < \eta \right\}.$$

  Como f_ξ es estrictamente creciente, para todo $\xi < \eta$, entonces $\operatorname{ran}(f_\xi) \in [\omega]^\omega$, por lo cual $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$. Se tiene que $\mathcal{A}$ es centrada, ya que si $\mathcal{A}'$ es una subfamilia finita de $\mathcal{A}$, digamos:

$$\mathcal{A}' = \{\operatorname{ran}(f_{\xi_0}), \operatorname{ran}(f_{\xi_1}), \ldots, \operatorname{ran}(f_{\xi_n})\},$$

  con $n < \omega$ y tal que $\xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n < \eta$, se tiene por (3.24) que:

$$\operatorname{ran}(f_{\xi_n}) \subseteq^* \operatorname{ran}(f_{\xi_k}), \quad \forall k \leqslant n,$$

  así que por el Lema (3.101) se sigue que:

$$\left| \bigcap \mathcal{A}' \right| = \omega.$$

Por lo cual, $\mathcal{A}$ es una familia centrada. Como:

$$|\mathcal{A}| = |\eta| \leqslant \eta \leqslant \kappa < \mathfrak{p},$$

se sigue de la Observación (3.94) que $\mathcal{A}$ tiene una pseudointersección numerable, digamos $A_\eta \in [\omega]^\omega$. Definimos por recursión $f_\eta : \omega \to \omega$ como sigue:

$$f_\eta(0) = \min\left\{a \in A_\eta \middle| b_\eta(0) \leqslant a\right\}$$
$$f_\eta(n+1) = \min\left\{a \in A_\eta \middle| \forall k \leqslant 2(n+1) \text{ se tiene que } b_\eta(k) \leqslant a \text{ y } f_\eta(n) < a\right\}, \quad \forall n < \omega.$$

Tales mínimos deben existir, pues $A_\eta \subseteq \omega$ es no acotado por ser numerable. Se tiene que:

- f_η **es estrictamente creciente**: En efecto, esto se sigue de la definición de f_η.
- **ran** $(f_\eta) \subseteq^*$ **ran** (f_ξ) **para todo** $\xi < \eta$: En efecto, por ser A_η una pseudointersección numerable de $\mathcal{A}$ se cumple que:

$$A_\eta \subseteq^* \operatorname{ran}(f_\xi), \quad \forall \xi < \eta,$$

  por lo cual:

$$|A_\eta \setminus \operatorname{ran}(f_\xi)| < \omega, \quad \forall \xi < \eta.$$

  Como $\operatorname{ran}(f_\eta) \subseteq A_\eta$ se sigue que $|\operatorname{ran}(f_\eta) \setminus \operatorname{ran}(f_\xi)| < \omega$ para todo $\xi < \eta$, es decir:

$$\operatorname{ran}(f_\eta) \subseteq^* \operatorname{ran}(f_\xi), \quad \forall \xi < \eta.$$

- $f_\eta(n) \geqslant \max\left\{b_\eta(k) \middle| k \leqslant 2n\right\}$ **para todo** $n < \omega$: En efecto, esto se sigue de la definición de f_η.

Por los tres incisos anteriores tenemos construida una sucesión $(f_\xi)_{\xi \leqslant \eta}$ de funciones en ${}^\omega\omega$ estrictamente crecientes tales que:

$$\xi < \zeta \Rightarrow \operatorname{ran}(f_\zeta) \subseteq^* \operatorname{ran}(f_\xi), \tag{3.25}$$

para todo ξ, ζ ordinales menores o iguales a η. Además:

$$f_\xi(n) \geqslant \max\left\{b_\xi(k) \middle| k \leqslant 2n\right\}, \quad \forall n < \omega. \tag{3.26}$$

Aplicando recursión transfinita tenemos construida una sucesión $(f_\xi)_{\eta \leqslant \kappa}$ de funciones estrictamente crecientes en ${}^\omega\omega$ tales que cumplen (3.25) y (3.26), para todo ξ y ζ menores o iguales a κ.

Afirmamos que f_κ acota a B bajo la relación $\leqslant^*$. Sea $\eta \leqslant \kappa$. Como f_κ es inyectiva, pues es estrictamente creciente, y como:

$$\operatorname{ran}(f_\kappa) \subseteq^* \operatorname{ran}(f_\eta).$$

Entonces, debe existir $m < \omega$ tal que:

$$f_\kappa(n+m) \in \operatorname{ran}(f_\eta), \quad \forall n < \omega.$$

Como f_κ y f_η son estrictamente crecientes, por lo anterior debe suceder que:

$$f_\kappa(n+m) \geqslant f_\eta(n), \quad \forall n < \omega. \tag{3.27}$$

Ahora, si $n < \omega$ es tal que $n \geqslant 2m$ se tiene que $2(n-m) \geqslant n$, por lo cual:

$$f_\eta(n-m) \geqslant \max\left\{b_\eta(k) \middle| k \leqslant 2(n-m)\right\} \geqslant b_\eta(n). \tag{3.28}$$

De (3.27) y (3.28) se sigue que:

$$f_\kappa(n) = f_\kappa(n-m+m) \geqslant f_\eta(n-m) \geqslant b_\eta(n),$$

para todo $n \geqslant 2m$, luego $b_\eta \leqslant^* f_\kappa$. Se sigue así que B es acotado bajo la relación $\leqslant^*$. Como el conjunto $B \subseteq {}^\omega\omega$ fue arbitrario, se sigue que $\kappa < \mathfrak{b}$.

- Ya se sabe que la cardinalidad de ${}^\omega\omega$ es $\mathfrak{c}$, por lo que si $B \subseteq {}^\omega\omega$ es no acotado, se debe tener que $|B| \leqslant \mathfrak{c}$. Por tanto, $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{c}$.

De los dos incisos anteriores se sigue que $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{c}$. ■

Observación 3.103
Los dos cardinales $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{b}$ nos darán información sobre lo que ocurre si ignoramos los conjuntos finitos de ω.

Una caracterización alternativa de $\mathfrak{b}$ es la siguiente, misma que nos servirá en el Capítulo 4:

Proposición 3.104 (Caracterización Alternativa de $\mathfrak{b}$)
Se cumple que:

$$\mathfrak{b} = \min\Big\{|B| \,\Big|\, B \subseteq {}^\omega\omega \text{ es no acotado bajo la relación } \leqslant^*, \text{ bien ordenado por } <^* \text{ y formado por funciones estrictamente crecientes}\Big\}.$$

Demostración:
Sea:

$$\mathfrak{b}_1 = \min\Big\{|B| \,\Big|\, B \subseteq {}^\omega\omega \text{ es no acotado bajo la relación } \leqslant^*, \text{ bien ordenado por } <^* \text{ y formado por funciones estrictamente crecientes}\Big\}.$$

Probaremos que $\mathfrak{b}_1 \leqslant \mathfrak{b}$ y $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{b}_1$:

- Sea $F = \left\{f_\alpha \in {}^\omega\omega \middle| \alpha < \mathfrak{b}\right\} \subseteq {}^\omega\omega$ una familia no acotada tal que $|F| = \mathfrak{b}$. Construiremos un conjunto $B = \left\{b_\alpha \in {}^\omega\omega \middle| \alpha < \mathfrak{b}\right\} \subseteq {}^\omega\omega$ tal que:

  (1) b_α es estrictamente creciente y $f_\alpha \leqslant b_\alpha$ para todo $\alpha < \mathfrak{b}$.

  (2) B está bien ordenado por $<^*$.

  (3) B es no acotado bajo la relación $\leqslant^*$.

Para esto, procederemos por recursión transfinita sobre $\alpha < \mathfrak{b}$:

- Tomamos $b_0 = f_0$ si f_0 es estrictamente creciente. Si f_0 no fuese estrictamente creciente, definimos f_0' por recursión como sigue:

$$f_0'(n) = \begin{cases} f_0(n) & \text{si} \quad n = 0 \\ \text{máx}\{f_0(n), f_0'(n-1)+1\} & \text{si} \quad n > 1. \end{cases}, \quad \forall n < \omega,$$

  y tomamos $b_0 = f_0'$.

- Supongamos construido un conjunto $B' = \left\{b_\beta \in {}^\omega\omega \middle| \beta < \alpha\right\} \subseteq {}^\omega\omega$ con $\alpha < \mathfrak{b}$ ordinal no cero tal que:

  (a) b_β es estrictamente creciente y $f_\alpha \leqslant b_\alpha$ para todo $\beta < \alpha$.

  (b) B' está bien ordenado por $<^*$.

  Como $|B'| = |\alpha| \leqslant \alpha < \mathfrak{b}$, entonces este conjunto es acotado, luego existe $f \in {}^\omega\omega$ tal que:

$$b_\beta \leqslant^* f, \quad \forall \beta < \alpha.$$

  Tomemos $b' \in {}^\omega\omega$ como sigue:

$$b'(n) = \text{máx}\{f_\alpha(n), f(n)+1\}, \quad \forall n < \omega.$$

  Si b' es estrictamente creciente, tomamos $b_\alpha = b'$. Si no fuese estrictamente creciente, hacemos como en el inciso anterior y tomamos a b_α como la función resultante. En cualquier caso, tenemos una función b_α tal que:

  (a) b_α es estrictamente creciente y $f_\alpha \leqslant b_\alpha$.

  (b) El conjunto $B'' = B' \cup \{f_\alpha\}$ está bien ordenado por $<^*$, ya que B está bien ordenado y:

$$b_\beta <^* b_\alpha, \quad \forall \beta < \alpha,$$

  pues $b_\beta \leqslant^* f$, para todo $\beta < \alpha$ y $f < b_\alpha$.

Aplicando recursión transfinita tenemos construido un conjunto $B = \left\{b_\alpha \middle| \alpha < \mathfrak{b}\right\} \subseteq {}^\omega\omega$ tal que cumple los incisos *(1)* y *(2)*. Veamos que B no es acotado. En efecto, si lo fuese se tendría que existiría $f \in {}^\omega\omega$ tal que:

$$b_\alpha \leqslant^* f, \quad \forall \alpha < \mathfrak{b}.$$

En particular por el inciso *(1)* se tiene que:

$$f_\alpha \leqslant^* f, \quad \forall \alpha < \mathfrak{b},$$

así que F es acotado, lo cual es una contradicción$\#_c$. Por tanto, B es no acotado. Como $|B| = \mathfrak{b}$ se sigue de la definición de $\mathfrak{b}_1$ que $\mathfrak{b}_1 \leqslant \mathfrak{b}$.

- Notemos que el conjunto:

$$\left\{|B| \middle| B \text{ es un subconjunto no acotado de } {}^\omega\omega \text{ bajo la relación } \leqslant^*\right\}$$

contiene a:

$$\Big\{|B| \,\Big|\, B \subseteq {}^{\omega}\omega \text{ es no acotado bajo la relación } \leqslant^*, \text{ bien ordenado por } <^* \text{ y formado por funciones estrictamente crecientes}\Big\},$$

siendo este no vacío por el inciso anterior, por lo cual tomando mínimos de ambos conjuntos y usando las definiciones de $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{b}_1$, se sigue que $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{b}_1$.

Por ambos incisos se sigue el resultado. ■

El siguiente resultado muestra que el cardinal $\mathfrak{b}$ es regular, tal hecho resultará muy importante en el Capítulo 4.

Proposición 3.105 (**$\mathfrak{b}$ es Regular**)
$\mathfrak{b}$ es cardinal regular.

Demostración:
Supongamos que $\mathfrak{b}$ es cardinal singular. Sea $B \subseteq {}^{\omega}\omega$ no acotado bajo la relación $\leqslant^*$ y tal que $|B| = \mathfrak{b}$.

Como $|B|$ es singular se sigue por el Corolario (3.71) que existe una familia $(A_\nu)_{\nu<\vartheta}$ de conjuntos disjuntos a pares tales que:

$$|B| = \bigcup_{\nu<\vartheta} A_\nu = \left|\bigcup_{\nu<\vartheta} A_\nu\right|,$$

con $|A_\nu| < |B|$ para todo $\nu < \vartheta$ y $\vartheta < |B|$ con ϑ ordinal límite. Como ambos conjuntos B y $\bigcup_{\nu<\vartheta} A_\nu$ tienen la misma cardinalidad existe una biyección $f : \bigcup_{\nu<\vartheta} A_\nu \to B$. Definimos:

$$B_\nu = f[A_\nu], \quad \forall \nu < \vartheta.$$

Se tiene por ser f biyección que:

$$B = \bigcup_{\nu<\vartheta} B_\nu,$$

con $|B_\nu| = |A_\nu| < |B|$ para todo $\nu < \vartheta$. En particular:

$$|B_\nu| < \mathfrak{b}, \quad \forall \nu < \vartheta,$$

por lo cual, B_ν es acotado bajo la relación $\leqslant^*$, para todo $\nu < \vartheta$. Así que para todo $\nu < \vartheta$ existe $f_\nu \in {}^{\omega}\omega$ tal que:

$$f \leqslant^* f_\nu, \quad \forall f \in B_\nu.$$

Consideremos el conjunto:

$$\Big\{f_\nu \in {}^{\omega}\omega \,\Big|\, \nu < \vartheta\Big\}.$$

Este conjunto tiene cardinalidad menor o igual a $|\vartheta|$, y $|\vartheta| \leqslant \vartheta < |B| \leqslant \mathfrak{b}$, por lo que es acotado bajo la relación $\leqslant^*$, así que existe $g \in {}^{\omega}\omega$ tal que:

$$f_\nu \leqslant^* g, \quad \forall \nu < \vartheta.$$

Por ende:

$$f \leqslant^* g, \quad \forall f \in \bigcup_{\nu<\vartheta} B_\nu = B.$$

Con lo que se sigue que B es acotado bajo la relación $\leqslant^*$, lo cual contradice la elección de $B\#_c$. Por tanto, $\mathfrak{b}$ es regular. ■

Capítulo 4

El Problema de Malykhin

§4.1 Introducción

Recordemos el Corolario (1.72), probado al final del Capítulo 1:

Teorema 4.1
Todo grupo topológico T_0 es primero numerable si y solo si es metrizable.

Este teorema da una caracterización de los grupos topológicos T_0 metrizables. Resulta natural preguntarse si es posible debilitar la condición de primero numerabilidad usando los espacios de Fréchet (como lo muestra la Proposición (2.38)). Esta condición resulta no ser suficiente para asegurar la metrizabilidad de un grupo topológico, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.2 (**Grupo Topológico Fréchet que no es Metrizable**)
La suma directa de ω_1 copias del grupo del círculo $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ es un grupo topológico T_0 de Fréchet que no es metrizable.

Demostración:
Sea:

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

es decir el conjunto:

$$\mathcal{G} = \left\{ (x_\alpha)_{\alpha<\omega_1} \in \prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \middle| x_\alpha = [0], \not\forall\, \alpha < \omega_1 \right\},$$

dotado de la suma $(x_\alpha)_{\alpha<\omega_1} + (y_\alpha)_{\alpha<\omega_1} = (x_\alpha + y_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ y de la topología de subespacio, visto como subespacio de $\prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, dotando a este último de la topología producto. Por la Observación (1.61) se tiene que $\mathcal{G}$ es un grupo topológico. Este grupo es T_0, ya que es subespacio del espacio topológico $\prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ el cual es un espacio T_0, dado que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es T_0 por el Ejemplo (1.65).

El grupo topológico $\mathcal{G}$ cumple lo siguiente:

(a) $\mathcal{G}$ **es de Fréchet**. Sea $A \subseteq \mathcal{G}$ no vacío y $x = (x_\alpha)_{\alpha<\omega_1} \in \overline{A}^{\mathcal{G}}$. Se tienen dos casos:

- $x \in A$: Tomando la sucesión $(y_n)_{n<\omega}$ con $y_n = x$, para todo $n < \omega$ se tiene el resultado.
- $x \notin A$: Como $x \in \overline{A}^{\mathcal{G}}$, entonces para todo abierto $U^{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{G}$ que contiene a x se tiene que:

$$A \cap U^{\mathcal{G}} \neq \emptyset,$$

pero, el abierto $U^{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ es de la forma:

$$U^{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \cap U,$$

donde $U \subseteq \prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ abierto en $\prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Así que como $x \in \overline{A}^{\mathcal{G}}$ entonces, para todo $U \subseteq \prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ abierto en $\prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que $x \in U$ se tiene:

$$A \cap U \neq \emptyset. \tag{4.1}$$

Tomemos $J \subseteq \omega_1$ tal que:

$$x_\beta \neq [0], \quad \forall \beta \in J,$$

y $x_\alpha = [0]$ para todo $\alpha \in \omega_1 \setminus J$. Por definición de $\mathcal{G}$ se tiene que $|J| < \omega$. Construimos una sucesión $(y_n)_{n<\omega}$ de elementos en A como sigue:

- Consideremos el abierto B_0 en $\prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dado por:

$$B_0 = \prod_{\alpha<\omega_1} U_{0,\alpha},$$

siendo $U_{0,\alpha} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para todo $\alpha \in \omega_1 \setminus J$ y:

$$U_{0,\beta} = B_d(x_\beta, 1), \quad \forall \beta \in J,$$

con $B_d(x_\beta, 1) \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la bola centrada en x_β de radio 1, con d una métrica sobre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (el cual es metrizable por el Ejemplo (1.65)). Por (4.1) se tiene que existe $y_0 \in A$ tal que $y_0 \in B_0$, en particular $y_0 \in \mathcal{G}$.

- Supongamos elegidos $y_0 = (y_{0,\alpha})_{\alpha<\omega_1}, \ldots, y_n = (y_{n,\alpha})_{\alpha<\omega_1}$ elementos de A tales que:

$$y_k \in B_k, \quad \forall k \in [\![0, n]\!],$$

con:

$$B_k = \prod_{\alpha<\omega_1} U_{k,\alpha}$$

abierto en $\prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, siendo $U_{k,\alpha} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para todo $\alpha \in \omega_1 \setminus \left(J \cup \bigcup_{i=0}^{k-1} J_i\right)$, y:

$$U_{k,\beta} = B_d\left(x_\beta, \frac{1}{k+1}\right), \quad \forall \beta \in J \cup \bigcup_{i=0}^{k-1} J_i,$$

para todo $k \in [\![0, n]\!]$, con $J_k \subseteq \omega_1$ finito tal que:

$$y_{k,\beta} \neq [0], \quad \forall \beta \in J_k,$$

y $y_{k,\alpha} = [0]$ para todo $\alpha \in \omega_1 \setminus J_k$, para todo $k \in [\![0, n-1]\!]$. Tomemos $J_n \subseteq \omega_1$ finito tal que:

$$y_{n,\beta} \neq [0], \quad \forall \beta \in J_n,$$

y $y_{n,\alpha} = [0]$ para todo $\alpha \in \omega_1 \setminus J_n$. Consideremos el abierto en $\prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$:

$$B_{n+1} = \prod_{\alpha<\omega_1} U_{n+1,\alpha},$$

donde $U_{n+1,\alpha} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para todo $\alpha \in \omega_1 \setminus (J \cup \bigcup_{i=0}^n J_i)$, y:

$$U_{n+1,\beta} = B_d\left(x_\beta, \frac{1}{(n+1)+1}\right), \quad \forall \beta \in J \cup \bigcup_{i=0}^{n} J_i.$$

Este conjunto es abierto en $\prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, pues todos los $U_{n+1,\alpha}$ son abiertos y el conjunto $J \cup \bigcup_{i=0}^n J_i$ es finito. Por (4.1) existe $y_{n+1} \in A$ tal que $y_{n+1} \in B_{n+1}$.

Aplicando inducción tenemos construida una sucesión $(y_n)_{n<\omega}$, con $y_n = (y_{n,\alpha})_{\alpha<\omega_1}$, para todo $n < \omega$, de elementos en A tales que:

$$y_n \in B_n = \prod_{\alpha<\omega_1} U_{n,\alpha}, \quad \forall n < \omega, \tag{4.2}$$

siendo B_n abierto en $\prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, donde $U_{n,\alpha} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para todo $\alpha \in \omega_1 \setminus \left(J \cup \bigcup_{i=0}^{n-1} J_i\right)$ y,

$$U_{n,\beta} = B_d\left(x_\beta, \frac{1}{n+1}\right), \quad \forall \beta \in J \cup \bigcup_{i=0}^{n-1} J_i, \tag{4.3}$$

donde $J_n \subseteq \omega_1$ finito es tal que:

$$y_{n,\beta} \neq [0], \quad \forall \beta \in J_n,$$

y $y_{n,\alpha} = [0]$, para todo $\alpha \in \omega_1 \setminus J_n$, para todo $n < \omega$. Los abiertos B_n cumplen por construcción que:

$$B_0 \supseteq B_1 \supseteq \cdots \supseteq B_n \supseteq \cdots, \quad \forall n < \omega. \tag{4.4}$$

Afirmamos que la sucesión $(y_n)_{n<\omega}$ converge a x. En efecto, sea $U^{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{G}$ abierto en $\mathcal{G}$ tal que $x \in U^{\mathcal{G}}$, entonces existe un abierto $U \subseteq \prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que:

$$U^{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \cap U.$$

Para $x \in U$ y U, existe un elemento básico B de la topología de $\prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que:

$$x \in B \subseteq U,$$

donde:

$$B = \prod_{\alpha<\omega_1} U_\alpha,$$

siendo $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ abierto, para todo $\alpha < \omega_1$, y $U_\alpha = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ $\forall\!\!\!\forall\, \alpha < \omega_1$. Tomemos $I \subseteq \omega_1$ finito tal que:

$$U_\beta \neq \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad \forall \beta \in I,$$

y $U_\alpha = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para todo $\alpha \in \omega_1 \setminus I$. Se tiene así que:

$$y_{n,\alpha} \in U_\alpha, \quad \forall \alpha \in \omega_1 \setminus I, \tag{4.5}$$

para todo $n < \omega$. Ahora, como $x_\beta \in U_\beta$, para todo $\beta \in I$ y el espacio $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es metrizable, entonces, para todo $\beta \in I$ existe $\varepsilon_\beta > 0$ tal que:

$$x_\beta \in B_d\left(x_\beta, \varepsilon_\beta\right) \subseteq U_\beta.$$

Tomemos $\varepsilon = \text{mín}\left\{\varepsilon_\beta \middle| \beta \in I\right\} > 0$. Tal mínimo existe ya que el conjunto I es finito. Sea ahora $N_1 < \omega$ tal que $\frac{1}{N_1+1} < \varepsilon$. Entonces:

$$x_\beta \in B_d\left(x_\beta, \frac{1}{N_1+1}\right) \subseteq U_\beta, \quad \forall \beta \in I. \tag{4.6}$$

Ahora, consideremos el conjunto:

$$\mathcal{J} = J \cup \bigcup_{n<\omega} J_n.$$

Se tienen dos casos:

- $\mathcal{J} \cap I = \emptyset$: Si esto sucede, se tiene por definición de los J_n que:

  $$y_{n,\beta} = [0], \quad \forall \beta \in I,$$

  para todo $n < \omega$, pues $J_n \cap I \subseteq \mathcal{J} \cap I$. También, tenemos que $J \cap I = \emptyset$, por lo cual de la elección de J se tiene que:

  $$x_\beta = [0], \quad \forall \beta \in I.$$

  Se sigue de (4.6) que:

  $$y_{n,\beta} \in U_\beta, \quad \forall \beta \in I,$$

  para todo $n < \omega$. Tomemos $N = 0$. Por lo anterior y usando (4.5) tenemos lo siguiente:

  $$n \geqslant N \Rightarrow y_n \in B \subseteq U. \tag{4.7}$$

- $\mathcal{J} \cap I \neq \emptyset$. Tomemos $I_1 = \mathcal{J} \cap I$ e $I_2 = I \setminus I_1$. Usando lo hecho en el inciso anterior, se cumple que:

  $$y_{n,\beta} \in U_\beta, \quad \forall \beta \in I_2, \tag{4.8}$$

  para todo $n < \omega$. Ahora, como $\mathcal{J} = J \cup \bigcup_{n<\omega} J_n$ e I es finito, entonces existe N_2 tal que:

  $$I_1 = \left(J \cup \bigcup_{i=0}^{N_2} J_i\right) \cap I$$

  por tal razón se debe cumplir que:

  $$I_1 = \left(J \cup \bigcup_{i=0}^{M} J_i\right) \cap I, \tag{4.9}$$

para todo $M < \omega$ tal que $M \geqslant N_2$. Tomemos $N = \max\{N_2+1, N_1\}$. Si $n \geqslant N$, por (4.2) y (4.3) y (4.4) se cumple que:

$$y_{n,\beta} \in U_{N,\beta} = B_d\left(x_\beta, \frac{1}{N+1}\right), \quad \forall \beta \in J \cup \bigcup_{i=0}^{M} J_i,$$

en particular, por construcción de N_1 y definición de I_1 y por (4.9) tenemos que:

$$y_{n,\beta} \in B_d\left(x_\beta, \frac{1}{N+1}\right) \subseteq U_\beta, \quad \forall \beta \in I_1. \tag{4.10}$$

De (4.8) y (4.10) se sigue que:

$$n \geqslant N \Rightarrow y_n \in B \subseteq U. \tag{4.11}$$

En ambos casos, hemos encontrado en (4.7) y (4.11) un $N < \omega$ tal que:

$$n \geqslant N \Rightarrow y_n \in U.$$

Por tanto, la sucesión $(y_n)_{n<\omega}$ converge a x.

En ambos casos hemos encontrado una sucesión de elementos de A que converge a x. Se sigue así que el grupo $\mathcal{G}$ es de Fréchet.

(b) $\mathcal{G}$ **no es primero numerable**. Como todo grupo topológico es un espacio homogéneo por el Corolario (1.9), basta con probar que no existe una base local para $0 = ([0])_{\alpha<\omega_1}$ que sea numerable.

Supongamos que existe $\mathcal{B} = \left\{B_n^{\mathcal{G}} \middle| n < \omega\right\}$ una base local para 0 que es a lo sumo numerable. Como $\mathcal{G}$ hereda la topología del espacio producto $\prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, entonces, para todo $n < \omega$ existe $V_n \subseteq \prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ abierto en $\prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que:

$$B_n^{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \cap V_n.$$

Para cada V_n, dado que $0 \in V_n$, existe $B_n \subseteq \prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ básico de la topología producto tal que:

$$0 \in B_n \subseteq V_n,$$

con lo cual:

$$0 \in \mathcal{G} \cap B_n \subseteq B_n^{\mathcal{G}}. \tag{4.12}$$

Por ser B_n básico de la topología producto podemos expresarlo como:

$$B_n = \prod_{\alpha<\omega_1} U_{n,\alpha},$$

donde $U_{n,\alpha} \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es abierto, para todo $\alpha < \omega_1$ y $U_{n,\alpha} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ $\forall\!\!\!\forall \alpha < \omega_1$, para todo $n < \omega$. Para cada $n < \omega$ tomemos $J_n \subseteq \omega_1$ finito tal que:

$$U_{\beta,n} \neq \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad \forall \beta \in J_n,$$

y $U_{\alpha,n} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para todo $\alpha \in \omega_1 \setminus J_n$. Sea:

$$\mathcal{J} = \bigcup_{n<\omega} J_n,$$

este conjunto es a lo sumo numerable, pues es unión numerable de conjuntos finitos. Como ω_1 es no numerable, entonces $\omega_1 \setminus \mathcal{J} \neq \emptyset$, tomemos $\alpha_0 \in \omega_1 \setminus \mathcal{J}$ y sea:

$$W = \mathcal{G} \cap \left(\prod_{\alpha<\omega_1} W_\alpha \right),$$

donde $W_\alpha = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para todo $\alpha < \omega_1$ con $\alpha \neq \alpha_0$ y $W_{\alpha_0} = B_d\left([0], \frac{1}{4}\right) \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Notemos que W es una vecindad del 0, pues es abierto en $\mathcal{G}$, ya que $\prod_{\alpha<\omega_1} W_\alpha$ es abierto en $\prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, pero como $W_{\alpha_0} \neq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, se tiene que no existe $n < \omega$ tal que $B_n \subseteq W$, porque si tal n existiera se tendría por (4.12) y por definición de los J_n que $\alpha_0 \in \mathcal{J}$ lo cual contradice el hecho de que $\alpha_0 \in \omega_1 \setminus \mathcal{J} \#_c$. Por ende, $\mathcal{B}$ no puede ser una base local para 0. Se sigue así que $\mathcal{G}$ no es primero numerable.

Por los incisos *(a)* y *(b)* se sigue que $\mathcal{G}$ es un grupo topológico de Fréchet que no es primero numerable, luego no es metrizable por el Teorema (4.1). ■

Por lo cual habrá grupos topológicos T_0 de Fréchet que no sean primero numerables (equivalentemente, metrizables). Un hecho interesante del grupo $\mathcal{G}$ mencionado en el ejemplo anterior es el siguiente:

Observación 4.3
El grupo $\mathcal{G}$ del ejemplo anterior no es separable.

Demostración:
Supongamos que $D \subseteq \mathcal{G}$ es un conjunto a lo sumo numerable tal que $\overline{D}^{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$. Consideremos:

$$F = \bigcup_{x\in D} \operatorname{supp}(x),$$

donde $\operatorname{supp}(x) = \left\{ \alpha < \omega_1 \middle| x_\alpha \neq [0] \right\}$, para todo $x \in D$. F es la unión a lo sumo numerable de conjuntos finitos, por lo cual F es un conjunto a lo sumo numerable. Dado que $F \subseteq \omega_1$, entonces al ser ω_1 no numerable se sigue que existe $\alpha_0 \in \omega_1 \setminus F$. El conjunto:

$$U = \prod_{\alpha<\omega_1} U_\alpha,$$

donde $U_\alpha = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, para todo $\alpha < \omega_1$ con $\alpha \neq \alpha_0$ y $U_{\alpha_0} = \pi\left(]0, 1/2[\right)$, siendo $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la función canónica. Se tiene que U es abierto en $\prod_{\alpha<\omega_1} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, luego $U \cap \mathcal{G}$ es abierto en $\mathcal{G}$, por lo que como $\overline{D}^{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$ se debe tener que $D \cap (U \cap \mathcal{G}) \neq \emptyset$. Dado que $D \subseteq \mathcal{G}$ se tiene que:

$$D \cap U \neq \emptyset, \tag{4.13}$$

pero, como todo $x \in D$ cumple que $\alpha_0 \notin \operatorname{supp}(x)$, se sigue que $x \notin U$ para todo $x \in D$ (ya que $[0] \notin U_{\alpha_0}$), por lo cual $D \cap U = \emptyset$ lo cual contradice (4.13)$\#_c$. Así que D no puede ser a lo sumo numerable, es decir que $\mathcal{G}$ no es separable. ■

En este contexto, la separabilidad nos proporciona más control sobre las succesiones, por lo que resulta natural preguntarse si al añadir la condición de separabilidad podemos encontrar un grupo topológico que no sea metrizable. Justamente esta pregunta fue hecha por Malykhin en 1978 (asumiendo que el grupo topológico es al menos T_0):

Pregunta 4.4 (**Malykhin 1978**)
¿Existe un grupo topológico T_0 de Fréchet y separable que no sea metrizable?

Resulta que podemos hacer más restrictiva la condición de separabilidad. Para ello, antes debemos probar los siguientes resultados:

Lema 4.5
Sea (X, τ) espacio topológico. Si $D \subseteq X$ es denso en X, entonces $\overline{A \cap D} = \overline{A}$, para todo $A \subseteq X$ abierto.

Demostración:
Supongamos que $D \subseteq X$ es denso en X, esto es que $\overline{D} = X$. Sea $A \subseteq X$ abierto. Dado que $A \cap D \subseteq A$, entonces $\overline{A \cap D} \subseteq \overline{A}$.

Si $x \in \overline{A}$, entonces, para todo $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$ se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$. Como U y A son abiertos, entonces $U \cap A$ es abierto. Dado que D es denso, entonces $(U \cap A) \cap D \neq \emptyset$, por lo cual $U \cap (A \cap D) \neq \emptyset$. Como $x \in U$, se sigue que $x \in \overline{A \cap D}$. Por tanto, $\overline{A} \subseteq \overline{A \cap D}$.

De ambas contenciones se sigue la igualdad. ■

Proposición 4.6
Sea G un grupo topológico T_0 y H un subgrupo de G denso en G. Si H es metrizable, entonces G también lo es.

Demostración:
Supongamos que H es metrizable. Entonces, al ser G un espacio T_0 se tiene que H es T_0, luego H es primero numerable por el Teorema (4.1).

Sea $\left\{V_n \subseteq H \middle| n < \omega\right\}$ una base local numerable para $e_H = e_G$ en H. Entonces, para cada $n < \omega$ existe $U_n \subseteq G$ abierto en G tal que:

$$V_n = U_n \cap H.$$

Afirmamos que $\left\{U_n \subseteq G \middle| n < \omega\right\}$ es base local para e_G en G. En efecto, sea $U \subseteq G$ un abierto en G que contiene a e_G. Dado que G es regular por el Corolario (1.27), tenemos que existe $W \subseteq G$ abierto en G tal que:

$$\overline{W}^G \subseteq U.$$

Ahora, $W \cap H$ es un abierto en H que contiene a e_G, entonces, existe $n_0 < \omega$ tal que:

$$V_{n_0} \subseteq W \cap H,$$

por lo cual $U_{n_0} \cap H \subseteq W \cap H$. Al ser H denso en G se sigue del Lema (4.5) que:

$$\overline{U_{n_0}}^G \subseteq \overline{W}^G,$$

con lo que $U_{n_0} \subseteq U$. Se sigue entonces que G es primero numerable. Por el Teorema (4.1) tenemos que G es metrizable. ■

Proposición 4.7
Si todo grupo topológico T_0 numerable de Fréchet es metrizable, entonces lo es todo grupo topológico T_0 separable de Fréchet.

Demostración:
Supongamos que todo grupo topológico T_0 numerable de Fréchet es metrizable. Sea G un grupo topológico T_0 de Fréchet que es separable. Se tienen dos casos:

- G **es finito**. Como G es T_0, por el Teorema (1.26) es T_1, luego al ser G finito se sigue que G es discreto, así que por el Ejemplo (2.49) se sigue que G es metrizable.
- G **es infinito**. En este caso existe $S \subseteq G$ al lo sumo numerable tal que:
$$G = \overline{S}.$$
Este S debe ser numerable, pues si fuese finito no puede ser denso en G (ya que G es T_0, luego por el Teorema (1.26) es T_1). Tomemos:
$$H = \langle S \rangle,$$
el subgrupo de G generado por S. Este subgrupo topológico es T_0 (pues G es T_0), numerable y de Fréchet (pues la propiedad de ser de Fréchet es hereditaria), luego es metrizable por hipótesis. Como $S \subseteq H$, entonces:
$$G = \overline{H}.$$
De la Proposición (4.6) se sigue que G también es metrizable.

En cualquier caso, G es metrizable. ■

Dado que todo espacio topológico numerable es en particular separable, se tiene que si todo grupo topológico T_0 separable es de Fréchet, entonces todo grupo topológico T_0 numerable es de Fréchet, es decir que se tiene la recíproca de la proposición anterior.

Por esta razón el Problema de Malykhin puede ser reescrito de la siguiente manera:

Pregunta 4.8
¿Existe un grupo topológico T_0 de Fréchet numerable que no sea metrizable?

§4.2 El Grupo Topológico $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$

En el estudio del Problema de Malykhin un grupo que ha surgido es el grupo topológico $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$, construido a partir de un ideal $\mathcal{I}$ sobre ω. La razón de que se haya estudiado es que aún es desconocido que tan relevante sea la operación de grupo en el Problema de Malykhin, como mencionan S. Todorcevic y J. T. Moore en [JTM07], por lo que se optó por intentar (en algunos casos de forma exitosa) conseguir una topología sobre este grupo tal que fuese un grupo topológico T_0 de Fréchet y que no sea metrizable.

Nuestro objetivo en esta sección es construir este grupo topológico y enunciar algunas propiedades del mismo.

Consideremos el grupo booleano $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$ formado por todos los subconjuntos finitos de ω con la operación diferencia simétrica. Antes de inducir una topología sobre este grupo, primero estudiaremos algunas propiedades sobre un ideal sobre $[\omega]^{<\omega}$ construido a partir de un ideal $\mathcal{I}$ sobre ω.

Observación 4.9 (**Algunas Propiedades de** $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$)
La identidad de $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$ es $\emptyset$ y, para todo $A \in [\omega]^{<\omega}$ se tiene que su inverso respecto a la operación Δ es el mismo. Por tanto:

$$A^{-1} = A$$

Además, como el grupo es booleano, entonces es abeliano.

Proposición 4.10 (**Propiedades del Ideal** $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ **sobre** $[\omega]^{<\omega}$)
Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω. Consideremos la familia:

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega} = \left\{ \mathcal{A} \subseteq [\omega]^{<\omega} \middle| \exists I \in \mathcal{I} \text{ tal que } I \cap A \neq \emptyset, \text{ para todo } A \in \mathcal{A} \right\}.$$

Entonces:

(a) $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ es un ideal sobre $[\omega]^{<\omega}$.

(b) Si $\mathcal{I}$ es propio, entonces $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ también lo es.

(c) El ideal $\mathcal{I}$ es libre si y solo si $\bigcup \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega} = [\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$.

Demostración:
De *(a)*: Veamos que:

(1) Sean $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$, entonces existen $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ tales que:

$$I_1 \cap A_1 \neq \emptyset \quad \text{y} \quad I_2 \cap A_2 \neq \emptyset,$$

para todo $A_1 \in \mathcal{A}_1$ y para todo $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Como $\mathcal{I}$ es ideal entonces $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{I}$, por tanto, de lo anterior se sigue que:

$$(I_1 \cup I_2) \cap A \neq \emptyset,$$

para todo $A \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Así que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$.

(2) Sean $\mathcal{A} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ y $\mathcal{B} \subseteq [\omega]^{<\omega}$ tales que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ entonces existe $I \in \mathcal{I}$ tal que:

$$I \cap A \neq \emptyset, \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

dado que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, se tiene que:

$$I \cap B \neq \emptyset, \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Por tanto, $\mathcal{B} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ es un ideal sobre $[\omega]^{<\omega}$.

De *(b)*: Supongamos ahora que $\mathcal{I}$ es propio. Del inciso *(a)* se tiene que $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ es ideal. Si $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ no fuera propio entonces $[\omega]^{<\omega} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$, por lo cual existe $I \in \mathcal{I}$ tal que:

$$I \cap A \neq \emptyset, \quad \forall A \in [\omega]^{<\omega},$$

en particular,

$$I \cap \{n\}, \quad \forall n < \omega,$$

así que $I = \omega$, luego el ideal $\mathcal{I}$ no es propio, lo cual es una contradicción$\#_c$. Por tanto, $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ es propio.

De *(c)*: Probaremos la doble implicación.

$\Rightarrow$): Supongamos que $\mathcal{I}$ es libre. Por definición de $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ se tiene que:

$$\bigcup \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega} \subseteq [\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\},$$

ya que $\emptyset \notin \mathcal{A}$ para todo $\mathcal{A} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$. Ahora, sea $A \in [\omega]^{<\omega}$ no vacío. Entonces, existe $n \in A$. Como $\mathcal{I}$ es libre existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $n \in I$. Por tanto:

$$I \cap A \neq \emptyset,$$

en particular:

$$I \cap A' \neq \emptyset, \quad \forall A' \in \mathcal{A},$$

donde $\mathcal{A} = \{A\}$. Así que $\mathcal{A} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ y por ende $A \in \bigcup \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$. Con lo que se tiene la otra contención $[\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \subseteq \bigcup \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$. De ambas contenciones se sigue la igualdad.

$\Leftarrow$): Supongamos que:

$$\bigcup \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega} = [\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}.$$

Veamos que el ideal $\mathcal{I}$ es libre. En efecto, sea $n < \omega$, entonces el conjunto $\{n\}$ está en $[\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, así que existe $\mathcal{A} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ tal que $\{n\} \in \mathcal{A}$.

Como $\mathcal{A} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ entonces existe $I \in \mathcal{I}$ tal que:

$$I \cap A \neq \emptyset, \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

en particular:

$$I \cap \{n\} \neq \emptyset.$$

Así que $n \in I \subseteq \bigcup \mathcal{I}$. Por tanto:

$$\bigcup \mathcal{I} = \omega,$$

con lo que el ideal $\mathcal{I}$ es libre. ■

Observación 4.11 (La Familia $(\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega})^+$)
De la proposición anterior se tiene que la familia de todos los conjuntos $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$-positivos está dada por:

$$(\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega})^+ = \left\{ \mathcal{A} \subseteq [\omega]^{<\omega} \middle| \forall I \in \mathcal{I} \text{ existe } A \in \mathcal{A} \text{ tal que } I \cap A = \emptyset \right\}.$$

Proposición 4.12 (Filtro Dual de $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$)
Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω. Entonces, el filtro dual de $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ es:

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{I}}^{<\omega} = \left\{ \mathcal{F} \subseteq [\omega]^{<\omega} \middle| \exists F \in \mathcal{I}^* \text{ tal que } [F]^{<\omega} \subseteq \mathcal{F} \right\},$$

siendo $\mathcal{I}^*$ el filtro dual de $\mathcal{I}$.

Demostración:
Recordemos que el filtro dual de $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ está dado por:

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{I}}^{<\omega} = \left\{ [\omega]^{<\omega} \setminus \mathcal{A} \middle| \mathcal{A} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega} \right\}.$$

Sea:

$$\mathfrak{F}' = \left\{ \mathcal{F} \subseteq [\omega]^{<\omega} \middle| \exists F \in \mathcal{I}^* \text{ tal que } [F]^{<\omega} \subseteq \mathcal{F} \right\},$$

probaremos que $\mathfrak{F}_{\mathcal{I}}^{<\omega} = \mathfrak{F}'$. En efecto:

- Sea $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$, entonces existe $\mathcal{A} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ tal que $\mathcal{F} = [\omega]^{<\omega} \setminus \mathcal{A}$. Para la familia $\mathcal{A}$ existe $I \in \mathcal{I}$ tal que:

  $$A \cap I \neq \emptyset, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

  Tomemos $F = \omega \setminus I \in \mathcal{I}^*$. Si $F' \subseteq F$ es finito se tiene que:

  $$I \cap F' = (\omega \setminus F) \cap F' = \emptyset,$$

  por ende, $F' \notin \mathcal{A}$, luego $F' \in [\omega]^{<\omega} \setminus \mathcal{A} = \mathcal{F}$. Así que:

  $$[F]^{<\omega} \subseteq \mathcal{F},$$

  con lo cual $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}'$.

- Sea $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}'$. Se tiene que existe $F \in \mathcal{I}^*$ tal que $[F]^{<\omega} \subseteq \mathcal{F}$. Tomemos $I = \omega \setminus F \in \mathcal{I}$. Sea $A \in [\omega]^{<\omega} \setminus \mathcal{F}$, en particular, $A \in [\omega]^{<\omega} \setminus [F]^{<\omega}$. Entonces A no es un conjunto finito totalmente contenido en F, así que:

  $$A \cap I = A \cap (\omega \setminus F) \neq \emptyset$$

  Por tanto $[\omega]^{<\omega} \setminus \mathcal{F} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$. Se sigue así que $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que $\mathfrak{F}_{\mathcal{I}}^{<\omega} = \mathfrak{F}'$. ■

Con esto estamos en condiciones de probar construir una topología sobre el grupo $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$, antes de ello debemos probar un resultado preliminar:

Proposición 4.13
Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω. Consideremos $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ el ideal sobre $[\omega]^{<\omega}$ de la Proposición (4.10). Entonces, existe una biyección $\mu : \mathcal{I} \to \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega} \restriction [\omega]^1$, dada por:

$$I = \left\{ n \in \omega \middle| n \in I \right\} \mapsto \left\{ \{n\} \in [\omega]^1 \middle| n \in I \right\}$$

para todo $I \in \mathcal{I}$. En particular, si $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ es familia cofinal, entonces la familia $\mu^{-1}\left[\mathfrak{J} \restriction [\omega]^1\right]$ es cofinal en $\mathcal{I}$.

Demostración:
La familia $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega} \upharpoonright [\omega]^1$ está dada por:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega} \upharpoonright [\omega]^1 &= \left\{\mathcal{A} \cap [\omega]^1 \subseteq [\omega]^{<\omega} \middle| \mathcal{A} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}\right\} \\
&= \left\{\mathcal{A} \subseteq [\omega]^1 \middle| \exists I \in \mathcal{I} \text{ tal que } A \cap I \neq \emptyset \text{ para todo } A \in \mathcal{A}\right\} \\
&= \left\{\mathcal{A} \subseteq [\omega]^1 \middle| \exists I \in \mathcal{I} \text{ tal que } \{n\} \cap I \neq \emptyset \text{ para todo } \{n\} \in \mathcal{A}\right\} \\
&= \left\{\left\{\{n\} \in [\omega]^1 \middle| n \in I\right\} \subseteq [\omega]^1 \middle| I \in \mathcal{I}\right\},
\end{aligned}$$

pues $\mathcal{I}$ es ideal y, si $I \in \mathcal{I}$, entonces $J \in \mathcal{I}$ para todo $J \subseteq I$. Por tanto, se sigue que μ está bien definida y es biyectiva.

Ahora, sea $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ familia cofinal. Probaremos que $\mu^{-1}\left[\mathfrak{J} \upharpoonright [\omega]^1\right]$ es cofinal en $\mathcal{I}$. Tomemos:

$$\mathcal{J} = \mu^{-1}\left[\mathfrak{J} \upharpoonright [\omega]^1\right],$$

y sea $I \in \mathcal{I}$. Como $\mathfrak{J}$ es cofinal entonces para $\mu(I) \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ existe $\mathcal{A} \in \mathfrak{J}$ tal que:

$$\mathcal{A} \subseteq \mu(I).$$

En particular:

$$\mathcal{A} \cap [\omega]^1 \subseteq \mu(I),$$

ya que todos los elementos de $\mu(I)$ son singuletes. Por ende:

$$\mu^{-1}\left(\mathcal{A} \cap [\omega]^1\right) \subseteq I,$$

con $\mu^{-1}(\mathcal{A} \cap [\omega]^1) \in \mu^{-1}\left[\mathfrak{J} \upharpoonright [\omega]^1\right]$. Se sigue así que $\mu^{-1}\left[\mathfrak{J} \upharpoonright [\omega]^1\right]$ es familia cofinal en $\mathcal{I}$. ■

Observación 4.14 (**Notación Clases Laterales de** $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$)
Consideremos el grupo $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$. Para evitar confusiones, si $\mathcal{V} \subseteq [\omega]^{<\omega}$ denotaremos por $A\boldsymbol{\Delta}\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}\boldsymbol{\Delta}A$ a las traslaciones izquierda y derecha bajo la operación Δ por A del conjunto $\mathcal{V}$, respectivamente, es decir:

$$\begin{aligned}
A\boldsymbol{\Delta}\mathcal{V} &= \left\{A\Delta V \middle| V \in \mathcal{V}\right\} \\
\mathcal{V}\boldsymbol{\Delta}A &= \left\{V\Delta A \middle| V \in \mathcal{V}\right\}
\end{aligned}$$

En particular, como el grupo es abeliano se tiene que $A\boldsymbol{\Delta}\mathcal{V} = \mathcal{V}\boldsymbol{\Delta}A$. De forma análoga denotaremos al producto de dos subfamilias $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq [\omega]^{<\omega}$ por la operación Δ:

$$\mathcal{U}\boldsymbol{\Delta}\mathcal{V} = \left\{U\Delta V \middle| U \in \mathcal{U} \text{ y } V \in \mathcal{V}\right\}$$

Resulta que un ideal $\mathcal{I}$ sobre ω nos permite dar estructura de grupo topológico al grupo $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 4.15 (El Grupo Topológico $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$**)**
Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω.

(a) El grupo $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$ es grupo topológico dotándolo con la topología $\tau_{\mathcal{I}}$ dada por:

$$\tau_{\mathcal{I}} = \left\{ \mathcal{U} \subseteq [\omega]^{\omega} \middle| \forall A \in \mathcal{U} \text{ existe } F \in \mathcal{I}^* \text{ tal que } A\boldsymbol{\Delta}[F]^{<\omega} \subseteq \mathcal{U} \right\},$$

con $\mathcal{I}^*$ el filtro dual de $\mathcal{I}$, siendo la familia:

$$\left\{ [F]^{<\omega} \subseteq [\omega]^{<\omega} \middle| F \in \mathcal{I}^* \right\},$$

base local para $\emptyset$ en $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$ y $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ el filtro de vecindades de $\emptyset$.

(b) $\mathcal{I}_{\emptyset} = \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ siendo $\mathcal{I}_{\emptyset}$ el ideal de subconjuntos de $[\omega]^{<\omega}$ que no se acumulan en $\emptyset$.

(c) $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$ es T_0 si y solo si $\mathcal{I}$ es libre.

(d) $\mathsf{cof}\,(\mathcal{I}) = \mathsf{cof}\,(\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega})$.

(e) El grupo topológico $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$ es de Fréchet si y solo si el ideal $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ es de Fréchet.

Demostración:
De *(a)*: Consideremos a la familia:

$$\mathcal{F}' = \left\{ [F]^{<\omega} \subseteq [\omega]^{<\omega} \middle| F \in \mathcal{I}^* \right\},$$

con $\mathcal{I}^*$ el filtro dual del ideal $\mathcal{I}$. Veamos que $\mathcal{F}'$ es base de filtro.

En efecto, $\mathcal{F}'$ es no vacía ya que como $\emptyset \in \mathcal{I}$, entonces $\omega \in \mathcal{I}^*$, luego $[\omega]^{<\omega} \in \mathcal{F}'$. Además, como $\{\emptyset\} \subseteq [F]^{<\omega}$, para todo $F \in \mathcal{I}^*$, entonces $\emptyset \notin \mathcal{F}'$. Sean ahora $[F_1]^{<\omega}, [F_2]^{<\omega} \in \mathcal{F}'$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{I}^*$, ya que $\mathcal{I}^*$ es filtro, se sigue que $[F_1 \cap F_2]^{<\omega} \in \mathcal{F}'$ y:

$$[F_1 \cap F_2]^{<\omega} \subseteq [F_1]^{<\omega} \cap [F_2]^{<\omega},$$

con lo cual $\mathcal{F}'$ es base de filtro tal que todo elemento contiene a $\emptyset$. Además, se cumple lo siguiente:

(1) Sea $\mathcal{U} = [F]^{<\omega} \in \mathcal{F}'$, entonces existe $\mathcal{V} = [F]^{<\omega} \in \mathcal{F}'$ tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}\boldsymbol{\Delta}\mathcal{V} &= \left\{ V_1 \Delta V_2 \middle| V_1, V_2 \in \mathcal{V} \right\} \\ &= \left\{ V_1 \Delta V_2 \in [F]^{<\omega} \middle| V_1, V_2 \in [F]^{<\omega} \right\} \\ &\subseteq [F]^{<\omega} \\ &= \mathcal{V} \\ &= \mathcal{U}. \end{aligned}$$

(2) Sea $\mathcal{U} = [F]^{<\omega} \in \mathcal{F}'$, entonces existe $\mathcal{V} = [F]^{<\omega}$ tal que:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{-1} &= \left\{V^{-1}\middle|V \in \mathcal{V}\right\}\\ &= \left\{V\middle|V \in \mathcal{V}\right\}\\ &= \mathcal{V}\\ &= \mathcal{U}.\end{aligned}$$

(3) Sean $\mathcal{U} = [F]^{<\omega} \in \mathcal{F}'$ y $A \in [\omega]^{<\omega}$, entonces existe $\mathcal{V} = [F]^{<\omega}$ tal que:

$$\begin{aligned}A\boldsymbol{\Delta}\mathcal{V}\boldsymbol{\Delta}A^{-1} &= \left\{A\Delta V\Delta A^{-1}\middle|V \in \mathcal{V}\right\}\\ &= \left\{A\Delta V\Delta A\middle|V \in \mathcal{V}\right\}\\ &= \left\{A\Delta A\Delta V\middle|V \in \mathcal{V}\right\}\\ &= \left\{\emptyset\Delta V\middle|V \in \mathcal{V}\right\}\\ &= \left\{V\middle|V \in \mathcal{V}\right\}\\ &= \mathcal{V}\\ &= \mathcal{U}.\end{aligned}$$

Por los tres incisos anteriores se sigue del Teorema (1.32) que $\tau_{\mathcal{I}}$ es una topología que hace del grupo $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$ un grupo topológico, con $\mathcal{F}'$ un sistema fundamental de vecindades para $\emptyset$.

Afirmamos que todos los elementos de $\mathcal{F}'$ son abiertos en $\tau_{\mathcal{I}}$. Sea $[F]^{<\omega} \in \mathcal{F}'$ y tomemos $A \in [F]^{<\omega}$, entonces existe $F_A = F \in \mathcal{I}^*$ tal que:

$$\begin{aligned}A\boldsymbol{\Delta}[F_A]^{<\omega} &= A\boldsymbol{\Delta}[F]^{<\omega}\\ &= \left\{A\Delta E\middle|E \in [F]^{<\omega}\right\},\end{aligned}$$

como $A \in [F]^{<\omega}$, entonces $A\Delta E \in [F]^{<\omega}$ para todo $E \in [F]^{<\omega}$, así que $A\boldsymbol{\Delta}[F_A]^{<\omega} \subseteq [F]^{<\omega}$. Se sigue de la definición de $\tau_{\mathcal{I}}$ que $[F]^{<\omega}$ es abierto, luego, $\mathcal{F}'$ es base local para $\emptyset$. Además, el filtro de vecindades de $\emptyset$ está dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\emptyset} &= \left\{\mathcal{F} \subseteq [\omega]^{<\omega}\middle|\text{existe } [F]^{<\omega} \in \mathcal{F}' \text{ tal que } [F]^{<\omega} \subseteq \mathcal{F}\right\}\\ &= \left\{\mathcal{F} \subseteq [\omega]^{<\omega}\middle|\exists F \in \mathcal{I}^* \text{ tal que } [F]^{<\omega} \subseteq \mathcal{F}\right\}\\ &= \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{<\omega}.\end{aligned}$$

Es decir que el filtro de vecindades de $\emptyset$ es precisamente el filtro $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ dado en la Proposición (4.12).

De *(b)*: Como $\mathcal{I}_{\emptyset}$ es el ideal dual del filtro $\mathcal{F}_{\emptyset}$ y $\mathcal{F}_{\emptyset} = \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$, entonces $\mathcal{I}_{\emptyset}$ es el ideal dual del filtro $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$, por la Proposición (4.12) se sigue que $\mathcal{I}_{\emptyset} = \mathcal{J}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$.

De *(c)*: Por el Corolario (1.33) se tiene que $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$ es T_0 si y solo si:

$$\bigcap \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{<\omega} = \{\emptyset\},$$

lo cual ocurre si y solo si:

$$\bigcup \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega} = [\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\},$$

y, por el inciso *(c)* de la Proposición (4.10), lo anterior ocurre si y solo si el ideal $\mathcal{I}$ es libre.

En resumen, $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$ es T_0 si y solo si el ideal $\mathcal{I}$ es libre.

De *(d)*: Se tiene lo siguiente:

- Sea $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ una familia cofinal en $\mathcal{I}$ tal que $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) = |\mathcal{J}|$. Para cada $J \in \mathcal{J}$ definimos:

  $$\mathcal{A}_J = \left\{ A \in [\omega]^{<\omega} \middle| A \cap J \neq \emptyset \right\}.$$

  Afirmamos que:

  $$\mathfrak{I}_{\mathcal{J}} = \left\{ \mathcal{A}_J \subseteq [\omega]^{<\omega} \middle| J \in \mathcal{J} \right\},$$

  es familia cofinal en $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$. En efecto, se tiene de forma inmediata que $\mathfrak{I}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$. Sea ahora $\mathcal{A} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$, entonces existe $I \in \mathcal{I}$ tal que:

  $$A \cap I \neq \emptyset, \quad \forall I \in \mathcal{I}.$$

  Como $\mathcal{J}$ es familia cofinal, existe $J \in \mathcal{J}$ tal que $I \subseteq J$. Se sigue entonces que:

  $$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_J,$$

  con $\mathcal{A}_J \in \mathfrak{I}_{\mathcal{J}}$. Se sigue de forma inmediata que $\mathfrak{I}_{\mathcal{J}}$ es cofinal en $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$. Ahora, notemos que:

  $$|\mathcal{J}| = |\mathfrak{I}_{\mathcal{J}}|,$$

  Por tanto:

  $$\mathsf{cof}(\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}) \leqslant |\mathfrak{I}_{\mathcal{J}}| = |\mathcal{J}| = \mathsf{cof}(\mathcal{I}).$$

- Sea $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ familia cofinal en $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ tal que $\mathsf{cof}(\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}) = |\mathfrak{J}|$. Por la Proposición (4.13) se tiene que la familia $\mu^{-1}[\mathfrak{J}^{-1} \upharpoonright [\omega]^1]$ es cofinal en $\mathcal{I}$. En particular:

  $$\left|\mu^{-1}\left[\mathfrak{J}^{-1} \upharpoonright [\omega]^1\right]\right| \leqslant |\mathfrak{J}|,$$

  así que:

  $$\mathsf{cof}(\mathcal{I}) \leqslant \left|\mu^{-1}\left[\mathfrak{J}^{-1} \upharpoonright [\omega]^1\right]\right| \leqslant |\mathfrak{J}| = \mathsf{cof}(\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}).$$

Por los dos incisos anteriores se sigue que $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) = \mathsf{cof}(\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega})$.

De *(e)*: Por el Corolario (2.45), $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$ es de Fréchet si y solo si $\mathcal{I}_{\emptyset}$ es de Fréchet, pero por el inciso *(b)* esto ocurre si y solo si el ideal $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ es de Fréchet. ■

Observación 4.16

En el caso de que $\omega \in \mathcal{I}$, esto es, que el ideal $\mathcal{I}$ no sea propio, se tendría que $\{\emptyset\} \in \mathfrak{F}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$, es decir que $\{\emptyset\}$ es una vecindad de $\emptyset$, luego el grupo topológico $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$ sería discreto.

Para solventar este problema y que este grupo no sea discreto, basta con pedir que $\mathcal{I}$ sea propio. El resultado se sigue de usar el inciso *(b)* de la Proposición (4.10).

El teorema anterior nos proporciona una forma de construir una topología sobre el grupo topológico $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$. También, nos dice que propiedades del ideal $\mathcal{I}$ se traducen en propiedades sobre el grupo topológico $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$. Una muy importante es la siguiente:

Corolario 4.17
Sea $\mathcal{I}$ un ideal libre sobre ω. Entonces el grupo topológico $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$ es metrizable si y solo si $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) \leqslant \omega$.

Demostración:
Como el ideal $\mathcal{I}$ es libre, entonces $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$ es grupo topológico T_0 por el Teorema (4.15) inciso *(c)*, en particular es T_1 por el Corolario (1.27). Por el Teorema (1.71) este grupo es metrizable si y solo si posee una base local numerable en la identidad, es decir que:

$$\chi(\emptyset, [\omega]^{<\omega}) \leqslant \omega,$$

y por el Teorema (2.34) lo anterior sucede si y solo si:

$$\mathsf{cof}(\mathcal{I}_{\emptyset}) \leqslant \omega.$$

De los incisos *(b)* y *(d)* del Teorema (4.15) esto ocurre si y solo si:

$$\mathsf{cof}(\mathcal{I}) \leqslant \omega.$$

■

Resulta que a partir del número de pseudointersección podemos determinar si un espacio topológico (númerable y T_1) es de Frechét, como lo muestra el siguiente resultado:

Teorema 4.18 (Nyikos)
Sea (X, τ) un espacio topológico numerable T_1. Si $\chi(x, X) < \mathfrak{p}$ para todo $x \in X$, entonces (X, τ) es de Fréchet.

Demostración:
Supongamos que para todo $x \in X$ se tiene que $\chi(x, X) < \mathfrak{p}$. Por el Teorema (2.34) se tiene que $\chi(x, X) = \mathsf{cof}(\mathcal{I}_x)$, por lo cual:

$$\mathsf{cof}(\mathcal{I}_x) < \mathfrak{p}.$$

Para ver que (X, τ) es de Fréchet, basta con probar por la Proposición (2.43) que para todo $x \in X$ y para todo $A \in \mathcal{I}_x^+$ infinito tal que $x \notin A$ existe $S \in [A]^{\omega}$ tal que $S \in \mathcal{I}_x^{\perp}$.

En efecto, sean $x \in X$ y $A \in \mathcal{I}_x^+$ infinito tal que $x \notin A$. Tomemos $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}_x$ una familia cofinal en $\mathcal{I}_x$ tal que $\mathsf{cof}(\mathcal{I}_x) = |J|$. Consideremos la siguiente familia:

$$\mathcal{F} = \left\{ F \subseteq X \middle| \exists I \in \mathcal{I}_x \text{ tal que } A \setminus I \subseteq F \right\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{F}$ es un filtro propio sobre X. En efecto:

(1) Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces existen $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_x$ tales que $A \setminus I_1 \subseteq F_1$ y $A \setminus I_2 \subseteq F_2$. Veamos que:

$$\begin{aligned} A \setminus (I_1 \cup I_2) &= (A \setminus I_1) \cap (A \setminus I_2) \\ &\subseteq F_1 \cap F_2, \end{aligned}$$

por cual, como $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{I}_x$, por ser $\mathcal{I}_x$ ideal, se sigue que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

(2) Sean $F \in \mathcal{F}$ y $B \subseteq X$ tal que $F \subseteq B$. Como $F \in \mathcal{F}$, existe $I \in \mathcal{I}_x$ tal que $A \setminus I \subseteq F$, por lo cual $A \setminus I \subseteq B$. Se sigue así que $B \in \mathcal{F}$.

(3) Si $\emptyset \in \mathcal{F}$, entonces existiría $I \in \mathcal{I}_x$ tal que $A \subseteq I$, luego $\overline{A} \subseteq \overline{I}$. Como $x \notin \overline{I}$, ya que $I \in \mathcal{I}_x$, se tendría que $x \notin \overline{A}$ lo cual contradice el hecho de que $A \in \mathcal{I}_x^+ \#_c$. Por tanto, $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Por los tres incisos anteriores se sigue $\mathcal{F}$ es un filtro propio sobre X. Por el Teorema (2.31) existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Afirmamos que $\mathsf{CoFin}\,(X) \subseteq \mathcal{U}$. En efecto, basta con ver que $X \setminus \{y\} \in \mathcal{F}$ para todo $y \in X$. Sea $y \in X$, se tienen dos casos:

- $y \neq x$, en cuyo caso existe $\{y\} \in \mathcal{I}_x$ (pues el espacio (X, τ) es T_1, luego $x \notin \overline{\{y\}} = \{y\}$) tal que:

$$A \setminus \{y\} \subseteq X \setminus \{y\},$$

  por lo que $X \setminus \{y\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

- $y = x$, como $x \notin \overline{\emptyset} = \emptyset$, entonces $\emptyset \in \mathcal{I}_x$, así que:

$$\begin{aligned} A \setminus \emptyset &= A \\ &\subseteq X \setminus \{x\}, \end{aligned}$$

  ya que $x \notin A$. Por lo cual $X \setminus \{x\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que $\mathsf{CoFin}\,(X) \subseteq \mathcal{U}$, en particular todos los elementos de $\mathcal{U}$ son numerables como consecuencia de la Proposición (2.30), luego todos los elementos de la subfamilia $\mathcal{L}$ de $\mathcal{U}$ dada por:

$$\mathcal{L} = \left\{ L \subseteq X \middle| \exists J \in \mathcal{J} \text{ tal que } A \setminus J = L \right\},$$

son numerables. Dado que X es numerable, podemos asumir que $X = \omega$, en tal caso $\mathcal{L}$ estaría dada por:

$$\mathcal{L} = \left\{ L \subseteq \omega \middle| \exists J \in \mathcal{J} \text{ tal que } A \setminus J = L \right\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{L}$ es centrada. En efecto, sean $L_1, \ldots, L_n \in \mathcal{L}$, entonces existen $J_1, \ldots, J_n \in \mathcal{J}$ tales que:

$$L_i = A \setminus J_i, \quad \forall i = [\![1, n]\!].$$

Veamos que:

$$\begin{aligned} L_1 \cap \cdots \cap L_n &= (A \setminus J_1) \cap \cdots \cap (A \setminus J_n) \\ &= A \setminus (J_1 \cup \cdots \cup J_n), \end{aligned}$$

como $\mathcal{J}$ es cofinal, existe $J \in \mathcal{J}$ tal que $J_1 \cup \cdots \cup J_n \subseteq J$ (pues $J_1 \cup \cdots \cup J_n \in \mathcal{I}_x$), así que:

$$\begin{aligned} A \setminus J &\subseteq A \setminus (J_1 \cup \cdots \cup J_n) \\ &= L_1 \cap \cdots \cap L_n. \end{aligned}$$

Se sigue que $L_1 \cap \cdots \cap L_n \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Al ser todos los elementos de $\mathcal{U}$ numerables, entonces $|L_1 \cap \cdots \cap L_n| = \omega$.

Se tiene así que $\mathcal{L}$ es centrada. Dado que $|\mathcal{L}| \leqslant |\mathcal{J}| = \mathsf{cof}(\mathcal{I}_x) < \mathfrak{p}$, se sigue que $\mathcal{L}$ debe tener alguna pseudointersección numerable, digamos el conjunto $S' \subseteq \omega$. Este conjunto es numerable. Se cumple así que:

$$|S' \setminus L| < \omega, \quad \forall L \in \mathcal{L},$$

y como $L \subseteq A$ para todo $L \in \mathcal{L}$ se sigue que:

$$|(S' \cap A) \setminus L| < \omega, \quad \forall L \in \mathcal{L}.$$

Tomemos así $S = S' \cap A$. Se tiene que $S \in [A]^\omega$, pues, dado que $L \subseteq A$, para todo $L \in \mathcal{L}$, se tiene por lo anterior, solo una cantidad finita de elementos de S' no están en A, luego $S' \cap A$ debe ser numerable. Sea $I \in \mathcal{I}_x$, entonces existe $J \in \mathcal{J}$ tal que $I \subseteq J$, por lo que:

$$\begin{aligned} |S \cap I| &\leqslant |S \cap J| \\ &= |S \cap (A \cap J)| \\ &= |(S' \cap A) \cap J| \\ &= |S' \cap (A \cap J)| \\ &= |S' \setminus (A \setminus J)| \\ &< \omega, \end{aligned}$$

ya que $A \setminus J \in \mathcal{L}$. Por tanto, $S \in \mathcal{I}_x^\perp$.

Se sigue así que (X, τ) es de Fréchet. ■

§4.3 Solución con $\omega_1 < \mathfrak{p}$

Con lo anterior, ya tenemos las herramientas necesarias para dar una respuesta, usando hipótesis adicionales, al problema de Malykhin.

Definición 4.1 (Familia Casi Ajena)
Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es **casi ajena** si:

$$|A_1 \cap A_2| < \omega, \quad \forall A_1, A_2 \in \mathcal{A},$$

con $A_1 \neq A_2$.

Observación 4.19
Si el conjunto X de la definición anterior es finito, toda familia de subconjuntos de X es casi ajena, por lo que no tiene sentido hablar de familias casi ajenas de conjuntos finitos.

Lema 4.20 (Familia Casi Ajena de Tamaño ω_1)
Existe una familia casi ajena $\mathcal{J} \subseteq [\omega]^\omega$ de cardinalidad ω_1 tal que:

$$\bigcup \mathcal{J} = \omega.$$

Demostración:
Para cada $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{Q}$ de elementos distintos que converge a r. Para cada $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ construimos el conjunto:

$$A_r = \left\{ r_n \middle| n \in \omega \right\}, \quad \forall r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Consideremos la siguiente familia de subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ A_r \subseteq \mathbb{Q} \middle| r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \right\} \subseteq [\mathbb{Q}]^{\omega}.$$

Afirmamos que:

$$|A_r \cap A_q| < \omega, \quad \forall r, s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ con } r \neq s.$$

En efecto, sean $r, s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con $r \neq s$. Como el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es Hausdorff, existen abiertos $U, V \subseteq \mathbb{R}$ tales que:

$$r \in U, s \in V \text{ y } U \cap V = \emptyset,$$

dado que las sucesiones $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a r y s, respectivamente, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow r_n \in U,$$

y:

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow s_n \in V.$$

Con lo que $A_r \subseteq^* U$ y $A_s \subseteq^* V$, en particular se tiene que el conjunto $A_r \cap A_s$ no puede tener cardinalidad mayor a $\min\{N_1, N_2\}$, así que:

$$|A_r \cap A_s| \leqslant \min\{N_1, N_2\} < \omega.$$

Ahora, se tiene que la familia $\mathcal{A}_1$ tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la cual es $\mathfrak{c}$, por lo que como $\omega_1 \leqslant \mathfrak{c}$ entonces existe una subfamilia $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_1$ tal que:

$$|\mathcal{A}_2| = \omega_1.$$

La familia $\mathcal{A}_2 \subseteq [\mathbb{Q}]^{\omega}$ sigue siendo casi ajena, pues $\mathcal{A}_1$ es casi ajena. Tenemos dos casos:

- Si $|\mathbb{Q} \setminus (\bigcup \mathcal{A}_2)| < \omega$, tomemos:

  $$B = \mathbb{Q} \setminus \left(\bigcup \mathcal{A}_2 \right).$$

  Este conjunto es finito. Tomemos ahora $C \in \mathcal{A}_2$. Definimos la familia $\mathcal{A}_3 \subseteq [\mathbb{Q}]^{\omega}$ como sigue:

  $$\mathcal{A}_3 = (\mathcal{A}_2 \setminus \{C\}) \cup \{C \cup B\},$$

  esta familia sigue siendo casi ajena y de cardinalidad ω_1, pues $\mathcal{A}_2$ es casi ajena y:

  $$|(C \cup B) \cap A| \leqslant |C \cap A| + |B| < \omega, \quad \forall A \in \mathcal{A}_2,$$

  pues $C \in \mathcal{A}_2$ y $|B| < \omega$, y $|\mathcal{A}_3| = |\mathcal{A}_1| = \omega_1$. Se sigue así que la familia $\mathcal{A}_3$ de cardinalidad ω_1 sigue siendo casi ajena y cumple que:

  $$\bigcup \mathcal{A}_3 = \mathbb{Q}.$$

- Si $|\mathbb{Q} \setminus (\bigcup \mathcal{A}_2)| = \omega$, tomemos:

  $$B = \mathbb{Q} \setminus \left(\bigcup \mathcal{A}_2\right).$$

  Definimos la familia $\mathcal{A}_3 \subseteq [\mathbb{Q}]^\omega$ dada por:

  $$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_2 \cup \{B\} \subseteq [\mathbb{Q}]^\omega.$$

  Esta familia es casi ajena, pues $\mathcal{A}_2$ es casi ajena y:

  $$|B \cap A| = |\emptyset| = 0 < \omega, \quad \forall A \in \mathcal{A}_2$$

  Además, tiene cardinalidad ω_1, ya que $|\mathcal{A}_3| = |\mathcal{A}_2 \cup \{B\}| = |\mathcal{A}_2| + 1 = \omega_1 + 1 = \omega_1$, por el Corolario (3.63) inciso *(d)* y, por construcción cumple que:

  $$\bigcup \mathcal{A}_3 = \mathbb{Q}.$$

En ambos casos hemos construido una familia casi ajena $\mathcal{A}_3 \subseteq [\mathbb{Q}]^\omega$ de cardinalidad ω_1 tal que:

$$\bigcup \mathcal{A}_3 = \mathbb{Q}.$$

Sea ahora $f : \mathbb{Q} \to \omega$ una biyección entre $\mathbb{Q}$ y ω. La familia:

$$f[\mathcal{A}_3] = \left\{ f[A] \in [\omega]^\omega \middle| A \in \mathcal{A}_3 \right\} \subseteq [\omega]^\omega,$$

sigue siendo casi ajena por ser f biyección, tiene cardinalidad ω_1 y cumple que:

$$\bigcup f[\mathcal{A}_3] = f\left[\bigcup \mathcal{A}_3\right] = f[\mathbb{Q}] = \omega.$$

Tomando $\mathcal{J} = f[\mathcal{A}_3]$ se sigue el resultado. ∎

Lema 4.21 (**Cofinalidad Ideal Generado por Familia Casi Ajena**)
Sean X un conjunto infinito y $\mathcal{A} \subseteq [X]^\omega$ una familia casi ajena infinita de subconjuntos de X, entonces:

$$\mathsf{cof}(\mathcal{I}(\mathcal{A})) = |\mathcal{A}|,$$

donde $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ es el ideal sobre X generado por $\mathcal{A}$. Además, este ideal es propio.

Demostración:
Sea $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{A})$ el ideal sobre X generado por $\mathcal{A}$. Consideremos la familia:

$$\mathcal{J}_\mathcal{A} = \left\{ \bigcup \mathcal{A}' \subseteq X \middle| \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A} \text{ finito} \right\}.$$

Notemos antes que como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{J}_\mathcal{A}$, entonces $|\mathcal{A}| \leqslant |\mathcal{J}_\mathcal{A}|$. Ahora, por el Corolario (3.63) se tiene que:

$$|\mathcal{J}_\mathcal{A}| \leqslant \omega \cdot |\mathcal{A}| \leqslant |\mathcal{A}|,$$

pues $\mathcal{A}$ es infinito, por lo que $\omega \leqslant |\mathcal{A}|$. Se sigue así que:

$$|\mathcal{J}_\mathcal{A}| = |\mathcal{A}|. \tag{4.14}$$

Probaremos ahora dos cosas:

(a) $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ **es cofinal en** $\mathcal{I}$. Por la Proposición (2.27) se tiene que:

$$\mathcal{I} = \left\{ I \subseteq X \middle| \text{existe } \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A} \text{ finito tal que } I \subseteq \bigcup \mathcal{A}' \right\},$$

con lo que se tiene por definición de cofinalidad que $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ es cofinal en $\mathcal{I}$.

(b) $|\mathcal{J}_{\mathcal{A}}| \leqslant |\mathcal{J}|$ **para toda familia** $\mathcal{J}$ **cofinal en** $\mathcal{I}$. Supongamos que existe una familia cofinal $\mathcal{J}$ en $\mathcal{I}$ tal que $|\mathcal{J}| < |\mathcal{J}_{\mathcal{A}}|$. Para cada $J \in \mathcal{J}$ existe $\mathcal{A}'_J \subseteq \mathcal{A}$ finito tal que:

$$J \subseteq \bigcup \mathcal{A}'_J.$$

Sea:

$$\mathcal{B} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} \mathcal{A}'_J,$$

se tiene que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Como $|\mathcal{A}'_J| < \omega$ y $|\mathcal{J}| < |\mathcal{J}_{\mathcal{A}}|$ entonces por el Corolario (3.63) se sigue que:

$$|\mathcal{B}| \leqslant \omega \cdot |\mathcal{J}| < |\mathcal{J}_{\mathcal{A}}| = |\mathcal{A}|,$$

por (4.14) y, ya que $|\mathcal{A}|$ es infinito. Por ende, existe $A_0 \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Al ser la familia $\mathcal{A}$ casi ajena se cumple que:

$$|A_0 \cap A| < \omega, \quad \forall A \in \mathcal{B},$$

pues, $\mathcal{B} \cup \{A_0\}$ también es casi ajena. En particular:

$$\left| A_0 \cap \left(\bigcup \mathcal{A}' \right) \right| < \omega,$$

para todo $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}$ finito. Por lo cual:

$$\left| A_0 \cap \left(\bigcup \mathcal{A}'_J \right) \right| < \omega, \quad \forall J \in \mathcal{J}.$$

Se sigue así que:

$$|A_0 \cap J| < \omega, \quad \forall J \in \mathcal{J}.$$

Lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{J}$ sea cofinal en $\mathcal{I}$, ya que $|A_0| = \omega \#_c$. Por tanto, debe suceder que $|\mathcal{J}_{\mathcal{A}}| \leqslant |\mathcal{J}|$.

Por el inciso *(a)* se tiene que:

$$\mathsf{cof}\,(\mathcal{I}) \leqslant |\mathcal{J}_{\mathcal{A}}|, \tag{4.15}$$

y por el inciso *(b)* se tiene que:

$$|\mathcal{J}_{\mathcal{A}}| \leqslant |\mathcal{J}|,$$

para toda familia $\mathcal{J}$ cofinal en $\mathcal{I}$, luego:

$$|\mathcal{J}_{\mathcal{A}}| \leqslant \mathsf{cof}\,(\mathcal{I}), \tag{4.16}$$

por (4.15) y (4.16) se sigue que $\mathsf{cof}\,(\mathcal{I}) = |\mathcal{J}_{\mathcal{A}}|$, es decir que $\mathsf{cof}\,(\mathcal{I}(\mathcal{A})) = |\mathcal{A}|$ usando (4.14).

Ahora, si $\mathcal{I}$ no fuese propio, existiría $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ finito tal que:

$$X = \bigcup \mathcal{A}'.$$

Dado que $\mathcal{A}$ es infinita, se sigue que existe $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$. Se cumple que:

$$|A \cap A'| < \omega, \quad \forall A' \in \mathcal{A}', \tag{4.17}$$

por tanto:

$$|A| = \left| \bigcup_{A' \in \mathcal{A}'} A \cap A' \right| \leqslant \sum_{A' \in \mathcal{A}'} |A \cap A'|,$$

siendo esta una suma finita y por (4.17), se sigue que $|A| < \omega$, lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{A} \subseteq [X]^{\omega}\#_c$. Por tanto, $\mathcal{I}$ es propio. ■

Observación 4.22
Como consecuencia de la segunda parte de este lema, siempre que lo usemos, al tomar el ideal $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ de la Proposición (4.10) este ideal será propio por el inciso *(b)*.

Lema 4.23
Sea X un conjunto infinito, entonces $|[X]^{<\omega}| = |X|$.

Demostración:
Observemos que $[X]^{<\omega}$ puede ser escrito como unión de conjuntos disjuntos a pares:

$$[X]^{<\omega} = \bigcup_{n<\omega} [X]^n,$$

donde $|[X]^0| = 1$ y $|[X]^n| = |X|$ para todo $0 < n < \omega$. Por lo cual:

$$|[X]^{<\omega}| = \left| \bigcup_{n<\omega} [X]^n \right| = \sum_{n<\omega} |[X]^n| = \omega \cdot \sup_{n<\omega} |[X]^n| = \omega \cdot |X|,$$

por la definición de suma de cardinales, del Lema (3.69) y ya que $\omega \leqslant |X|$ (pues X es infinito), en particular $1 < |X|$. Se sigue del Corolario (3.63) que:

$$|[X]^{<\omega}| = |X|.$$

■

Con estos lemas probados ya estamos en condiciones de dar una respuesta al problema de Malykhin:

Proposición 4.24
$\omega_1 < \mathfrak{p}$ implica la existencia de un ideal libre $\mathcal{I}$ sobre ω tal que $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) = \omega_1$ y el ideal $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ es de Fréchet.

Demostración:
Por el Lema (4.20) existe una familia casi ajena $\mathcal{J} \subseteq [\omega]^{\omega}$ de cardinalidad ω_1 tal que:

$$\bigcup \mathcal{J} = \omega.$$

Sea $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{J})$ el ideal sobre ω generado por $\mathcal{J}$. Veamos que $\mathcal{I}$ es libre, para ello notemos que:

$$\omega = \bigcup \mathcal{J} \subseteq \bigcup \mathcal{I} \subseteq \omega,$$

por ende $\bigcup \mathcal{I} = \omega$.

Como ω es infinito y $\mathcal{J} \subseteq [\omega]^\omega$ es casi ajena se sigue del Lema (4.21) que $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) = \mathsf{cof}(\mathcal{I}(\mathcal{J})) = |\mathcal{J}| = \omega_1$.

Ahora, por el Teorema (4.15) el grupo $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$ es grupo topológico T_0 dotándolo con la topología $\tau_{\mathcal{I}}$, ya que el ideal $\mathcal{I}$ es libre.

Además, por el Lema (2.8) y por los Teoremas (2.34) y (4.15) incisos *(b)* y *(d)* se sigue que:

$$\chi([\omega]^{<\omega}, A) = \chi([\omega]^{<\omega}, \emptyset) = \mathsf{cof}(\mathcal{I}_\emptyset) = \mathsf{cof}(\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}) = \mathsf{cof}(\mathcal{I}) = \omega_1 < \mathfrak{p}, \quad \forall A \in [\omega]^{<\omega}.$$

siendo $\mathcal{I}_\emptyset$ el ideal de conjuntos que no se acumulan en $\emptyset$. Dado que $|[\omega]^{<\omega}| = |\omega| = \omega$ por el Lema (4.23) se sigue del Teorema (4.18) que $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$ es de Fréchet, en particular, el ideal $\mathcal{I}_\emptyset = \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ es de Fréchet. ■

Teorema 4.25
$\omega_1 < \mathfrak{p}$ implica la existencia de una topología sobre el grupo booleano $([\omega]^\omega, \Delta)$ que lo haga T_0, Fréchet y no metrizable.

Demostración:
Sea $\mathcal{I}$ el ideal libre sobre ω de la Proposición (4.24). Por el Teorema (4.15) el grupo topológico $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$ es T_0, dado que $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ es de Fréchet, por el inciso *(e)* del teorema antes mencionado, este grupo topológico es de Fréchet. Ahora, por el Corolario (4.17) el grupo topológico $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$ no es metrizable, ya que $\omega < \omega_1 = \mathsf{cof}(\mathcal{I})$.

Por tanto, $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$ es un grupo topológico T_0 numerable de Fréchet que no es metrizable. ■

§4.4 Solución con $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$

Resulta que también podemos dar una respuesta con otras hipótesis. Para llegar a ello primero hablaremos un poco de ideales sobre el conjunto $\omega \times \omega$ y una caracterización de los elementos de $(\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega})^\perp$:

Lema 4.26 (Nyikos)
Sea $\mathcal{I}$ un ideal libre sobre ω. Entonces, $\mathcal{X} \in (\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega})^\perp$ si y solo si $\bigcup \mathcal{X} \in \mathcal{I}^\perp$ y se cumple que:

$$\left|\left\{X \in \mathcal{X} \middle| n \in X\right\}\right| < \omega, \quad \forall n \in \omega.$$

Demostración:
Probaremos la doble implicación.

$\Rightarrow$): Sea $\mathcal{X} \in (\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega})^\perp$, entonces:

$$|\mathcal{X} \cap \mathcal{A}| < \omega, \quad \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}.$$

Para cada $I \in \mathcal{I}$ definimos el conjunto:

$$\mathcal{I}_I = \left\{A \in [\omega]^{<\omega} \middle| A \cap I \neq \emptyset\right\}.$$

Se tiene por construcción que $\mathcal{I}_I \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$, para todo $I \in \mathcal{I}$, por ende:

$$|\mathcal{X} \cap \mathcal{I}_I| < \omega, \quad \forall I \in \mathcal{I}. \tag{4.18}$$

Veamos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} \cap \mathcal{I}_I &= \left\{X \in [\omega]^{<\omega} \middle| X \in \mathcal{X} \text{ y } X \in \mathcal{I}_I\right\} \\ &= \left\{X \in [\omega]^{<\omega} \middle| X \in \mathcal{X} \text{ y } X \cap I \neq \emptyset\right\},\end{aligned} \tag{4.19}$$

para todo $I \in \mathcal{I}$. Por tanto, para todo $I \in \mathcal{I}$:

$$\begin{aligned}\left(\bigcup \mathcal{X}\right) \cap I &= \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X \cap I \\ &= \left(\bigcup_{\substack{X \in \mathcal{X} \\ X \cap I = \emptyset}} X \cap I\right) \cup \left(\bigcup_{\substack{X \in \mathcal{X} \\ X \cap I \neq \emptyset}} X \cap I\right) \\ &= \emptyset \cup \left(\bigcup_{\substack{X \in \mathcal{X} \\ X \cap I \neq \emptyset}} X \cap I\right) \\ &= \bigcup_{\substack{X \in \mathcal{X} \\ X \cap I \neq \emptyset}} X \cap I.\end{aligned}$$

El conjunto de la derecha es finito, ya que $|X \cap I| \leqslant |X| < \omega$ para todo $X \in \mathcal{X} \cap \mathcal{I}_I$, pues $X \in [\omega]^{<\omega}$ y, la familia $\mathcal{X} \cap \mathcal{I}_I$ es finita por (4.18). Por tanto:

$$\left|\left(\bigcup \mathcal{X}\right) \cap I\right| < \omega, \quad \forall I \in \mathcal{I},$$

es decir que $\bigcup \mathcal{X} \in \mathcal{I}^{\perp}$. Ahora, como $\mathcal{I}$ es libre, por el Corolario (2.23) se tiene que $\{n\} \in \mathcal{I}$ para todo $n \in \omega$, por tanto:

$$\begin{aligned}\left\{X \in \mathcal{X} \middle| n \in X\right\} &= \left\{X \in [\omega]^{<\omega} \middle| X \in \mathcal{X} \text{ y } X \cap \{n\} \neq \emptyset\right\} \\ &= \mathcal{X} \cap \mathcal{I}_{\{n\}}, \quad \forall n \in \omega,\end{aligned}$$

donde el conjunto $\mathcal{X} \cap \mathcal{I}_{\{n\}}$ es finito por (4.18). Así que:

$$\left|\left\{X \in \mathcal{X} \middle| n \in X\right\}\right| < \omega, \quad \forall n \in \omega.$$

$\Leftarrow$): Supongamos que $\bigcup \mathcal{X} \in \mathcal{I}^{\perp}$ y que:

$$\left|\left\{X \in \mathcal{X} \middle| n \in X\right\}\right| < \omega, \quad \forall n \in \omega.$$

Para probar que $\mathcal{X} \in (\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega})^{\perp}$ basta con probar que:

$$|\mathcal{X} \cap \mathcal{I}_I| < \omega, \quad \forall I \in \mathcal{I}. \tag{4.20}$$

En efecto, supongamos que se cumple lo anterior. Sea $\mathcal{A} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$, entonces existe $I \in \mathcal{I}$ tal que:

$$A \cap I \neq \emptyset, \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

por definición de $\mathcal{I}_I$ se tiene que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}_I$, así que:

$$|\mathcal{X} \cap \mathcal{A}| \leqslant |\mathcal{X} \cap \mathcal{I}_I|,$$

donde el segundo miembro es finito por (4.20). Por tanto, $|\mathcal{X} \cap \mathcal{A}| < \omega$.

Probemos ahora (4.20). Sea $I \in \mathcal{I}$. Como $\bigcup \mathcal{X} \in (\mathcal{J}^{<\omega})^{\perp}$, entonces:

$$\left|\left(\bigcup \mathcal{X}\right) \cap I\right| < \omega. \tag{4.21}$$

Para cada $n \in \omega$ tomemos:

$$\mathcal{Y}_n = \left\{X \in \mathcal{X} \middle| n \in X\right\}, \tag{4.22}$$

por hipótesis este conjunto es finito. Sea:

$$\mathcal{Y} = \bigcup_{(\bigcup \mathcal{X}) \cap I} \mathcal{Y}_n. \tag{4.23}$$

Por (4.21) y (4.22) se tiene que $\mathcal{Y}$ es finito. Ahora, tomemos $X \in \mathcal{X} \cap \mathcal{I}_I$, entonces por (4.19) se tiene que $X \cap I \neq \emptyset$. Sea $n \in X \cap I$, tenemos que:

$$n \in X \subseteq \bigcup \mathcal{X},$$

luego $n \in (\bigcup \mathcal{X}) \cap I$, así que $X \in \mathcal{Y}_n \subseteq \mathcal{Y}$. Por tanto:

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{I}_I \subseteq \mathcal{Y},$$

como $\mathcal{Y}$ es finito se sigue que $|\mathcal{X} \cap \mathcal{I}_I| < \omega$. Por tanto, $\mathcal{X} \in (\mathcal{J}_{\mathcal{I}}^{<\omega})^{\perp}$. ■

LEMA 4.27

Existe una sucesión transfinita $(f_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{b}}$ de funciones en ${}^{\omega}\omega$ no decrecientes de longitud $\mathfrak{b}$ tal que:

$$f_\alpha <^* f_\beta, \quad \forall \alpha, \beta < \mathfrak{b}, \tag{4.24}$$

con $\alpha < \beta$, que además cumple que la sucesión es no acotada bajo la relación $\leqslant^*$ y tal que f_n es la función constante de valor n, para todo $n < \omega$.

Demostración:

Por la Proposición (3.104) existe una sucesión $(f'_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{b}}$ de funciones crecientes de ${}^{\omega}\omega$ de longitud $\mathfrak{b}$ tal que:

$$f'_\alpha <^* f'_\beta \quad \forall \alpha, \beta < \mathfrak{b},$$

con $\alpha < \beta$, que además cumple que la sucesión es no acotada bajo la relación $\leqslant^*$. Ahora, consideremos las funciones $g_m : \omega \to \omega$ dadas por:

$$g_m(n) = m, \quad \forall n < \omega,$$

para todo $m < \omega$. Se verifica rápidamente que $g_m <^* g_n$ siempre que $m < n$, para todo $m, n < \omega$. Además, se cumple que como f'_α es creciente, entonces para todo $m < \omega$ existe $N_m < \omega$ tal que:

$$n \geqslant N_m \Rightarrow f'_\alpha(n) > g_m(n),$$

por lo cual:

$$g_m <^* f'_\alpha,$$

para todo $m < \omega$ y para todo $\alpha < \mathfrak{b}$. Definimos la sucesión $(f_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{b}}$ como sigue:

$$f_\alpha = \begin{cases} g_\alpha & \text{si} \quad \alpha < \omega \\ f'_\beta & \text{si} \quad \alpha = \omega + \beta \text{ para algún } \beta < \mathfrak{b} \end{cases}, \quad \forall \alpha < \mathfrak{b}.$$

Por el Teorema (3.45) se tiene que f_α está bien definido, para todo $\alpha < \mathfrak{b}$. En efecto, si $\alpha < \mathfrak{b}$ se tienen dos casos:

- $\alpha < \omega$, en cuyo caso se tiene que $f_\alpha = g_\alpha$.
- $\omega \leqslant \alpha$, por el teorema antes mencionado existe un único ordinal β (más aún, $\beta \leqslant \alpha < \mathfrak{b}$) tal que $\alpha = \omega + \beta$, luego $f_\alpha = f'_\beta$.

Ahora, esta sucesión es de funciones no decrecientes en ${}^\omega\omega$, es no acotada bajo la relación $\leqslant^*$, ya que contiene como subsucesión a la sucesión $(f'_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{b}}$, la cual es no acotada bajo esa misma relación. Además, se cumple que:

$$f_\alpha <^* f_\beta, \quad \forall \alpha, \beta < \mathfrak{b},$$

con $\alpha < \beta$. ■

Lema 4.28
Usando la sucesión de funciones del Lema (4.27) se tiene que la familia:

$$\mathcal{A} = \left\{ f_\alpha \middle| \alpha < \mathfrak{b} \right\} \cup \left\{ C_n \middle| n < \omega \right\} \subseteq [\omega \times \omega]^\omega, \tag{4.25}$$

con $C_n = \{n\} \times \omega$ para todo $n < \omega$, es casi ajena. Además, si $\mathcal{I}'$ es el ideal generado por $\mathcal{A}$ sobre $\omega \times \omega$, se tiene que $\mathsf{cof}(\mathcal{I}') > \omega$ e $\mathcal{I}'$ es libre.

Demostración:
Haremos la prueba por partes:

(1) **$\mathcal{A}$ es casi ajena**. Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ distintos. Como la intersección es conmutativa, se tienen solamente tres casos:

- $A_1 = f_{\alpha_1}$ y $A_2 = f_{\alpha_2}$ para algunos $\alpha_1, \alpha_2 < \mathfrak{b}$. Como $A_1 \neq A_2$, entonces $\alpha_1 \neq \alpha_2$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\alpha_1 < \alpha_2$, por (4.24) se tiene que:

  $$f_{\alpha_1} <^* f_{\alpha_2},$$

  por lo cual existe $N < \omega$ tal que:

  $$n \geqslant N \Rightarrow f_{\alpha_1}(n) < f_{\alpha_2}(n),$$

  así que, las funciones f_{α_1} y f_{α_2} vistas como subconjunto de $\omega \times \omega$, cumplen que:

  $$A_1 \cap A_2 = f_{\alpha_1} \cap f_{\alpha_2} \subseteq \{0, 1, \ldots, N\} \times \{0, 1, \ldots, k\},$$

  donde $k = \text{máx}\{f_{\alpha_1}(0), \ldots, f_{\alpha_1}(N), f_{\alpha_2}(0), \ldots, f_{\alpha_2}(N)\}$. Así que $|A_1 \cap A_2| < \omega$.

- $A_1 = C_{n_1}$ y $A_2 = C_{n_2}$ para algunos $n_1, n_2 < \omega$. Como $A_1 \neq A_2$ se tiene que $n_1 \neq n_2$, luego:
$$A_1 \cap A_2 = (\{n_1\} \times \omega) \cap (\{n_2\} \times \omega) = \emptyset,$$
así que $|A_1 \cap A_2| < \omega$.
- $A_1 = f_\alpha$ para algún $\alpha < \mathfrak{b}$ y $A_2 = C_n$ para algún $n < \omega$, se tiene que:
$$A_1 \cap A_2 = f_\alpha \cap C_n = f_\alpha \cap (\{n\} \times \omega) = \{(n, f_\alpha(n))\},$$
por ser f_α función. Se sigue así que $|A_1 \cap A_2| < \omega$.

En cualquier caso se tiene que $|A_1 \cap A_2| < \omega$. Por ser arbitrarios se sigue que $\mathcal{A}$ es casi ajena.

(2) Veamos que:

- $\mathsf{cof}(\mathcal{I}') > \omega$. Como $\mathcal{I}'$ es el ideal generado por $\mathcal{A} \subseteq [\omega \times \omega]^\omega$, siendo esta familia casi ajena e infinita se sigue del Lema (4.21) que:
$$\mathsf{cof}(\mathcal{I}') = |\mathcal{A}|.$$
Ahora, como $\left\{f_\alpha \middle| \alpha < \mathfrak{b}\right\} \subseteq \mathcal{A}$, entonces:
$$\mathsf{cof}(\mathcal{I}') = |\mathcal{A}| \geqslant \mathfrak{b} \geqslant \omega_1 > \omega,$$
pues, $f_\alpha \neq f_\beta$ para todo $\alpha, \beta < \mathfrak{b}$ por (4.24), y por la Proposición (3.102) y el hecho de que $\omega_1 > \omega_0$.
- $\mathcal{I}'$ **es libre**. Como $\left\{C_n \middle| n < \omega\right\} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}'$, entonces:
$$\omega \times \omega = \bigcup_{n<\omega} \{n\} \times \omega = \bigcup_{n<\omega} C_n \subseteq \bigcup \mathcal{I}',$$
con lo que el ideal $\mathcal{I}'$ es libre.

De los incisos *(1)* y *(2)* se sigue el resultado. ■

Proposición 4.29 (**Nyikos 1981**)
$\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ implica la existencia de un ideal libre $\mathcal{I}$ sobre ω tal que $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) > \omega$ y el ideal $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ es de Fréchet.

Demostración:
Por el Lema (4.27) existe una sucesión transfinita $(f_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{b}}$ de funciones no decrecientes en ${}^\omega\omega$ de longitud $\mathfrak{b}$ tal que:
$$f_\alpha <^* f_\beta, \quad \forall \alpha, \beta < \mathfrak{b},$$
con $\alpha < \beta$, que además cumple que la sucesión es no acotada en ${}^\omega\omega$ bajo la relación $\leqslant^*$ y tal que f_n es la función constante de valor n, para todo $n < \omega$.

Para cada $\alpha < \mathfrak{b}$ tomemos:
$$L_\alpha = \left\{(n, m) \in \omega \times \omega \middle| m < f_\alpha(n)\right\}, \tag{4.26}$$

y para cada $n < \omega$; $C_n = \{n\} \times \omega$. Por el Lema (4.28) para la familia $\mathcal{A} = \left\{ f_\alpha \middle| \alpha < \mathfrak{b} \right\} \cup \left\{ C_n \middle| n < \omega \right\}$ se tiene que el ideal $\mathcal{I}'$ sobre $\omega \times \omega$ generado por esta familia es libre y tal que $\mathsf{cof}\,(\mathcal{I}') > \omega$.

Por ser $\omega \times \omega$ equipotente a ω (digamos bajo una biyección $\Gamma : \omega \times \omega \to \omega$), podemos ver al ideal $\mathcal{I}'$ sobre $\omega \times \omega$ como el ideal:

$$\mathcal{I} = \Gamma\,[\mathcal{I}'] = \left\{ \Gamma\,[I'] \middle| I' \in \mathcal{I}' \right\}$$

sobre ω, usando la Proposición (2.15). De los Lemas (2.19) y (2.33) se tiene que este ideal sobre ω sigue siendo libre y tal que $\mathsf{cof}\,(\mathcal{I}) > \omega$.

Veamos ahora que el ideal $\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ de la Proposición (4.10). construido a partir del ideal $\mathcal{I}$, sobre $[\omega]^{<\omega}$, es de Fréchet. Para ello, sea $\mathcal{X} \subseteq [\omega]^{<\omega}$ infinito tal que $\emptyset \notin \mathcal{X}$ y $\mathcal{X} \in (\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega})^+$. Para cada $\alpha < \mathfrak{b}$ definimos:

$$\mathcal{X}_\alpha = \left\{ X \in \mathcal{X} \middle| X \subseteq \Gamma\,[L_\alpha] \right\}. \tag{4.27}$$

Probaremos ahora la siguiente afirmación:

- **Existe un ordinal** α **con** $\omega \leqslant \alpha < \mathfrak{b}$ **tal que** $\mathcal{X}_\alpha \in (\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega})^+$. En efecto, supongamos que para todo $\alpha \in \mathfrak{b} \setminus \omega$ se tiene que $\mathcal{X}_\alpha \notin (\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega})^+$, luego $\mathcal{X}_\alpha \in \mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega}$ para todo $\alpha \in \mathfrak{b} \setminus \omega$, así que para todo $\alpha \in \mathfrak{b} \setminus \omega$ existe $I_\alpha \in \mathcal{I}$ tal que:

  $$X \cap I_\alpha \neq \emptyset, \quad \forall X \in \mathcal{X}_\alpha.$$

  Como $I_\alpha \in \mathcal{I}$, entonces al ser el ideal $\mathcal{I}'$ generado por la familia $\mathcal{A}$, existen $\beta'_0, \ldots, \beta'_{l_\alpha} < \mathfrak{b}$ y $n_0, \ldots, n_{k_\alpha} < \omega$ tales que:

  $$I_\alpha \subseteq \Gamma\left[\bigcup_{i=0}^{l_\alpha} f_{\beta'_i}\right] \cup \Gamma\left[\bigcup_{j=0}^{k_\alpha} C_{n_j}\right].$$

  Por tanto:

  $$\left(X \cap \Gamma\left[\bigcup_{i=0}^{l_\alpha} f_{\beta'_i}\right]\right) \cup \left(X \cap \Gamma\left[\bigcup_{j=0}^{k_\alpha} C_{n_j}\right]\right) = X \cap \Gamma\left[\bigcup_{i=0}^{l_\alpha} f_{\beta'_i} \cup \bigcup_{j=0}^{k_\alpha} C_{n_j}\right] \neq \emptyset, \quad \forall X \in \mathcal{X}_\alpha. \tag{4.28}$$

  Afirmamos que podemos elegir $\beta_0, \ldots, \beta_{m_\alpha}$ con $\beta_i < \alpha$ para todo $i \in [\![0, m_\alpha]\!]$ tales que:

  $$X \cap \Gamma\left[\bigcup_{i=0}^{m_\alpha} f_{\beta_i}\right] \neq \emptyset, \quad \forall X \in \mathcal{X}_\alpha.$$

  En efecto, sea $X \in \mathcal{X}_\alpha$. En caso de que no suceda lo anterior con los $\beta'_0, \ldots, \beta'_{l_\alpha}$ se tiene que ocurre alguno de los siguientes dos casos para X:

  - $X \cap \Gamma\left[\bigcup_{i=0}^{l_\alpha} f_{\beta'_i}\right] = \emptyset$. Si sucede lo anterior, forzosamente debemos tener por (4.28) que $X \cap \Gamma\left[\bigcup_{j=0}^{k_\alpha} C_{n_j}\right] \neq \emptyset$. Sea:

    $$N_{\alpha,1} = \text{máx}\left\{ f_\alpha(n_j) \middle| j \in [\![0, k_\alpha]\!] \right\}.$$

Se tiene así que:

$$
\begin{aligned}
X \cap \Gamma \left[\bigcup_{j=0}^{k_\alpha} C_{n_j} \right] &\subseteq X \cap \Gamma \left[\bigcup_{j=0}^{k_\alpha} \{n_j\} \times \{0, \dots, f_\alpha(n_j)\} \right] \\
&\subseteq X \cap \Gamma \left[\{n_0, \dots, n_k\} \times \{0, \dots, N_{\alpha,1}\} \right] \\
&\subseteq X \cap \Gamma \left[\bigcup_{j=0}^{N_{\alpha,1}} f_j \right],
\end{aligned}
$$

pues $X \subseteq \Gamma [L_\alpha]$ y las funciones f_j son las constantes de valor j para todo $j < \omega$. Así que $X \cap \Gamma \left[\bigcup_{j=0}^{N_{\alpha,1}} f_j \right] \neq \emptyset$.

- $X \cap \Gamma \left[\bigcup_{i=0}^{l_\alpha} f_{\beta'_i} \right] \neq \emptyset$. Si sucede lo anterior, entonces existe $I \subseteq [\![0, l_\alpha]\!]$ tal que $\beta'_i < \alpha$, para todo $i \in [\![0, l_\alpha]\!] \setminus I$ y $\alpha \leqslant \beta'_i$ para todo $i \in I$. En caso de que alguno de ellos sea igual con α, lo descartamos, ya que:

$$X \cap \Gamma [f_\alpha] = \emptyset,$$

pues $X \subseteq \Gamma [L_\alpha]$. Así que podemos asumir que $\alpha < \beta'_i$ para todo $i \in I$. Por (4.24) se tiene que:

$$f_\alpha <^* f_{\beta'_i}, \quad \forall i \in I.$$

Así que, para cada $i \in I$ existe $N_i < \omega$ tal que:

$$n \geqslant N_i \Rightarrow f_\alpha(n) < f_{\beta'_i}(n).$$

Sea $M = \text{máx} \left\{ N_i \middle| i \in I \right\}$, este máximo existe pues I es un conjunto finito. Se cumple que:

$$n \geqslant M \Rightarrow f_\alpha(n) < f_{\beta'_i}(n), \quad \forall i \in I.$$

Tomemos $N_{\alpha,2} = f_\alpha(M)$. Dado que $X \subseteq \Gamma [L_\alpha]$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
X \cap \Gamma \left[\bigcup_{i=0}^{l_\alpha} f_{\beta'_i} \right] &= \left(X \cap \Gamma \left[\bigcup_{i \in [\![0, l_\alpha]\!] \setminus I} f_{\beta'_i} \right] \right) \cup \left(X \cap \Gamma \left[\bigcup_{i \in I} f_{\beta'_i} \right] \right) \\
&\subseteq \left(X \cap \Gamma \left[\bigcup_{i \in [\![0, l_\alpha]\!] \setminus I} f_{\beta'_i} \right] \right) \cup \left(X \cap \Gamma \left[\{0, M\} \times \{0, f_\alpha(M)\} \right] \right) \\
&\subseteq \left(X \cap \Gamma \left[\bigcup_{i \in [\![0, l_\alpha]\!] \setminus I} f_{\beta'_i} \right] \right) \cup \left(X \cap \Gamma \left[\bigcup_{i=0}^{N_{\alpha,2}} f_i \right] \right) \\
&= X \cap \Gamma \left[\bigcup_{i \in [\![0, l_\alpha]\!] \setminus I} f_{\beta'_i} \cup \bigcup_{i=0}^{N_{\alpha,2}} f_i \right],
\end{aligned}
$$

pues, las funciones f_i son las constantes de valor i, para todo $i < \omega$.
Así que $X \cap \Gamma \left[\bigcup_{i \in [\![0, l_\alpha]\!] \setminus I} f_{\beta'_i} \cup \bigcup_{i=0}^{N_{\alpha,2}} f_i \right] \neq \emptyset$.

Tomemos $N_\alpha = \text{máx}\{N_{\alpha,1}, N_{\alpha,2}\}$, $m_\alpha = N_\alpha + |[\![0, l_\alpha]\!] \setminus I|$. Hacemos:

$$\beta_i = i, \quad \forall i < N_\alpha,$$

y $\beta_{N_\alpha+j} = \beta'_{l_j}$ para todo $j \in [\![1, c]\!]$, siendo $c = |[\![0, l_\alpha]\!] \setminus I|$, con $[\![0, l_\alpha]\!] \setminus I = \{l_1, \ldots, l_c\}$.

Hemos elegido así ordinales $\beta_0, \ldots, \beta_{m_\alpha}$ tales que $\beta_i < \alpha$, para todo $i \in [\![0, m_\alpha]\!]$ y que cumplen que:

$$X \cap \Gamma \left[\bigcup_{i=0}^{m_\alpha} f_{\beta_i}\right] \neq \emptyset, \quad \forall X \in \mathcal{X}_\alpha, \tag{4.29}$$

pues, tomando $X \in \mathcal{X}_\alpha$ se tiene que sucede alguno de los dos casos anteriores, en particular por ambos casos debe ocurrir (4.29).

Para cada $\alpha \in \mathfrak{b} \setminus \omega$ sea $F_\alpha = \{\beta_0, \ldots, \beta_{m_\alpha}\}$. Este conjunto cumple que $F_\alpha \in [\alpha]^{<\omega}$. Consideremos ahora la función $r_0 : \mathfrak{b} \setminus \omega \to \mathfrak{b}$ dada como sigue:

$$\alpha \mapsto |F_\alpha|.$$

Dado que el conjunto F_α es no vacío (pues $I_\alpha \neq \emptyset$), se cumple que $r_0 \geqslant 1$. Esta función es regresiva, pues:

$$r_0(\alpha) = |F_\alpha| < \omega \leqslant \alpha, \tag{4.30}$$

para todo $\alpha \in \mathfrak{b} \setminus \omega$. Como $\mathfrak{b} \setminus \omega$ es estacionario, pues $\mathfrak{b}$ es regular por la Proposición (3.105) y, si $C \subseteq \mathfrak{b}$ es CLUB se tiene que existe $\alpha \in C$ tal que $\omega < \alpha$ (por ser no acotado), luego $(\mathfrak{b} \setminus \omega) \cap C \neq \emptyset$. Se sigue de la definición que el conjunto $\mathfrak{b} \setminus \omega$ es estacionario.

Se tiene así por el Teorema (3.85) (Lema de Fodor) y por (4.30) que existen un ordinal $m < \omega$ y $S_0 \subseteq \mathfrak{b} \setminus \omega$ estacionario tales que:

$$r_0(\alpha) = |F_\alpha| = m, \quad \forall \alpha \in S_0,$$

como $r_0 \geqslant 1$, debe suceder que $0 < m < \omega$. Consideremos ahora la función $r_1 : S_0 \to \mathfrak{b}$ dada por:

$$r_1(\alpha) = \text{mín}(F_\alpha), \quad \forall \alpha \in S_0.$$

Como $F_\alpha \in [\alpha]^{<\omega}$, entonces $r_1(\alpha) < \alpha$, para todo $\alpha \in S_0$. Aplicando nuevamente el Lema de Fodor a la función regresiva r_1 y al estacionario S_0 obtenemos la existencia de un ordinal $\gamma_1 < \mathfrak{b}$ y $S_1 \subseteq S_0$ estacionario tales que:

$$r_1(\alpha) = \text{mín}(F_\alpha) = \gamma_1, \quad \forall \alpha \in S_1.$$

Consideremos ahora la función $r_2 : S_1 \to \mathfrak{b}$ dada por:

$$r_2(\alpha) = \text{mín}(F_\alpha \setminus \{\gamma_1\}).$$

Esta función nuevamente es regresiva, por lo que aplicando el Lema de Fodor a r_2 y al estacionario S_1 obtenemos la existencia de un ordinal $\gamma_2 < \mathfrak{b}$ y $S_2 \subseteq S_1$ estacionario tales que:

$$r_2(\alpha) = \text{mín}(F_\alpha \setminus \{\gamma_1\}) = \gamma_2, \quad \forall \alpha \in S_2.$$

Repitiendo este argumento m-veces obtenemos la existencia de ordinales $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ y conjuntos $S_1, \ldots, S_n$, usando las funciones regresivas $r_n : S_{n-1} \to \mathfrak{b}$ dadas por:

$$r_n(\alpha) = \text{mín}\left(F_\alpha \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}\}\right), \quad \forall \alpha \in S_{n-1},$$

para todo $n \leqslant m$, tales que γ_i es ordinal menor a α y S_i estacionario, para todo $i \in [\![0, m]\!]$, cumpliendo estos conjuntos que:

$$S_m \subseteq S_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq S_2 \subseteq S_1 \subseteq S_0.$$

Por construcción de los r_n se cumple que:

$$F_\alpha = F_\beta, \quad \forall \alpha, \beta \in S_m,$$

pues, $|F_\alpha| = m$ para todo $\alpha \in S_m$, ya que $S_m \subseteq S_0$. Por tanto:

$$F_\alpha = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}, \quad \forall \alpha \in S_m. \tag{4.31}$$

Tomemos $F = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ y $S = S_m$. Sea:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y} &= \left\{X \in \mathcal{X} \middle| X \cap \Gamma\left[f_\gamma\right] = \emptyset, \text{ para todo } \gamma \in F\right\}\\ &= \left\{X \in \mathcal{X} \middle| X \cap \Gamma\left[\bigcup_{\gamma \in F} f_\gamma\right] = \emptyset\right\}.\end{aligned}$$

Se tiene que $\mathcal{Y} \in (\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega})^+$. En efecto, por la Observación (4.11) basta con probar que para todo $I \in \mathcal{I}$ existe $Y \in \mathcal{Y}$ tal que $I \cap Y = \emptyset$. Sea $I \in \mathcal{I}$, como F es finito, entonces $\bigcup_{\gamma \in F} f_\gamma \in \mathcal{I}'$, por lo cual $\Gamma\left[\bigcup_{\gamma \in F} f_\gamma\right] \in \mathcal{I}$, así que por ser $\mathcal{I}$ ideal se sigue que:

$$I \cup \Gamma\left[\bigcup_{\gamma \in F} f_\gamma\right] \in \mathcal{I}.$$

Como $\mathcal{X} \in (\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega})^+$, entonces existe $X \in \mathcal{X}$ tal que:

$$\left(I \cup \Gamma\left[\bigcup_{\gamma \in F} f_\gamma\right]\right) \cap X = \emptyset,$$

en particular, $I \cap X = \emptyset$ y $\Gamma\left[\bigcup_{\gamma \in F} f_\gamma\right] \cap X = \emptyset$, por lo cual $X \in \mathcal{Y}$. Tomando $Y = X$ se tiene que $Y \in \mathcal{Y}$ es tal que $I \cap Y = \emptyset$. Se sigue así que $\mathcal{Y} \in (\mathfrak{I}_{\mathcal{I}}^{<\omega})^+$.

Construimos por inducción una sucesión $(Y_n)_{n<\omega}$ de elementos de $\mathcal{Y}$ como sigue:

- Tomamos $Y_0 \in \mathcal{Y}$.
- Supongamos elegidos $Y_0, \ldots, Y_n \in \mathcal{Y}$ tales que:

$$\text{máx}\,\pi_1\left[\Gamma^{-1}\left[Y_k\right]\right] < \text{mín}\,\pi_1\left[\Gamma^{-1}\left[Y_{k+1}\right]\right], \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!],$$

donde $\pi_1 : \omega \times \omega \to \omega$ es la función proyección de la primera entrada. Como $Y_n \in \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ con $\mathcal{X} \subseteq [\omega]^{<\omega}$, se tiene que $\Gamma^{-1}[Y_n]$ es finito, así que el conjunto $\pi_1[\Gamma^{-1}[Y_n]]$ también lo es, tomemos:

$$k_n = \max \pi_1 \left[\Gamma^{-1}[Y_n]\right].$$

Se tiene que $\bigcup_{i<k_n+1} C_i \in \mathcal{I}'$, por lo cual $\Gamma\left[\bigcup_{i<k_n+1} C_i\right] \in \mathcal{I}$. Como $\mathcal{Y} \in (\mathfrak{J}_{\mathcal{I}}^{<\omega})^+$, se sigue que existe $Y_{n+1} \in \mathcal{Y}$ tal que:

$$\Gamma\left[\bigcup_{i<k_n+1} C_i\right] \cap Y_{n+1} = \emptyset,$$

es decir que:

$$\left(\bigcup_{i<k_n+1} C_i\right) \cap \Gamma^{-1}[Y_{n+1}] = \emptyset.$$

Notemos que $\bigcup_{i<k_n+1} C_i = \{0, \ldots, k_n\} \times \omega$, así que $\{0, \ldots, k_n\} \cap \pi_1[\Gamma^{-1}[Y_{n+1}]] = \emptyset$, por tanto:

$$\max \pi_1 \left[\Gamma^{-1}[Y_n]\right] = k_n < \min \pi_1 \left[\Gamma^{-1}[Y_{n+1}]\right].$$

Usando inducción tenemos construida una sucesión $(Y_n)_{n<\omega}$ de elementos de $\mathcal{Y}$ tales que:

$$\max \pi_1 \left[\Gamma^{-1}[Y_n]\right] < \min \pi_1 \left[\Gamma^{-1}[Y_{n+1}]\right], \quad \forall n < \omega. \tag{4.32}$$

Sea $K = \left\{k_n < \omega \middle| n < \omega\right\}$, donde $k_n = \min \pi_1[\Gamma^{-1}[Y_n]]$, para todo $n < \omega$. Definimos la función $h : K \to \omega$ como sigue:

$$h(k_n) = \max \pi_2 \left[\Gamma^{-1}[Y_n]\right] + 1, \quad \forall n < \omega,$$

donde $\pi_2 : \omega \times \omega \to \omega$ es la función proyección de la segunda entrada. Extendemos h a todo ω de la siguiente forma:

$$h(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n < k_0. \\ h(k_m) & \text{si} \quad k_m \leqslant n < k_{m+1} \text{ para algún } m < \omega. \end{cases}, \quad \forall n < \omega.$$

Esto es posible, ya que $\lim_{n\to\omega} k_n = \omega$. En esencia, lo que estamos haciendo con la función h es *encerrar* a los conjuntos $\Gamma^{-1}[Y_n]$, pues, notemos que se cumple por (4.32) que:

$$\Gamma^{-1}[Y_n] \subseteq \{k_n, \ldots, k_{n+1} - 1\} \times \{0, \ldots, h(k_n) - 1\}, \quad \forall n < \omega. \tag{4.33}$$

Ahora, como la sucesión transfinita de funciones $(f_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{b}}$ es no acotada bajo la relación $\leqslant^*$, entonces existe $\alpha' < \mathfrak{b}$ tal que:

$$h \leqslant^* f_{\alpha'}.$$

Como S es estacionario y el conjunto $[\alpha', \mathfrak{b}[$ es CLUB, de la definición de estacionario se sigue que $S \cap [\alpha', \mathfrak{b}[\neq \emptyset$, por lo cual existe $\alpha \in S \cap [\alpha', \mathfrak{b}[$. Al ser la relación $\leqslant^*$ transitiva se sigue que:

$$h \leqslant^* f_\alpha,$$

con lo cual, existe $N < \omega$ tal que:

$$n \geqslant N \Rightarrow f_\alpha(n) \geqslant h(n).$$

Por lo que de (4.33) se sigue que:

$$n \geqslant N \Rightarrow \Gamma^{-1}[Y_n] \subseteq L_\alpha,$$

es decir:

$$n \geqslant N \Rightarrow Y_n \subseteq \Gamma[L_\alpha]. \tag{4.34}$$

Tomemos $X = Y_N$. Se tiene que $X \in \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ y se sigue de (4.34) que $X \in \mathcal{X}_\alpha$. Como $\alpha \in S$ entonces $F_\alpha = F$, por lo cual de (4.29) tenemos que $X \cap \Gamma\left[\bigcup_{\gamma\in F} f_\gamma\right] \neq \emptyset$, pero como $X \in \mathcal{Y}$ entonces de la definición de $\mathcal{Y}$ se tiene que $X \cap \Gamma\left[\bigcup_{\gamma\in F} f_\gamma\right] = \emptyset$, lo cual es una contradicción$\#_c$.

Por tanto, existe un ordinal α con $\omega \leqslant \alpha < \mathfrak{b}$ tal que $\mathcal{X}_\alpha \in (\mathcal{J}_{\mathcal{I}}^{<\omega})^+$.

Probada esta afirmación se tiene que existe un ordinal α con $\omega \leqslant \alpha < \mathfrak{b}$ tal que $\mathcal{X}_\alpha \in (\mathcal{J}_{\mathcal{I}}^{<\omega})^+$. Notemos que:

$$\mathcal{X}_\alpha = \left\{X \in \mathcal{X} \middle| X \subseteq \Gamma\left[L_\alpha\right]\right\} \subseteq [\omega]^{<\omega},$$

por lo cual $X \in [\Gamma\left[L_\alpha\right]]^{<\omega}$ para todo $X \in \mathcal{X}_\alpha$. Por el Lema (4.23) se tiene que $\left|[\Gamma(L_\alpha)]^{<\omega}\right| = |L_\alpha| = \omega$ (ya que L_α es numerable por ser f_α creciente), por lo cual, existe una biyección $\Pi : [\Gamma(L_\alpha)]^{<\omega} \to \omega$. Tomemos:

$$\mathcal{X}^\beta = \left\{X \in \mathcal{X}_\alpha \middle| X \cap \Gamma[f_\beta] = \emptyset\right\}, \quad \forall \beta \leqslant \alpha, \tag{4.35}$$

y para cada $n < \omega$:

$$\mathcal{X}_n^\beta = \left\{X \in \mathcal{X}^\beta \middle| X \cap \Gamma[n \times \omega] = \emptyset\right\}. \tag{4.36}$$

Consideremos la familia:

$$\mathfrak{X} = \left\{\mathcal{X}_n^\beta \middle| \beta \leqslant \alpha \text{ y } n < \omega\right\}$$

Afirmamos que la familia $\Pi\left[\mathfrak{X}\right] = \left\{\Pi[\mathcal{X}_n^\beta] \subseteq \omega \middle| \beta \leqslant \alpha \text{ y } n < \omega\right\}$ forma una familia centrada de subconjuntos infinitos de ω:

- $\Pi\left[\mathfrak{X}\right]$ **es centrada**. Si $\mathfrak{X}' \subseteq \mathfrak{X}$ es finito, entonces existen $\beta_0, \ldots, \beta_k \leqslant \alpha$ y $n_0, \ldots, n_k < \omega$ tales que:

  $$\mathfrak{X}' = \left\{\mathcal{X}_{n_i}^{\beta_i} \middle| \beta_i \leqslant \alpha \text{ y } n_i < \omega \text{ para todo } i \in [\![0, k]\!]\right\}.$$

  Entonces:

  $$\begin{aligned}
  \bigcap \mathfrak{X}' &= \bigcap_{i=0}^{k} \mathcal{X}_{n_i}^{\beta_i} \\
  &= \left\{X \in \mathcal{X}_\alpha \middle| X \cap \Gamma[f_{\beta_i}] = \emptyset \text{ y } X \cap \Gamma[n_i \times \omega] = \emptyset \text{ para todo } i \in [\![0, k]\!]\right\} \\
  &= \left\{X \in \mathcal{X}_\alpha \middle| X \cap \Gamma\left[\bigcup_{i=0}^{k} f_{\beta_i}\right] = \emptyset \text{ y } X \cap \Gamma\left[\bigcup_{i=0}^{k} n_i \times \omega\right] = \emptyset\right\}.
  \end{aligned}$$

  Veamos que $\bigcap \mathfrak{X}'$ es infinito. Dado que $\mathcal{X}_\alpha \in (\mathcal{J}_{\mathcal{I}}^{<\omega})^+$, entonces para el elemento:

  $$I_0' = \left(\bigcup_{i=1}^{k} f_{\beta_i}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m_0} C_i\right) \in \mathcal{I}',$$

con $m_0 = \max\left\{ n_i \middle| i \in [\![0,k]\!] \right\}$, se tiene para $I_0 = \Gamma\left[I_1'\right] \in \mathcal{I}$ que existe $X_0 \in \mathcal{X}_\alpha$ tal que $X_0 \cap I_0 = \emptyset$, es decir que:

$$X_0 \cap \Gamma\left[\bigcup_{i=1}^{k} f_{\beta_i}\right] = \emptyset \quad \text{y} \quad X_0 \cap \Gamma\left[\bigcup_{i=1}^{k} n_i \times \omega\right],$$

luego, $X_0 \in \bigcap \mathfrak{X}'$. Al ser el ideal $\mathcal{I}$ libre se tiene que existe $J_0 \in \mathcal{I}$ tal que:

$$X_0 \cap J_0 \neq \emptyset,$$

en particular, al ser el ideal $\mathcal{I}'$ generado por la familia $\mathcal{A}$, debe existir $\beta_{k+1} < \mathfrak{b}$ con $\beta_{k+1} \neq \beta_i$ o $n_{k+1} < \omega$ con $n_{k+1} \neq n_i$, para todo $i \in [\![1,k]\!]$, tal que:

$$X_0 \cap \Gamma\left[f_{\beta_{k+1}}\right] \neq \emptyset \quad \text{o} \quad X_0 \cap \Gamma\left[C_{n_{k+1}}\right] \neq \emptyset, \tag{4.37}$$

y en respectivos casos podemos tomar $n_{k+1} = n_k$ y $f_{\beta_{k+1}} = f_{\beta_k}$. Repitiendo el proceso encontramos $X_1 \in \mathcal{X}_\alpha$ tal que:

$$X_1 \cap \Gamma\left[\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} f_{\beta_i}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m_1} C_i\right)\right] = \emptyset, \tag{4.38}$$

con $m_1 = \max\left\{ n_i \middle| i \in [\![0,k+1]\!] \right\}$, en particular:

$$X_1 \cap \Gamma\left[\bigcup_{i=1}^{k} f_{\beta_i}\right] = \emptyset \quad \text{y} \quad X_1 \cap \Gamma\left[\bigcup_{i=1}^{k} n_i \times \omega\right],$$

así que $X_1 \in \bigcap \mathfrak{X}'$ y se tiene que $X_0 \neq X_1$ por (4.37) y (4.38). Usando inducción se prueba que existe una sucesión $(X_n)_{n<\omega}$ de elementos en $\mathcal{X}_\alpha$ distintos a pares tales que $X_n \in \bigcap \mathfrak{X}'$ para todo $n < \omega$, por lo cual $\bigcap \mathfrak{X}'$ es infinito. Por tanto, para todo $\Pi\left[\mathfrak{X}'\right] \subseteq \Pi\left[\mathfrak{X}\right]$ finito se tiene que:

$$\bigcap \Pi\left[\mathfrak{X}'\right] = \Pi\left[\bigcap \mathfrak{X}'\right],$$

donde el conjunto $\bigcap \mathfrak{X}'$ es infinito por lo probado anteriormente, al ser Π biyección se sigue que $\bigcap \Pi\left[\mathfrak{X}'\right]$ también es infinito.

- **Todo elemento de $\Pi\left[\mathfrak{X}\right]$ es infinito**. Se tiene por el inciso anterior.

Como:

$$\left|\Pi\left[\mathfrak{X}\right]\right| = \left|\mathfrak{X}\right| = \max\left\{\left|\alpha\right|, \omega\right\} < \mathfrak{b},$$

pues $|\alpha| \leqslant \alpha < \mathfrak{b}$ y $\omega < \mathfrak{b}$, al tenerse que $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ se sigue que existe una pseudointersección numerable $\mathfrak{P} \in [\omega]^\omega$ de la familia $\Pi\left(\mathfrak{X}\right)$. Tomemos:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{P} \cap \Pi\left[\mathcal{X}_\alpha\right].$$

Como $\mathfrak{P}$ es una pseudointersección numerable de la familia $\Pi\left[\mathfrak{X}\right]$ y esta familia está conformada por subconjuntos de $\Pi[\mathcal{X}_\alpha]$, se sigue que $\mathfrak{C}$ sigue siendo numerable y una pseudointersección de la familia $\Pi[\mathfrak{X}]$, ya que al ser $\mathfrak{P}$ una pseduointersección, entonces $\mathfrak{P}$ está casi totalmente contenido en todo elemento de $\Pi\left[\mathfrak{X}\right]$, donde todos estos elementos son subconjuntos de $\Pi[\mathcal{X}_\alpha]$ (por definición de $\Pi[\mathfrak{X}]$), así que $\mathfrak{C}$ debe seguir siendo una pseudointersección de $\Pi[\mathfrak{X}]$.

Este $\mathfrak{C} \in [\omega]^\omega$ cumple además que $\Pi^{-1}[\mathfrak{C}] \subseteq \mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{X}$. Tomemos así $\mathcal{C} = \Pi^{-1}[\mathfrak{C}] \subseteq [\Gamma[L_\alpha]]^{<\omega}$. Por lo anterior se sigue que:

$$\mathcal{C} \in [\mathcal{X}_\alpha]^\omega \subseteq [\mathcal{X}]^\omega. \tag{4.39}$$

Sea:

$$\mathcal{C}' = \left\{\Gamma^{-1}\left[C\right] \subseteq L_\alpha \middle| C \in \mathcal{C}\right\} \subseteq \left[L_\alpha\right]^{<\omega}.$$

Se tiene lo siguiente:

- $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{I}^\perp$, para ello basta con probar que $\bigcup \mathcal{C}' \in \mathcal{I}'^\perp$, es decir que:

  $$\left|\left(\bigcup \mathcal{C}'\right) \cap I'\right| < \omega, \quad \forall I' \in \mathcal{I}'.$$

  Sea $U = \bigcup \mathcal{C}'$. Como $\mathcal{I}'$ es el ideal generado por la familia $\mathcal{A}$, entonces, basta con ver que para todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene que:

  $$|U \cap A| < \omega.$$

  Sea $A \in \mathcal{A}$, se tienen dos casos:

  - $A = f_\beta$ para algún $\beta < \mathfrak{b}$. Se tienen dos casos:
    - $\beta < \alpha$. Como $\mathfrak{C}$ es una pseudointersección de la familia $\Pi[\mathfrak{X}]$, se cumple que:

      $$|\mathfrak{C} \setminus \Pi[\mathcal{X}_n^\gamma]| < \omega,$$

      para todo $\gamma \leqslant \alpha$ y para todo $n < \omega$, en particular lo anterior ocurre para:

      $$\left|\mathfrak{C} \setminus \Pi[\mathcal{X}_0^\beta]\right| < \omega.$$

      Notemos que $\mathcal{X}_0^\beta = \mathcal{X}^\beta$, luego:

      $$\left|\mathcal{C} \setminus \mathcal{X}^\beta\right| < \omega,$$

      por lo que:

      $$\begin{aligned} X \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{X}^\beta &\iff X \in \mathcal{C} \text{ y } X \notin \mathcal{X}^\beta \\ &\iff X \in \mathcal{X} \text{ y } X \cap \Gamma\left(f_\beta\right) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

      Por lo cual:

      $$\begin{aligned} |U \cap f_\beta| &= \left|\bigcup_{C' \in \mathcal{C}'} C' \cap f_\beta\right| \\ &\leqslant \sum_{C' \in \mathcal{C}'} |C' \cap f_\beta| \\ &= \sum_{C \in \mathcal{C}} |C \cap \Gamma[f_\beta]| \\ &= \sum_{C \in \mathcal{C} \cap \mathcal{X}^\beta} |C \cap \Gamma[f_\beta]| + \sum_{C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{X}^\beta} |C \cap \Gamma[f_\beta]| \\ &= 0 + \sum_{C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{X}^\beta} |C \cap \Gamma[f_\beta]| \\ &= \sum_{C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{X}^\beta} |C \cap \Gamma[f_\beta]|. \end{aligned}$$

Como $|C| < \omega$ para todo $C \in \mathcal{C}$, entonces la suma es una suma de elementos finitos y, la suma es finita, ya que $\left|\mathcal{C} \setminus \mathcal{X}^\beta\right| < \omega$, así que $\sum_{C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{X}^\beta} |C \cap \Gamma[f_\beta]| < \omega$, es decir que $|U \cap f_\beta| < \omega$.

- $\alpha \leqslant \beta$. Si $\beta = \alpha$ entonces como $U \subseteq L_\alpha$ se tiene por definición de L_α que:

$$|U \cap f_\beta| = |U \cap f_\alpha| = 0 < \omega.$$

Ahora, si $\alpha < \beta$ entonces $f_\alpha <^* f_\beta$, por lo cual existe $N < \omega$ tal que:

$$n \geqslant N \Rightarrow f_\alpha(n) < f_\beta(n),$$

nuevamente, como $U \subseteq L_\alpha$, se sigue que:

$$U \cap f_\beta = U \cap \{f_\beta(0), \ldots, f_\beta(N-1)\} \subseteq \{f_\beta(0), \ldots, f_\beta(N-1)\},$$

así que $|U \cap f_\beta| < \omega$.

- $A = C_n$ para algún $n < \omega$. Como $U \subseteq L_\alpha$, entonces:

$$U \cap C_n \subseteq U \cap (\{n\} \times \{0, \ldots, f_\alpha(n) - 1\}) \subseteq \{n\} \times \{0, \ldots, f_\alpha(n) - 1\},$$

por lo cual $|U \cap C_n| < \omega$.

De los tres incisos anteriores se sigue que $|U \cap A| < \omega$, por lo cual $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{I}^\perp$.

- $\left|\left\{C \in \mathcal{C} \middle| n \in C\right\}\right| < \omega$ para todo $n < \omega$. Para ello, basta probar que:

$$\left|\left\{C' \in \mathcal{C}' \middle| \Gamma^{-1}(n) \in C'\right\}\right| < \omega.$$

En efecto, sea $n < \omega$ y, como Γ es biyección, tomemos $(n_1, n_2) = \Gamma^{-1}(n)$. Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\left\{C' \in \mathcal{C}' \middle| \Gamma^{-1}(n) \in C'\right\} &= \left\{C' \in \mathcal{C}' \middle| (n_1, n_2) \in C'\right\} \\ &\subseteq \left\{C \in \mathcal{C}' \middle| C' \cap (n_1 + 1) \times \omega \neq \emptyset\right\},\end{aligned}$$

y:

$$\left|\left\{C \in \mathcal{C}' \middle| C' \cap (n_1 + 1) \times \omega \neq \emptyset\right\}\right| = \left|\left\{C \in \mathcal{C} \middle| C \cap \Gamma\left[(n_1 + 1) \times \omega\right] \neq \emptyset\right\}\right|,$$

por lo cual:

$$\left|\left\{C' \in \mathcal{C}' \middle| \Gamma^{-1}(n) \in C'\right\}\right| \leqslant \left|\left\{C \in \mathcal{C} \middle| C \cap \Gamma\left[(n_1 + 1) \times \omega\right] \neq \emptyset\right\}\right|. \tag{4.40}$$

Por ser $\mathfrak{C}$ pseudointersección de la familia $\Pi(\mathfrak{X})$, se tiene que:

$$\left|\mathfrak{C} \setminus \Pi(\mathcal{X}_n^\beta)\right| < \omega,$$

para todo $\beta \leqslant \alpha$ y para todo $n < \omega$, en particular, se cumple que:

$$\left|\mathcal{C} \setminus \mathcal{X}_{n_1+1}^\alpha\right| < \omega, \tag{4.41}$$

siendo:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^{\alpha}_{n_1+1} &= \left\{X \in \mathcal{X}^{\alpha} \middle| X \cap \Gamma\left[(n_1+1)\times\omega\right] = \emptyset\right\}\\ &= \left\{X \in \mathcal{X}_{\alpha} \middle| X \cap \Gamma\left[(n_1+1)\times\omega\right] = \emptyset\right\},\end{aligned}$$

pues, $\mathcal{X}^{\alpha} = \mathcal{X}_{\alpha}$ dado que $X \subseteq \Gamma(f_{\alpha})$, para todo $X \in \mathcal{X}_{\alpha}$. Se tiene de esta forma que:

$$\begin{aligned}\left|\left\{C \in \mathcal{C} \middle| C \cap \Gamma\left[(n_1+1)\times\omega\right] \neq \emptyset\right\}\right| &= \left|\left\{C \in \mathcal{C} \middle| C \notin \mathcal{X}^{\alpha}_{n_1+1}\right\}\right|\\ &= \left|\mathcal{C} \setminus \mathcal{X}^{\alpha}_{n_1+1}\right|\\ &< \omega,\end{aligned}$$

por (4.41). De (4.40) se sigue que:

$$\left|\left\{C' \in \mathcal{C}' \middle| \Gamma^{-1}(n) \in C'\right\}\right| < \omega.$$

Por los dos incisos anteriores se tiene, usando el Lema (4.26) que:

$$\mathcal{C} \in \left(\mathfrak{I}^{<\omega}_{\mathcal{I}}\right)^{\perp}. \tag{4.42}$$

En resumen, en el grupo topológico $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$ del Teorema (4.15), se tiene que para $\mathcal{X} \subseteq [\omega]^{<\omega}$ infinito tal que $\emptyset \notin \mathcal{X}$ y $\mathcal{X} \in (\mathfrak{I}^{<\omega}_{\mathcal{I}})^{+}$ existe $\mathcal{C} \in [\mathcal{X}]^{\omega}$ por (4.39), tal que $\mathcal{C} \in (\mathfrak{I}^{<\omega}_{\mathcal{I}})^{\perp}$ por (4.42). Del Corolario (2.45) se sigue que el ideal $\mathcal{I}_{\emptyset}$ es de Fréchet, esto es (nuevamente, por el Teorema (4.15) inciso *(b)*) que el ideal $\mathfrak{I}^{<\omega}_{\mathcal{I}}$ es de Fréchet. ∎

Teorema 4.30 (**Nyikos 1981**)
$\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ implica la existencia de una topología sobre el grupo booleano $([\omega]^{\omega}, \Delta)$ que lo haga T_0, Fréchet y no metrizable.

Demostración:
Es análogo a lo hecho en el Teorema (4.25) usando ahora la Proposición (4.29). ∎

§4.5 Conclusiones

Para terminar este trabajo, hablaremos sobre la importancia del Problema de Malykhin. En 1940 Kurt Gödel probó que:

Si ZFC es consistente entonces $\mathsf{ZFC}+\mathsf{CH}$ es consistente,

siendo CH la Hipótesis del Continuo y $\neg\mathsf{CH}$ su negación. Paul Cohen, complementando el trabajo hecho por Gödel, probó 1963 que:

Si ZFC es consistente entonces $\mathsf{ZFC}+\neg\mathsf{CH}$ es consistente.

La profundidad de la prueba y la razón por la Cohen que recibió 1966 la Medalla Fields es que a partir de su prueba y junto con el trabajo de Gödel se demuestra que la hipótesis del continuo es independiente de los Axiomas de ZFC, esto es que no se puede afirmar ni negar y, más aún, asumiendo la consistencia de ZFC (misma que no se puede probar por los Teoremas de Incompletud de Gödel) resulta que afirmarla o negarla nos sigue dando un modelo de ZFC que sigue siendo consistente. De hecho, el fue más allá y probó que el Axioma de Elección (CA) es independiente de ZF.

Con el Problema de Malykhin sucede lo mismo que con la Hipótesis del Continuo. En este trabajo se probó que el Problema de Malykhin tiene respuesta afirmativa asumiendo que $\omega_1 < \mathfrak{p}$ o que $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$. Un modelo de ZFC donde se cumple una de estas dos desigualdades es ZFC+CH, ya que asumiendo la Hipótesis del Continuo se tiene que $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, lo cual implica:

$$\omega_1 = \mathfrak{p} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c},$$

pues $\omega_1 \leqslant \mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{c}$ por la Proposición (3.102). Así que tenemos un modelo consistente de ZFC (asumiendo que ZFC es consistente) donde la respuesta al Problema de Malykhin es afirmativa.

Otro modelo de ZFC donde sucede lo anterior es ZFC+$\neg$CH+MA, donde MA es el Axioma de Martin:

Definición 4.2 (**Axioma de Martin**)
Sea κ cardinal tal que $\kappa < \mathfrak{c}$. Entonces, para todo orden parcial P que cumpla la condición de cadena contable y toda familia D de subconjuntos densos de P con $|D| \leqslant \kappa$, existe un filtro $\mathcal{F} \subseteq P$ que intersecta cada elemento de D.

Se tiene que ZFC+MA implica que $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ y como asumimos $\neg$CH, tenemos:

$$\omega_1 < \mathfrak{c} = \mathfrak{p}.$$

En esta Tesis no se hace un estudio del Axioma de Martin y sus consecuencias, las mismas pueden ser encontradas en [Jec03]. En particular, allí se muestra que ZFC+$\neg$CH+MA es consistente asumiendo que ZFC es consistente.

En 2014 Michael Hrušák y Ulises Ariet Ramos García probaron, usando una técnica llamada *forcing*, que asumiendo que ZFC es consistente, existe un modelo de ZFC en el cual la respuesta al Problema de Malykhin es negativa.

La relevancia del Problema de Malykhin radica en que es independiente de ZFC y en su simpleza enunciar, ya que es solo necesario conocer algunas cosas sobre Grupos Topológicos y Topología General para entender el problema. Muchos de los problemas independientes de ZFC requieren más teoría para poder ser enunciados, como lo son CH, la Hipótesis del Continuo Generalizada GCH, MA, $\neg$CH+MA, etc…

A pesar de su simplicidad, resulta increíble el hecho de que este problema sea independiente de ZFC y este texto sirve como una ejemplificación de que este tipo de problemas pueden surgir en lugares inesperados.

Anexo A

Recursión Transfinita

El problema de definir operaciones sobre ordinales radica en que no existe un conjunto que contenga a todos los ordinales, por lo que no nos es posible construir una operación de la habitual. Para solventar este problema usamos recursión transfinita.

§A.1 Recursión Transfinita

Para definir operaciones sobre ordinales lo tendremos que hacer de forma recursiva. Para ello, usaremos el siguiente teorema. Antes de ello daremos la siguiente definición que nos servirá en la demostración del mismo:

Definición A.1 (**Funciones Compatibles y Sistemas de Funciones Compatibles**)
Dos funciones f y g son **compatibles**, si $f \subseteq g$, es decir que $\operatorname{dom}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \operatorname{dom}(f)$.

Un conjunto $\left\{ f_i \middle| i \in I \right\}$ es un **sistema compatible de funciones** si para todo $i, j \in I$ se tiene que f_i y f_j son compatibles.

Observación A.1 (**Unión Sistema Compatible de Funciones es Función**)
Si $F = \left\{ f_i \middle| i \in I \right\}$ es un sistema compatible de funciones, entonces $\bigcup F$ es función. En efecto, notemos que:

$$\bigcup F \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} \operatorname{dom}(f_i) \right) \times \left(\bigcup_{i \in I} \operatorname{ran}(f_i) \right).$$

Ahora, si $x \in \bigcup_{i \in I} \operatorname{dom}(f_i)$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in \operatorname{dom}(f_{i_0})$, luego por ser f_i función existe un único $y \in \operatorname{ran}(f_{i_0})$ tal que:

$$y = f_{i_0}(x).$$

Si $(x, y') \in \bigcup F$ se sigue que existe $i \in I$ tal que $y' = f_i(x)$. Como f_i y f_{i_0} son compatibles, se tiene que una está contenida en la otra, en particular, se debe tener que:

$$f_{i_0}(x) = f_i(x),$$

luego, $y = y'$. Se sigue así que $\bigcup F$ es función.

Teorema A.2 (**Teorema de Recursión Transfinita**)
Dada una *función* $\mathbf{G}$, entonces la propiedad $\boldsymbol{P}(x, y)$ definida en (A.2) define una *función* $\mathbf{F}$ tal que:

$$\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F} \restriction \alpha),$$

para todo ordinal α, donde $\mathbf{F} \restriction \alpha$ denota a la reestricción de la *función* al conjunto α.

Demostración:
Haremos la prueba por partes. Llamaremos a t un **cálculo de longitud α basado en $\mathbf{G}$** si t es una función tal que $\operatorname{dom}(t) = S(\alpha)$ y, para todo $\beta \leqslant \alpha$ se tiene que:

$$t(\beta) = \mathbf{G}(t \restriction \beta). \tag{A.1}$$

Sea $\boldsymbol{P}(x, y)$ la propiedad:

$$\left.\begin{array}{r} x \text{ es número ordinal y } y = t(x) \text{ para algún cálculo } t \text{ de longitud } x \text{ basado en } \mathbf{G}, \\ \text{o } x \text{ no es número ordinal y } y = \emptyset. \end{array}\right\} \tag{A.2}$$

(a) Veamos que para todo x existe un único y tal que $\boldsymbol{P}(x, y)$, con lo cual habremos probado que $\boldsymbol{P}$ define una *función* $\mathbf{F}$. Si x no es un número ordinal se tiene por definición de $\boldsymbol{P}$ que existe un único y tal que $\boldsymbol{P}(x, y)$ (en este caso $y = \emptyset$).

Por lo cual basta con probar esto en caso de que x sea un ordinal, para ello procederemos usando el Principio de Inducción Transfinita. Sea α ordinal y supongamos que para todo ordinal $\beta < \alpha$ existe un único cálculo de longitud β basado en $\mathbf{G}$. Debemos probar la existencia de un único cálculo de longitud α basado en $\mathbf{G}$.

- **Existencia**. Consideremos la propiedad $\boldsymbol{P}_1(x, y)$:

$$\left.\begin{array}{r} x \in \alpha \text{ y } y \text{ es un cálculo de longitud } x \text{ basado en } \mathbf{G} \\ \text{o } x \notin \alpha \text{ y } y = \emptyset \end{array}\right\}$$

Esta propiedad por construcción cumple que para todo x existe un único y tal que $\boldsymbol{P}_1(x, y)$. Por el Axioma de Reemplazo se sigue que para el conjunto α existe un conjunto T' tal que:

$$\forall \beta < \alpha \text{ existe } t \in T' \text{ tal que } \boldsymbol{P}_1(\beta, t).$$

Sea $T = \left\{ t \in T' \,\middle|\, \text{existe } \beta < \alpha \text{ tal que } \boldsymbol{P}_1(\beta, t) \right\}$. Definimos de esta manera a T, pues puede que T' contenga más elementos que no necesariamente sean cálculos de alguna longitud. Usando la hipótesis de inducción tenemos que:

$$\forall \beta < \alpha \text{ existe un único } t \in T \text{ tal que } \boldsymbol{P}_1(\beta, t).$$

Afirmamos que T es un sistema compatible de funciones. En efecto, si $t_1, t_2 \in T$ entonces, existen β_1 y β_2 ordinales menores que α tales que t_i es un cálculo de longitud β_i basado en $\mathbf{G}$, para $i = 1, 2$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\beta_1 \leqslant \beta_2$, veamos que t_1

y t_2 son compatibles, para ello, basta con probar de la definición de funciones compatibles que:

$$t_1(\gamma) = t_2(\gamma), \quad \forall \gamma \leqslant \beta_1.$$

Procederemos usando el Principio de Inducción Transfinita. Sea $\gamma \leqslant \beta_1$ y supongamos que para todo $\delta < \gamma$ tenemos que:

$$t_1(\delta) = t_2(\delta).$$

entonces, $t_1 \restriction \gamma = t_2 \restriction \gamma$. Por ser $\mathbf{G}$ *función* se sigue que $\mathbf{G}(t_1 \restriction \gamma) = \mathbf{G}(t_2 \restriction \gamma)$, luego por (A.1) se sigue que:

$$t_1(\gamma) = t_2(\gamma).$$

Por el Teorema (3.25) se sigue que $t_1(\gamma) = t_2(\gamma)$ para todo $\gamma \leqslant \beta_1$, luego t_1 y t_2 son funciones compatibles. Por ser arbitrarias, se sigue que T es un sistema compatible de funciones. Tomemos ahora $\bar{t} = \bigcup T$ y $\tau = \bar{t} \cup \left\{\left(\alpha, \mathbf{G}\left(\bar{t}\right)\right)\right\}$. Afirmamos lo siguiente:

- **Afirmación 1: τ es función con dom** $(\tau) = S(\alpha)$. Como T es un sistema compatible de funciones se sigue por la Observación (A.1) que $\bar{t}$ es función. Tenemos que:

  $$\operatorname{dom}\left(\bar{t}\right) = \bigcup_{t \in T} \operatorname{dom}(t) = \bigcup_{\beta < \alpha} S(\beta) = \alpha.$$

  Por lo cual $\tau = \bar{t} \cup \left\{\left(\alpha, \mathbf{G}\left(\bar{t}\right)\right)\right\}$ es función con dominio:

  $$\operatorname{dom}(\tau) = \operatorname{dom}\left(\bar{t}\right) \cup \{\alpha\} = \alpha \cup \{\alpha\} = S(\alpha).$$

- **Afirmación 2: $\tau(\beta) = \mathbf{G}(\tau \restriction \beta)$ para todo** $\beta \leqslant \alpha$. Sea $\beta \leqslant \alpha$. Si $\beta = \alpha$ se tiene que:

  $$\tau(\alpha) = \mathbf{G}\left(\bar{t}\right) = \mathbf{G}\left(\tau \restriction \alpha\right).$$

  Ahora, si $\beta < \alpha$ como $\operatorname{dom}\left(\bar{t}\right) = \alpha$ existe $t \in T$ tal que $\beta \in \operatorname{dom}(t)$. Se tiene así que:

  $$\tau(\beta) = t(\beta) = \mathbf{G}\left(t \restriction \beta\right) = \mathbf{G}\left(\tau \restriction \beta\right),$$

  ya que t es un cálculo de longitud β basado en $\mathbf{G}$ y como $\bar{t} = \bigcup T$, se sigue que $t \subseteq \tau$, es decir que t y τ son compatibles.

Por las dos afirmaciones anteriores se sigue que τ es un cálculo de longitud α basado en $\mathbf{G}$.

- **Unicidad**. Sea σ otro cálculo de longitud α basado en $\mathbf{G}$. Probaremos que $\tau = \sigma$. Al ser ambos cálculos de longitud α basados en $\mathbf{G}$, se tiene que τ y σ son funciones con dominio $S(\alpha)$. Por tanto, basta con probar que:

  $$\tau(\gamma) = \sigma(\gamma), \quad \forall \gamma \leqslant \alpha.$$

  Para ello procederemos usando el Principio de Inducción Transfinita. Sea $\gamma \leqslant \alpha$ un ordinal y supongamos que:

  $$\tau(\delta) = \sigma(\delta), \quad \forall \delta < \gamma.$$

  Entonces $\tau \restriction \gamma = \sigma \restriction \gamma$, luego al ser $\mathbf{G}$ *función* se sigue que:

  $$\mathbf{G}\left(\tau \restriction \gamma\right) = \mathbf{G}\left(\sigma \restriction \gamma\right),$$

  con lo que, al ser τ y σ cálculos de longitud α basados en $\mathbf{G}$, se sigue que $\tau(\gamma) = \sigma(\gamma)$. Del Teorema (3.25) se sigue que $\tau(\gamma) = \sigma(\gamma)$ para todo $\gamma \leqslant \alpha$, es decir que $\tau = \sigma$.

Por el Teorema (3.25) se sigue que para todo ordinal α existe un único cálculo de longitud α, con lo cual $\boldsymbol{P}$ define una *función* $\mathbf{F}$.

(b) Por el inciso *(a)* se tiene que $\boldsymbol{P}$ define una *función* $\mathbf{F}$. Probaremos que:

$$\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}\left(\mathbf{F} \upharpoonright \alpha\right),$$

para todo ordinal α. Para ello, notemos que si t es un cálculo de alguna longitud basado en $\mathbf{G}$, entonces $\mathbf{F} \upharpoonright \operatorname{dom}(t) = t$. Esto se debe a que si $\beta \in \operatorname{dom}(t)$, entonces la función $t_\beta = t \upharpoonright S(\beta)$ es un cálculo de longitud β, luego de la definición de $\mathbf{F}$ se sigue:

$$t(\beta) = t_\beta(\beta) = \mathbf{F}(\beta),$$

al ser $\beta \in \operatorname{dom}(t)$ arbitrario se sigue que $\mathbf{F} \upharpoonright \operatorname{dom}(t) = t$.

Ahora, sea α ordinal, tomemos a t el único cálculo de longitud α basado en $\mathbf{G}$, por lo anterior se sigue por (A.1) y (A.2) que:

$$\mathbf{F}(\alpha) = t(\alpha) = \mathbf{G}\left(t \upharpoonright \alpha\right) = \mathbf{G}\left(\mathbf{F} \upharpoonright \alpha\right).$$

Por los incisos *(a)* y *(b)* se sigue el resultado. ■

Observación A.3
En el teorema anterior, la palabra *función* no hace referencia a una función en el sentido usual, ya que formalmente no son conjuntos, pero se comportan como si fuesen funciones, porque la asignación de cada x es para un único y. Esta notación se seguirá usando a lo largo de este anexo.

Para poder hacer definición de operaciones sobre ordinales, necesitamos una versión paramétrica de este teorema.

Si $\mathbf{F}$ es una *función* de dos variables, es decir que toma como entrada una tupla (z, x) (esta tupla se codifica como $(z, x) = \{\{z\}, \{z, x\}\}$), escribiremos $\mathbf{F}_z(x)$ en lugar de $\mathbf{F}(z, x)$.

Si fijamos z, entonces $\mathbf{F}_z$ es una *función* pero ahora de una variable. Si $\mathbf{F}$ está definida por una propiedad $\boldsymbol{H}(z, x, y)$, entonces, para z, fijo las notaciones $\mathbf{F}_z[A]$ y $\mathbf{F}_z \upharpoonright A$ definen los siguientes:

$$\mathbf{F}_z[A] = \left\{ y \middle| \boldsymbol{H}(z, x, y) \text{ para algún } x \in A \right\} \text{ y}$$
$$\mathbf{F}_z \upharpoonright A = \left\{ (x, y) \middle| \boldsymbol{H}(z, x, y) \text{ para algún } x \in A \right\},$$

siendo A un conjunto. Una aplicación del Axioma de Reemplazo muestra que los anteriores son conjuntos y están bien definidos.

Teorema A.4 (Recursión Transfinita Paramétrica)
Sea $\mathbf{G}$ una *función* de dos variables. Entonces, la propiedad formulada en (A.4) define una *función* $\mathbf{F}$ tal que:

$$\mathbf{F}(z, \alpha) = \mathbf{G}(z, \mathbf{F}_z \upharpoonright \alpha),$$

para todo ordinal α y para cualquier conjunto z.

Demostración:
Llamaremos a t por **cálculo de longitud** α **basado en G y** z si t es una función tal que dom $(t) = S(\alpha)$ y para todo $\beta \leqslant \alpha$ se tiene que:

$$t(\beta) = \mathbf{G}(z, t \restriction \beta). \tag{A.3}$$

Sea $\boldsymbol{H}(z, x, y)$ la propiedad:

$$\left.\begin{array}{r} x \text{ es un número ordinal y } y = t(x) \text{ para algún cálculo de longitud } x \text{ basado en } \mathbf{G} \text{ y } z \\ \text{o } x \text{ no es número ordinal y } y = \emptyset \end{array}\right\} \tag{A.4}$$

El resto de la demostación es como en la prueba del Teorema (A.2). La única diferencia es que aquí se considera a z. ■

Debido a las diferencias que existen entre ordinales sucesor y límite, debemos reformular el teorema anterior teniendo en cuenta esta consideración para definir adecuadamente operaciones con ordinales.

Teorema A.5
Sean $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ y $\mathbf{G}_3$ *funciones* de dos variables, y sea $\mathbf{G}$ la *función* de dos variables que define la propiedad definida en (A.5). Entonces, la propiedad $\boldsymbol{H}$ formulada en (A.4) define una *función* $\mathbf{F}$ tal que:

(a) $\mathbf{F}_z(0) = \mathbf{G}_1(z, \emptyset)$.

(b) $\mathbf{F}_z(S(\alpha)) = \mathbf{G}_2(z, \mathbf{F}_z(\alpha))$ para todo ordinal α.

(c) $\mathbf{F}_z(\alpha) = \mathbf{G}_3(z, \mathbf{F}_z \restriction \alpha)$ para todo ordinal límite $\alpha \neq 0$.

Para todo ordinal α y para cualquier conjunto z.

Demostración:
Definimos la propiedad $\boldsymbol{Q}(z, x, y)$ como sigue:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{o bien} & (i) & x = \emptyset \text{ y } y = \mathbf{G}_1(z, \emptyset) \\ \text{o} & (ii) & \left\{\begin{array}{r} x \text{ es una función tal que dom}(x) = S(\alpha) \\ \text{para algún ordinal } \alpha \neq 0, \\ y = \mathbf{G}_2(z, x(\alpha)) \end{array}\right. \\ \text{o} & (iii) & \left\{\begin{array}{r} x \text{ es una función tal que dom}(x) = \alpha \\ \text{para algún ordinal límite } \alpha \neq 0, \\ y = \mathbf{G}_3(z, x) \end{array}\right. \\ \text{o} & (iv) & x \text{ no es nada de lo anterior y } y = \emptyset \end{array}\right\} \tag{A.5}$$

Se verifica rápidamente que la propiedad $\boldsymbol{Q}(z, x, y)$ define una *función* $\mathbf{G}$ de dos variables, pues para cada caso se tiene que para todo x y para cualquier conjunto z existe un único y tal que $\boldsymbol{Q}(z, x, y)$.

Consideremos $\boldsymbol{P}$ la propiedad $\boldsymbol{H}$ definida en (A.4) tomando a la *función* $\mathbf{G}$. Entonces, por el Teorema (A.4) se sigue $\boldsymbol{H}$ define una *función* $\mathbf{F}$ tal que:

$$\mathbf{F}(z, \alpha) = \mathbf{G}(z, \mathbf{F}_z \restriction \alpha), \tag{A.6}$$

para todo ordinal α y para cualquier conjunto z. Analicemos los tres posibles casos para α. Sea z un conjunto:

(a) Si $\alpha = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_z(0) &= \mathbf{F}(z, 0) \\ &= \mathbf{G}(z, \mathbf{F}_z \upharpoonright 0) \\ &= \mathbf{G}(z, \mathbf{F}_z \upharpoonright \emptyset) \\ &= \mathbf{G}\left(z, \emptyset\right) \\ &= \mathbf{G}_1(z, \emptyset). \end{aligned} \tag{A.7}$$

(b) Si α es ordinal, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_z\left(S(\alpha)\right) &= \mathbf{F}\left(z, S(\alpha)\right) \\ &= \mathbf{G}\left(z, \mathbf{F}_z \upharpoonright S(\alpha)\right) \\ &= \mathbf{G}_2\left(z, \mathbf{F}_z \upharpoonright S(\alpha)(\alpha)\right) \\ &= \mathbf{G}_2\left(z, \mathbf{F}_z(\alpha)\right). \end{aligned} \tag{A.8}$$

(c) Si α es ordinal límite no cero, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_z(\alpha) &= \mathbf{F}(z, \alpha) \\ &= \mathbf{G}\left(z, \mathbf{F}_z \upharpoonright \alpha\right) \\ &= \mathbf{G}_3\left(z, \mathbf{F}_z \upharpoonright \alpha\right). \end{aligned} \tag{A.9}$$

Todos los incisos se cumplen de la definición de $\mathbf{G}$, es decir por (A.5), por lo cual la *función* $\mathbf{F}$ cumple los incisos *(a)* a *(c)*. ■

Anexo B

Conjuntos Bien Ordenados y Axioma de Elección

En este anexo hablaremos sobre los conjuntos bien ordenados y su relación con los ordinales. Finalmente, mostraremos una implicación del Axioma de Elección, la cual nos permitirá mostrar que todo conjunto puede ser bien ordenado.

§B.1 Clasificación de los Conjuntos Bien Ordenados

Los ordinales resultan relevantes, ya que nos permiten clasificar a todos los conjuntos bien ordenados.

Definición B.1 (Isomorfismo de Conjuntos Bien Ordenados)
Sean $(X, \preceq)$ y $(Y, \leqslant)$ conjuntos bien ordenados. Decimos que ambos conjuntos son **isomorfos** si existe una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que:

$$x \preceq x' \Rightarrow f(x) \leqslant f(x'),$$

para todo $x, x' \in X$. Tal isomorfismo lo denotamos por $(X, \preceq) \cong (Y, \leqslant)$.

No es difícil demostrar que la relación de ser isomorfos como conjuntos bien ordenados es una relación de equivalencia.

Observación B.1
Sea $(X, \preceq)$ un conjunto bien ordenado. Denotamos por $x \prec y$ si $x \preceq y$ y $x \neq y$.

Lema B.2
Sea $(X, \preceq)$ un conjunto bien ordenado. Entonces no existe un isomorfismo de $(X, \preceq)$ al subconjunto bien ordenado de X:

$$A_x = \left\{ y \in X \middle| y \prec x \right\},$$

para todo $x \in X$.

Demostración:
Sea $x \in X$. Supongamos que existe un isomorfismo $f : X \to A_x$ entre $(X, \preceq)$ y $(A_x, \preceq)$. Afirmamos que:

$$y \preceq f(y), \quad \forall y \in X.$$

En efecto, supongamos que existe $z_0 \in X$ tal que $z_0 \npreceq f(z_0)$, es decir que $f(z_0) \preceq z_0$ y $f(z_0) \neq z_0$, es decir que $f(z_0) \prec z_0$. Sea:

$$Z = \left\{ z \in X \middle| f(z) \prec z \right\},$$

este conjunto es no vacío, pues $z_0 \in Z$. Afirmamos que no tiene elemento mínimo. En efecto, si tuviera mínimo, digamos $w \in Z$, se tendría que:

$$f(w) \prec w,$$

es decir que $f(w) \preceq w$ y $f(w) \neq w$, luego como f es isomorfismo se seguiría que $f(f(w)) \preceq f(w)$ siendo $f(f(w)) \neq f(w)$, ya que en caso contrario se seguiría al ser f biyección $f(w) = w$, cosa que no puede suceder. Así que $f(w) \in Z$, lo cual no tampoco puede suceder, puesto que elegimos a w como el mínimo de Z.

Pero $(X, \preceq)$ es bien ordenado y $Z \subseteq X$ no tiene elemento mínimo$\#_c$. Por tanto, debe suceder que:

$$y \preceq f(y), \quad \forall y \in X.$$

En particular $x \preceq f(x)$, así que $f(x) \notin A_x$, esto es que $f[X] \nsubseteq A_x$, con lo cual f no puede ser biyección$\#_c$. Por tanto, no existe tal isomorfismo f. ■

Definición B.2 (Segmento Inicial)
Sea $(X, \preceq)$ un conjunto bien ordenado. Para cada $x \in X$ se define el **segmento inicial de** $(X, \preceq)$ **determinado por** x como el conjunto:

$$\left\{ y \in X \middle| y \prec x \right\}.$$

Teorema B.3
Sean $(X_1, \preceq_1)$ y $(X_2, \preceq_2)$ conjuntos bien ordenados. Entonces se cumple uno y solo de los siguientes:

(a) $(X_1, \preceq_1)$ es isomorfo a $(X_2, \preceq_2)$.

(b) $(X_1, \preceq_1)$ es isomorfo a algún segmento inicial de $(X_2, \preceq_2)$.

(c) $(X_2, \preceq_2)$ es isomorfo a algún segmento inicial de $(X_1, \preceq_1)$.

Demostración:
Si alguno de los dos conjuntos consta solamente de un elemento, el resultado se tiene de forma inmediata. Por ende, supondremos que tienen al menos dos elementos.

Para todo $u_i \in X_i$ tomemos $X_i(u_i) = \left\{ x \in X_i \middle| x \prec_i u_i \right\}$ el segmento inicial determinado por u_i, para todo $i = 1, 2$. Sea:

$$f = \left\{ (x, y) \in X_1 \times X_2 \middle| X_1(x) \text{ es isomorfo a } X_2(y) \right\}.$$

Veamos que $f \neq \emptyset$ es función inyectiva. En efecto:

- $f \neq \emptyset$. Como $(X_1, \preceq_1)$ y $(X_2, \preceq_2)$ son conjuntos bien ordenados, entonces tienen elemento mínimo, digamos $m_1 \in X_1$ y $m_2 \in X_2$, respectivamente. Nuevamente, por ser ambos conjuntos bien ordenados y al tener dos elementos entonces los conjuntos no vacíos:

$$X_i \setminus \{m_i\}, \quad i = 1, 2.$$

  tienen mínimo, digamos que el mínimo es $n_i \in X_i$, respectivamente, con $i = 1, 2$. Entonces los segmentos:

$$X_1(n_1) = \{m_1\} \quad \text{y} \quad X_2(n_2) = \{m_2\},$$

  son isomorfos, así que $(m_1, m_2) \in f$.

- **Está bien definida**. Sea $x \in \operatorname{dom}(f)$. Si $(x, y_1), (x, y_2) \in f$ se tiene que $X_1(x)$ es isomorfo a $X_2(y_1)$ y a $X_2(y_2)$, luego ambos son isomorfos. Por ser ambos segmentos iniciales no puede suceder que $y_1 \prec_2 y_2$ ni que $y_2 \prec_2 y_1$, pues contradiría el Lema (B.2). Así que $y_1 = y_2$.

- **Es inyectiva**. Sean $x, x' \in \operatorname{dom}(f)$ tales que $f(x) = f(x')$, entonces $X_2(f(x)) = X_2(f(x'))$. Como $X_1(x)$ es isomorfo a $X_2(f(x))$ y lo mismo con $X_1(x')$ y $X_2(f(x'))$, se sigue que $X_1(x)$ es isomorfo a $X_1(x')$, luego por el Lema (B.2) debe tenerse que $x = x'$.

Veamos ahora que f es creciente. En efecto, sean $x, x' \in \operatorname{dom}(f)$ son tales que $x \prec_1 x'$. Tomemos h isomorfismo entre $X_1(x')$ y $X_2(f(x'))$ luego, los conjuntos $X_1(x)$ y:

$$X_2(h(x)) = \left\{ y \in X_2(f(x')) \middle| y \prec_2 h(x) \right\},$$

son isomorfos, por definición de f tenemos que $f(x) = h(x)$. Además, $h(x)$ es tal que $h(x) \prec_2 f(x')$ por construcción, con lo cual $f(x) \prec_2 f(x')$.

Ahora, analicemos por casos:

- Si $\operatorname{dom}(f) = X_1$ y $\operatorname{ran}(f) = X_2$, entonces ocurre el caso *(a)*.

- Si $\operatorname{dom}(f) \neq X_1$, tomemos $x' \in \operatorname{dom}(f)$ y $x \in X_1$ tal que $x \prec_1 x'$, entonces $x \in \operatorname{dom}(f)$, ya que como $x' \in \operatorname{dom}(f)$ se tiene que $X_1(x')$ y $X_2(f(x'))$ son isomorfos, sea h el isomorfismo entre ambos, se sigue que los conjuntos $X_2(x)$ y:

$$X_2(h(x)) = \left\{ y \in X_2(f(x')) \middle| y \prec_2 h(x) \right\},$$

  son isomorfos, luego $f(x) = h(x)$. Así que $x \in \operatorname{dom}(f)$. Tomemos $x_0 = \min(X_1 \setminus \operatorname{dom}(f))$, este mínimo existe, pues $(X_1, \preceq_1)$ es bien ordenado y $X_1 \setminus \operatorname{dom}(f) \neq \emptyset$. Se tiene que $\operatorname{dom}(f) = X_1(x_0)$, forzosamente debe suceder que $\operatorname{ran}(f) = X_2$, pues en caso contrario se tendría que existe el mínimo de $X_2 \setminus \operatorname{ran}(f)$, digamos y_0, así que $(x_0, y_0) \in f\#_c$. Por tanto, $\operatorname{dom}(f) = X_1(x_0)$, con lo que sucede el caso *(c)*.

- Si $\operatorname{ran}(f) \neq X_2$ se procede de forma análoga al inciso anterior y se concluye que ocurre *(b)*.

Por el Lema (B.2) solo puede suceder uno de los casos a la vez, lo cual junto con los incisos anteriores prueba el resultado. ■

Lema B.4
Dos ordinales α y β no vacíos son isomorfos (como conjuntos bien ordenados) si y solo si $\alpha = \beta$.

Demostración:
$\Rightarrow$): Probaremos la contrapositiva. Supongamos que α y β son tales que $\alpha \neq \beta$, entonces $\alpha < \beta$ o $\beta < \alpha$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\alpha < \beta$, entonces $(\alpha, \leqslant)$ es un subconjunto bien ordenado de $(\beta, \leqslant)$, en particular:

$$\alpha = \left\{\gamma \in \beta \middle| \gamma < \alpha\right\} \subsetneq \beta,$$

del Lema (B.2) se sigue que α y β no son isomorfos.

$\Leftarrow$): Es inmediata tomando como isomorfismo a la identidad. ■

Teorema B.5
Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único número ordinal.

Demostración:
Sea $(X, \preceq)$ un conjunto bien ordenado. La unicidad se sigue del Lema (B.4), pues si $(X, \preceq)$ es isomorfo a dos ordinales α y β, se sigue que ambos son isomorfos, luego son iguales por este lema. Para cada $x \in X$ sea $X(x)$ el segmento inicial de X determinado por x, esto es:

$$X(x) = \left\{y \in X \middle| y \prec x\right\}.$$

Sea:

$$A = \left\{x \in X \middle| (X(x), \preceq) \text{ es isomorfo a algún ordinal}\right\},$$

por el Lema (B.4) si $x \in A$, entonces el ordinal al que es isomorfo $(X(x), \preceq)$ es único (por lo dicho al inicio). Denotemos así por α_x al ordinal isomorfo a $(X(x), \preceq)$.

Sea $\boldsymbol{P}(x, y)$ la propiedad:

$$\text{O bien } x \in X \text{ y } y \text{ es el único ordinal isomorfo a } (X(x), \preceq), \text{ o } x \notin X \text{ y } y = \emptyset.$$

Esta propiedad cumple que para todo x existe un único y tal que $\boldsymbol{P}(x, y)$. Por el Axioma de Reemplazo para el conjunto A existe un conjunto B tal que:

$$\text{Para todo } a \in A \text{ existe un único } b \in B \text{ tal que } \boldsymbol{P}(a, b).$$

Denotemos por f a la función dada por:

$$f = \left\{(x, \alpha_x) \in A \times B \middle| \alpha_x \text{ es isomorfo a } (X(x), \preceq)\right\}.$$

Sea α un ordinal tal que $\alpha \notin f[A]$, tal ordinal existe, pues $f[A]$ es conjunto (por ser subconjunto de B) y por el Corolario (3.17) no existe el conjunto de todos los ordinales. Como el conjunto $(\alpha, \leqslant)$ es bien ordenado, del Teorema (B.3) debe suceder una y solo una de las siguientes:

- $(\alpha, \leqslant)$ es isomorfo a $(X, \preceq)$.

- $(\alpha, \leqslant)$ es isomorfo a algún segmento inicial de X, se seguiría que $\alpha \in f[A]$, lo cual contradice la elección de $\alpha\#_c$. Por lo cual esto no puede suceder.
- $(X, \preceq)$ es isomorfo a algún segmento inicial de $(\alpha, \leqslant)$, tal segmento inicial es un número ordinal, es decir que $(X, \preceq)$ es isomorfo a un número ordinal $\beta < \alpha$.

En cualquier caso, $(X, \preceq)$ es isomorfo a un número ordinal. ■

El teorema anterior nos permite hacer la siguiente definición sobre conjuntos bien ordenados.

Definición B.3 (Tipo de Orden)
Sea $(X, \preceq)$ un conjunto bien ordenado. El **tipo de orden de** $(X, \preceq)$ es el único ordinal isomorfo a X. Este ordinal se denotará por $\|(X, \preceq)\|$.

Como corolario del teorema anterior se tiene el siguiente resultado

Corolario B.6
Sean $(X_1, \preceq_1)$ y $(X_2, \preceq_2)$ conjuntos bien ordenados. Entonces $(X_1, \preceq_1)$ es isomorfo a $(X_2, \preceq_2)$ si y solo si:

$$\|(X_1, \preceq_1)\| = \|(X_2, \preceq_2)\|.$$

Demostración:
$\Rightarrow$): Si $(X_1, \preceq_1)$ es isomorfo a $(X_2, \preceq_2)$ entonces como $(X_1, \preceq_1)$ es isomorfo a $\|(X_1, \preceq_1)\|$ y $(X_2, \preceq_2)$ es isomorfo a $\|(X_2, \preceq_2)\|$, se sigue que $\|(X_1, \preceq_1)\|$ y $\|(X_2, \preceq_2)\|$ son isomorfos, luego del Lema (B.4) se tiene la igualdad.

$\Leftarrow$): Es inmediata. ■

Teorema B.7
Un conjunto X puede ser bien ordenado si y solo si es biyectivo a algún número ordinal.

Demostración:
$\Rightarrow$): Sea $\preceq$ un buen orden para X. El isomorfismo entre $(X, \preceq)$ y $\|(X, \preceq)\|$ es una biyección siendo $\|(X, \preceq)\|$ número ordinal.

$\Leftarrow$): Si $f : X \to \alpha$ es una biyección para α ordinal, entonces la relación:

$$x \preceq y \text{ si y solo si } f(x) \leqslant f(y),$$

para todo $x, y \in X$, es un buen orden para X. ■

Lema B.8
Sea α ordinal, entonces para todo $X \subseteq \alpha$ se tiene $\|(X, \leqslant)\| \leqslant \alpha$.

Demostración:
Procederemos por inducción transfinita sobre α.

- Para $\alpha = 0$ el resultado es inmediato, pues si $X \subseteq \alpha = 0 = \emptyset$ entonces $X = \emptyset$, luego $X = \alpha$.
- Supongamos que existe un ordinal α tal que para todo $X \subseteq \alpha$ se tiene que $\|(X, \leqslant)\| \leqslant \alpha$. Sea $X \subseteq S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$, se tienen dos casos:

- $\alpha \notin X$, en cuyo caso se tiene que $X \subseteq \alpha$, luego $\|(X, \leqslant)\| \leqslant \alpha < S(\alpha)$.
- $\alpha \in X$, en cuyo caso se sigue que $X \setminus \{\alpha\} \subseteq \alpha$, luego, por hipótesis de inducción $\|(X \setminus \{\alpha\}, \leqslant)\| \leqslant \alpha$. Sea $\beta = \|(X \setminus \{\alpha\}, \leqslant)\| \leqslant \alpha$, es decir que β es el tipo de orden de $(X \setminus \{\alpha\}, \leqslant)$, con lo cual existe una función biyectiva $f : X \setminus \{\alpha\} \to \beta$ tal que:

$$x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y), \tag{B.1}$$

para todo $x, y \in X \setminus \{\alpha\}$. Extendemos f a todo X tomando:

$$f(\alpha) = \beta.$$

Entonces, f es una biyección entre X y $S(\beta)$ y por (B.1) y dado que $f(x) < \beta$ para todo $x \in X \setminus \{\alpha\}$, se sigue que:

$$x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y),$$

para todo $x, y \in X$. Por definición de tipo de orden se sigue que $\|(X, \leqslant)\| = S(\beta)$, donde $S(\beta) \leqslant S(\alpha)$ por el Lema (3.40), luego $\|(X, \leqslant)\| \leqslant S(\alpha)$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que $\|(X, \leqslant)\| \leqslant S(\alpha)$.

- Supongamos que α es un ordinal límite no cero tal que para todo ordinal $\beta < \alpha$ se cumple que si $X \subseteq \beta$ entonces $\|(X, \leqslant)\| \leqslant \beta$. Sea $X \subseteq \alpha$, para cada $\beta < \alpha$ definimos:

$$X_\beta = X \cap \beta.$$

Entonces, para todo $\beta < \alpha$ se tiene que $X_\beta \subseteq \beta$, luego por hipótesis de inducción se sigue que $\|(X_\beta, \leqslant)\| \leqslant \beta$. Sea $\gamma_\beta = \|(X_\beta, \leqslant)\|$, para todo $\beta < \alpha$, se cumple así que:

$$\gamma_\beta \leqslant \beta, \quad \forall \beta < \alpha,$$

y tomemos $\gamma = \sup_{\beta<\alpha} \gamma_\beta$. Afirmamos que $\|(X, \leqslant)\| = \gamma$. En efecto, tomemos $\epsilon = \|(X, \leqslant)\|$ (es decir ϵ es el tipo de orden de $(X, \leqslant)$), probaremos dos cosas:

(1) **Para todo $\beta < \alpha$ se tiene que** $\|(X_\beta, \leqslant)\| \leqslant \epsilon$. Sea $\beta < \alpha$, como ϵ es el tipo de orden de $(X, \leqslant)$, entonces existe una biyección $f : X \to \epsilon$ tal que:

$$x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y) \tag{B.2}$$

para todo $x, y \in X$. Consideremos $f_\beta = f \restriction X_\beta$, esta función es una biyección entre X_β y $f[X_\beta]$ tal que:

$$x \leqslant y \Rightarrow f_\beta(x) \leqslant f_\beta(y),$$

para todo $x, y \in X_\beta$, luego:

$$\|(X_\beta, \leqslant)\| = \|(f_\beta[X_\beta], \leqslant)\|. \tag{B.3}$$

Afirmamos ahora que:

$$f_\beta[X_\beta] = \left\{\delta \leqslant \epsilon \middle| \delta < \xi\right\},$$

para algún $\xi \leqslant \epsilon$. En efecto, esto se tiene ya que X_β es un segmento inicial de X, luego, al ser f_β biyección y preservar orden se tiene que $f_\beta[X_\beta]$ debe ser un segmento inicial de ϵ, esto es que $f_\beta[X_\beta] = \xi$ para algún $\xi \leqslant \epsilon$. En particular, se tiene que ξ es el tipo de orden de $(f_\beta[X_\beta], \leqslant)$.

Ahora, como ξ es el tipo de orden de $(f_\beta[X_\beta], \leqslant)$, se sigue por (B.3) que $\|(X_\beta, \leqslant)\| = \xi$, por tanto $\|(X_\beta, \leqslant)\| \leqslant \epsilon$.

(2) **Para todo $\delta < \epsilon$ existe $\beta < \alpha$ tal que** $\delta < \|(X_\beta, \leqslant)\|$. Sea $\delta < \epsilon$. Tomemos nuevamente la f del inciso *(1)*. Como $\delta < \epsilon$ entonces, existe $\zeta \in X$ tal que:

$$f(\zeta) = \delta,$$

pues f es biyección. Dado que $X \subseteq \alpha$ se sigue que $\zeta < \alpha$, al ser α ordinal límite, se sigue por la Proposición (3.27) que $S(\zeta) < \alpha$. Tomemos $\beta = S(\zeta) < \alpha$, se cumple por(B.3) que la función $f_\beta = f \restriction X_\beta$ es tal que:

$$x \leqslant y \Rightarrow f_\beta(x) \leqslant f_\beta(y),$$

para todo $x, y \in X_\beta$, además $f : X_\beta \to S(\delta)$, con lo cual el tipo de orden de $(X_\beta, \leqslant)$ debe ser $S(\delta)$, así que:

$$\delta < S(\delta) = \|(X_\beta, \leqslant)\|.$$

Por *(1)* se tiene que:

$$\gamma = \sup_{\beta<\alpha} \gamma_\beta = \sup_{\beta<\alpha} \|(X_\beta, \leqslant)\| \leqslant \epsilon, \tag{B.4}$$

y por *(2)*:

$$\epsilon \leqslant \sup_{\beta<\alpha} \|(X_\beta, \leqslant)\| = \sup_{\beta<\alpha} \gamma_\beta = \gamma. \tag{B.5}$$

Por ende, de ambas desigualdades se sigue que $\epsilon = \gamma$.

Por los tres incisos anteriores y usando el Teorema (3.29) se sigue que para todo ordinal α y para todo $X \subseteq \alpha$ se tiene que $\|(X, \leqslant)\| \leqslant \alpha$. ■

§B.2 Axioma de Elección y Buen Orden

El objetivo ahora será probar que todo conjunto puede ser bien ordenado, usando el Axioma de Elección.

Definición B.4 (**Continuación de un Conjunto Bien Ordenado**)
Sea X un conjunto y $\mathcal{B}$ la familia de todos los pares (B, G) siendo B un subconjunto de X y G un buen orden para B. Para todo $(B, G), (B', G') \in \mathcal{B}$ definimos la relación:

$$(B, G) \preceq (B', G') \text{ si y solo si } B \subseteq B', G \subseteq G' \text{ y } x \in B, y \in B' \setminus B \Rightarrow (x, y) \in G'.$$

En tal caso, (B', G') es llamada una **continuación de** (B, G).

Lema B.9
Sean X conjunto y $\mathcal{B}$ la familia de todos los pares como en la definición anterior. Entonces $\preceq$ es un orden parcial para $\mathcal{B}$.

Demostración:
Veamos que $\mathcal{B}$ es parcialmente ordenado bajo la relación $\preceq$. En efecto:

- **Reflexividad**. Sea $(B, G) \in \mathcal{B}$, entonces es inmediato que $(B, G) \preceq (B, G)$.
- **Antisimetría**. Sean $(B, G), (B', G') \in \mathcal{B}$ tales que $(B, G) \preceq (B', G')$ y $(B', G') \preceq (B, G)$, entonces $B = B'$ y $G = G'$, luego $(B, G) = (B', G')$.
- **Transitividad**. Sean $(B, G), (B', G'), (B'', G'') \in \mathcal{B}$ tales que $(B, G) \preceq (B', G')$ y $(B', G') \preceq (B'', G'')$. De forma inmediata se tiene que $B \subseteq B''$ y $G \subseteq G''$. Ahora, si $x \in B$ y $y \in B'' \setminus B$, se tienen dos casos:
  - $y \in (B'' \setminus B) \setminus B' = B'' \setminus B'$, pues $B \subseteq B'$, además por la misma razón $x \in B'$ así que $(x, y) \in G''$.
  - $y \in (B'' \setminus B) \cap B'$, luego $y \in B' \setminus B$ y como $x \in B$ se sigue que $(x, y) \in G' \subseteq G''$.

  En cualquier caso se sigue que $(x, y) \in G''$. Por tanto, $(B, G) \preceq (B'', G'')$.

Por los tres incisos anteriores se sigue que $(\mathcal{B}, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. ■

Lema B.10
Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ la familia de todos los pares como en la definición anterior. Tomemos $\mathcal{C} = \{(B_\alpha, G_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una cadena en $\mathcal{B}$ y:

$$B = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \quad \text{y} \quad G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha.$$

Entonces $(B, G) \in \mathcal{B}$ y (B, G) es cota superior de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{B}$.

Demostración:
Se tiene que $B \subseteq X$ es no vacío por ser unión de conjuntos no vacíos. Para ver que $(B, G) \in \mathcal{B}$ basta con ver que G es un buen orden para B:

- **Reflexividad**. Si $x \in B$, entonces existe $\alpha \in I$ tal que $x \in B_\alpha$, luego $(x, x) \in G_\alpha$ por ser G_α un buen orden, así que $(x, x) \in G$.
- **Antisimetría**. Si $(x, y), (y, x) \in G$, entonces existen α, β tales que $(x, y) \in G_\alpha$ y $(y, x) \in G_\beta$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena, entonces uno de los dos G_α y G_β está contenido dentro del otro, sin pérdida de generalidad supongamos que $G_\alpha \subseteq G_\beta$, luego $(x, y), (y, x) \in G_\beta$, así que como G_β es un buen orden se sigue que $x = y$.
- **Transitividad**. Si $(x, y), (y, z) \in G$ entonces existen $\alpha, \beta \in I$ tales que $(x, y) \in G_\alpha$ y $(y, z) \in G_\beta$. Nuevamente, como $\mathcal{C}$ es una cadena entonces uno de los dos G_α y G_β está contenido dentro del otro, sin pérdida de generalidad supongamos que $G_\alpha \subseteq G_\beta$, luego $(x, y), (y, z) \in G_\beta$. Por ser G_β un buen orden se sigue que $(x, z) \in G_\beta$, luego $(x, z) \in G$.
- Si $x, y \in B$, entonces existen $\alpha, \beta \in I$ tales que $x \in B_\alpha$ y $y \in B_\beta$, luego como $\mathcal{C}$ es una cadena se tiene que uno de los dos B_α y B_β está contenido dentro del otro, sin pérdida de generalidad supongamos que $B_\alpha \subseteq B_\beta$, luego $x, y \in B_\beta$, así que como B_β está bien ordenado se sigue que $(x, y) \in G_\alpha$ o $(y, x) \in G_\alpha$, es decir que $(x, y) \in G$ o $(y, x) \in G$.

Con lo que G es un orden total sobre B. Sea ahora $D \subseteq B$ no vacío. Veamos que D tiene elemento mínimo. Como es no vacío, entonces existe $\alpha_0 \in I$ tal que $D \cap B_{\alpha_0} \neq \emptyset$. Así que:

$$D \cap B_{\alpha_0} \subseteq B_{\alpha_0},$$

por lo que $D \cap B_{\alpha_0}$ tiene primero elemento en el orden G_{α_0}, digamos b, esto es:

$$\forall y \in D \cap B_{\alpha_0} \Rightarrow (b, y) \in G_{\alpha_0}.$$

Afirmamos que b es el primer elemento de D. Si $x \in D$ se tienen dos casos:

- $x \in B_{\alpha_0}$, luego $x \in D \cap B_{\alpha_0}$ así que por lo anterior $(b, x) \in G_{\alpha_0} \subseteq G$.
- $x \notin B_{\alpha_0}$, luego como $x \in D \subseteq B$ debe existir β tal que $x \in B_\beta$. Se tiene que $B_\beta \nsubseteq B_{\alpha_0}$, luego como $\mathcal{C}$ es una cadena, debe suceder que $B_{\alpha_0} \subseteq B_\beta$, luego $(B_{\alpha_0}, G_{\alpha_0}) \preceq (B_\beta, G_\beta)$. Se tiene por definición de $\preceq$:
$$u \in B_{\alpha_0} \text{ y } v \in B_\beta \setminus B_{\alpha_0} \Rightarrow (u, v) \in G_\beta,$$
en particular, $b \in B_{\alpha_0}$ y $x \in B_\beta \setminus B_{\alpha_0}$, por lo cual $(b, x) \in G_\beta \subseteq G$.

Por los dos incisos se sigue que $(b, x) \in G$, es decir que b es el primer elemento de D. Se sigue así que G es un buen orden para B y por ende, $(B, G) \in \mathcal{B}$.

Para terminar, veamos que (B, G) es cota superior de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{B}$. Sea $\alpha \in I$, luego $(B_\alpha, G_\alpha) \in \mathcal{C}$. De la definición de B y G se tiene que:

$$B_\alpha \subseteq B \quad \text{y} \quad G_\alpha \subseteq G.$$

Ahora, si $x \in B_\alpha$ y $y \in B \setminus B_\alpha$, entonces existe $\beta \in I$ tal que $y \in B_\beta$, luego $y \in B_\beta \setminus B_\alpha$. Debe suceder que $(B_\alpha, G_\alpha) \preceq (B_\beta, G_\beta)$, con lo cual de la definición de $\preceq$ se tiene que $(x, y) \in G_\beta \subseteq G$. Por tanto:

$$(B_\alpha, G_\beta) \preceq (B, G).$$

Con lo cual (B, G) es cota superior de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{B}$. ■

Teorema B.11 (Teorema del Buen Orden)
Todo conjunto puede ser bien ordenado.

Demostración:
Sea X un conjunto. Por el Lema (B.9) se tiene que $(\mathcal{B}, \preceq)$ es parcialmente ordenado, luego por el Lema del Zorn y por el Lema (B.10) se sigue que $(\mathcal{B}, \preceq)$ tiene un elemento maximal, digamos (B, G). Afirmamos que $B = X$.

Si $B \subsetneq X$, entonces existe $x \in X$ tal que $x \notin B$. Consideremos el conjunto $B' = B \cup \{x\}$. Inducimos una relación G' en B' dada por:

$$G' = G \cup \left\{ (a, x) \middle| a \in B' \right\}.$$

Se verifica rápidamente que $(B', G') \in \mathcal{B}$ es un conjunto bien ordenado, el cual cumple que $(B, G) \preceq (B', G')$ y $(B, G) \neq (B', G')$, así que (B, G) no es maximal$\#_c$. Por tanto, $B = X$.

Se sigue así que X puede ser bien ordenado. ■

Bibliografía

[App34] A. Appert, *Propriétés des espaces abstraits les plus généraux*, Ph.D. thesis, Paris, 1934, p. 121. https://www.numdam.org/item/THESE_1934__156__1_0/.

[Ark81] A. V. Arkhangel'skii, *Classes of topological groups*, Russian Mathematical Surveys **36** (1981) 151–174.

[Dug66] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics, Allyn & Bacon, Boston, MA, 1966.

[Fré04] M. Fréchet, *Généralisation d'un théorème de Weierstrass*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **139** (1904) 848–850 (french).

[Fré06] M. Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **22** (1906) 1–74 (french).

[HH03] F. Hernández-Hernández, *Teoría de conjuntos: una introducción*, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2003 (spanish).

[Jec03] T. Jech, *Set Theory*, 3 ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2003.

[JTM07] S. T. J. T. Moore, *The metrization problem for fréchet groups*, pp. 201–206, Elsevier, 2007.

[Kur22] K. Kuratowski, *Sur l'opération $\bar{A}$ de l'analysis situs*, Fundamenta Mathematicae **3** (1922) 182–199 (french).

[MH14] U. A. R.-G. M. Hrušák, *Malykhin's problem*, Advances in Mathematics, vol. 262, 2014, pp. 193–212.

[Moo08] G. H. Moore, *The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology*, Historia Mathematica **35** (2008) 220–241.

[Mun00] J. R. Munkres, *Topology*, 2 ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.

[Nyi81] P. J. Nyikos, *Metrizability and the Fréchet–Urysohn property in topological groups*, Proceedings of the American Mathematical Society **83** (1981) 793–801.

[Pon66] L. S. Pontrjagin, *Topological groups*, Gordon and Breach, New York, 1966.

[RG12] U. A. Ramos-Garcia, *El problema de metrización para grupos de fréchet*, Tesis de doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, Morelia, Michoacán, México, 2012, p. 58. https://hdl.handle.net/20.500.14330/TES01000697012.

[Sch11] E. Schimmerling, *A Course on Set Theory*, 2 ed., Cambridge University Press, 2011.

[Sch19] J. Schilhan, *Generalised pseudointersections*, Mathematical Logic Quarterly **65** (2019) 479–489.

[Sha90] D. B. Shakhmatov, *α_i-Properties in Fréchet-Urysohn topological groups*, Topology Proceedings **15** (1990) 143–183.

[Tka97] M. Tkačenko, *Grupos topológicos*, Universidad Autónoma Metropolitana, México, 1997 (spanish).

[Tka98] M. Tkačenko, *Introduction to topological groups*, Topology and its Applications **86** (1998) 179–231.

[vD84] E. K. van Douwen, *The Integers and Topology*, Handbook of Set-Theoretic Topology, Elsevier, 1984, pp. 111–167.