Una Introducción Amable a la Teoría Infinita de Ramsey

David J. Fernández Bretón
djfernan@umich.edu
http://www-personal.umich.edu/~djfernan

Mathematics Department,
University of Michigan

Jueves 30 de julio de 2015

Teoría de Ramsey: “El caos total es imposible”.

Teoría de Ramsey: “El caos total es imposible”.

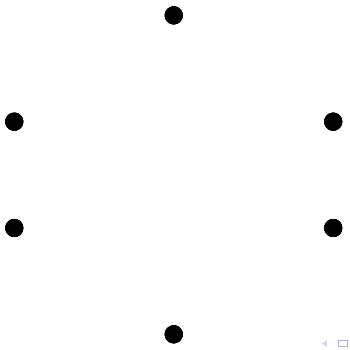
Teorema

En toda fiesta con al menos seis invitados, es posible encontrar tres de ellos de tal suerte que o bien los tres se conocen entre sí, o bien ninguno de los tres se conoce entre sí.

Teoría de Ramsey: “El caos total es imposible”.

Teorema

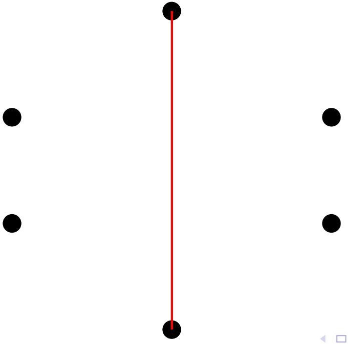
En toda fiesta con al menos seis invitados, es posible encontrar tres de ellos de tal suerte que o bien los tres se conocen entre sí, o bien ninguno de los tres se conoce entre sí.



Teoría de Ramsey: “El caos total es imposible”.

Teorema

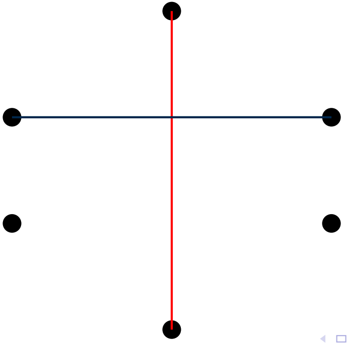
En toda fiesta con al menos seis invitados, es posible encontrar tres de ellos de tal suerte que o bien los tres se conocen entre sí, o bien ninguno de los tres se conoce entre sí.



Teoría de Ramsey: “El caos total es imposible”.

Teorema

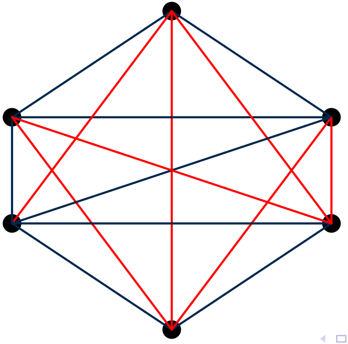
En toda fiesta con al menos seis invitados, es posible encontrar tres de ellos de tal suerte que o bien los tres se conocen entre sí, o bien ninguno de los tres se conoce entre sí.



Teoría de Ramsey: “El caos total es imposible”.

Teorema

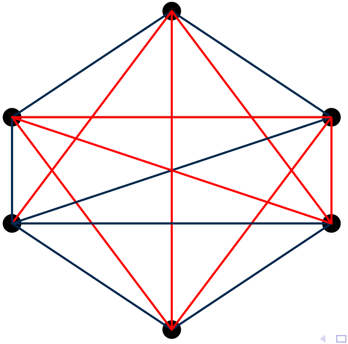
En toda fiesta con al menos seis invitados, es posible encontrar tres de ellos de tal suerte que o bien los tres se conocen entre sí, o bien ninguno de los tres se conoce entre sí.



Teoría de Ramsey: "El caos total es imposible".

Teorema

En toda fiesta con al menos seis invitados, es posible encontrar tres de ellos de tal suerte que o bien los tres se conocen entre sí, o bien ninguno de los tres se conoce entre sí.



Teorema (Ramsey 1930)

Para cada n*, existe un* m *tal que siempre que se coloreen las aristas de* K_m *en dos colores, existen* n *vértices tales que la subgráfica generada por esos vértices es monocromática (para cada* n *existe un* m *tal que* $m \longrightarrow (n)^2_2$*).*

Teorema (Ramsey 1930)

Para cada n, existe un m tal que siempre que se coloreen las aristas de K_m en dos colores, existen n vértices tales que la subgráfica generada por esos vértices es monocromática (para cada n existe un m tal que $m \longrightarrow (n)^2_2$).

Teorema (Ramsey 1930)

Siempre que se colorean las aristas de $K_{\aleph_0}$ en dos colores, hay un conjunto infinito de vértices tales que la subgráfica generada por esos vértices es monocromática (es decir, $\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)^2_2$).

Teorema (van der Waerden 1927)

Para cada n *existe un* m *tal que, siempre que se coloreen los enteros del* 1 *al* m *en dos colores, existe una sucesión aritmética de longitud* n *que es monocromática.*

Teorema (van der Waerden 1927)

Para cada n *existe un* m *tal que, siempre que se coloreen los enteros del* 1 *al* m *en dos colores, existe una sucesión aritmética de longitud* n *que es monocromática. En particular, si coloreamos todos los números naturales con dos colores, entonces uno de los colores contiene sucesiones aritméticas arbitrariamente largas.*

Teorema (van der Waerden 1927)

Para cada n existe un m tal que, siempre que se coloreen los enteros del 1 al m en dos colores, existe una sucesión aritmética de longitud n que es monocromática. En particular, si coloreamos todos los números naturales con dos colores, entonces uno de los colores contiene sucesiones aritméticas arbitrariamente largas.

Teorema (Szémeredi 1975)

Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ con densidad superior positiva (es decir, $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{|A \cap \{1, \ldots, n\}|}{n} > 0$) tiene sucesiones aritméticas arbitrariamente largas.

Teorema (van der Waerden 1927)

Para cada n *existe un* m *tal que, siempre que se coloreen los enteros del* 1 *al* m *en dos colores, existe una sucesión aritmética de longitud* n *que es monocromática. En particular, si coloreamos todos los números naturales con dos colores, entonces uno de los colores contiene sucesiones aritméticas arbitrariamente largas.*

Teorema (Szémeredi 1975)

Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ *con densidad superior positiva (es decir,* $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{|A \cap \{1, \dots, n\}|}{n} > 0$*) tiene sucesiones aritméticas arbitrariamente largas.*

Teorema (Green-Tao 2008)

El conjunto de los números primos contiene sucesiones aritméticas arbitrariamente largas.

Teorema (Schur 1912)

Si $n \geq 6$ *y coloreamos los números del* 1 *al* n *con dos colores, entonces es posible encontrar dos números* a *y* b *(con* $1 \leq a, b < a + b \leq n$*) tales que* a, b *y* $a + b$ *tienen el mismo color.*

Teorema (Schur 1912)

Si $n \geq 6$ *y coloreamos los números del* 1 *al* n *con dos colores, entonces es posible encontrar dos números* a *y* b *(con* $1 \leq a, b < a + b \leq n$*) tales que* a*,* b *y* $a + b$ *tienen el mismo color.*

Teorema (Folkman-Rado-Sanders ~1968)

Para cada n *existe un* m *tal que si coloreamos los enteros del* 1 *al* m *con dos colores, entonces es posible encontrar números* $a_1, \ldots, a_n$ *tales que para cualquier subconjunto no vacío* $F \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *la correspondiente suma* $\sum_{i \in F} a_i$ *(es* $\leq m$ *y) tiene siempre el mismo color.*

Teorema (Schur 1912)

Si $n \geq 6$ y coloreamos los números del 1 al n con dos colores, entonces es posible encontrar dos números a y b (con $1 \leq a, b < a + b \leq n$) tales que a, b y $a + b$ tienen el mismo color.

Teorema (Folkman-Rado-Sanders ~1968)

Para cada n existe un m tal que si coloreamos los enteros del 1 al m con dos colores, entonces es posible encontrar números $a_1, \ldots, a_n$ tales que para cualquier subconjunto no vacío $F \subseteq \{1, \ldots, n\}$ la correspondiente suma $\sum_{i \in F} a_i$ (es $\leq m$ y) tiene siempre el mismo color.

Teorema (Hindman 1974)

Siempre que coloreamos los números naturales con dos colores, es posible encontrar números $a_1, a_2, \ldots$ tales que para cada subconjunto finito no vacío $F \subseteq \mathbb{N}$ la correspondiente suma $\sum_{n \in F} a_n$ tiene el mismo color.

Recuérdese que, dados dos conjuntos X y Y, decimos que $|X| \leq |Y|$ si hay una función inyectiva $f : X \longrightarrow Y$. El axioma de elección implica que la relación $|\cdot| \leq |\cdot|$ es un orden lineal, e incluso un buen orden.

Recuérdese que, dados dos conjuntos X y Y, decimos que $|X| \leq |Y|$ si hay una función inyectiva $f : X \longrightarrow Y$. El axioma de elección implica que la relación $|\cdot| \leq |\cdot|$ es un orden lineal, e incluso un buen orden.

Definición

*Un cardinal κ es **regular** si toda unión de $< \kappa$ conjuntos, cada uno de ellos de cardinalidad $< \kappa$, necesariamente ha de tener cardinalidad $< \kappa$.*

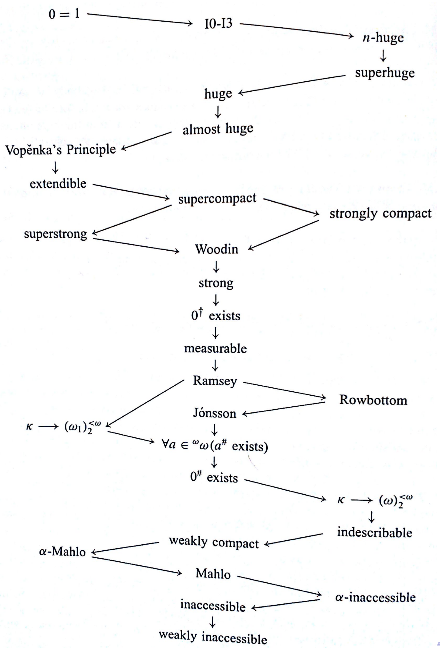
Recuérdese que, dados dos conjuntos X y Y, decimos que $|X| \leq |Y|$ si hay una función inyectiva $f : X \longrightarrow Y$. El axioma de elección implica que la relación $|\cdot| \leq |\cdot|$ es un orden lineal, e incluso un buen orden.

Definición

*Un cardinal κ es **regular** si toda unión de $< \kappa$ conjuntos, cada uno de ellos de cardinalidad $< \kappa$, necesariamente ha de tener cardinalidad $< \kappa$.*

Definición

*Un cardinal no numerable κ es **débilmente inaccesible** si es regular y límite.*


$0 = 1$
I0-I3
n-huge
superhuge
huge
almost huge
Vopěnka's Principle
extendible
supercompact
strongly compact
superstrong
Woodin
strong
$0^\dagger$ exists
measurable
Ramsey
Rowbottom
Jónsson
$\kappa \longrightarrow (\omega_1)_2^{<\omega}$
$\forall a \in {}^\omega\omega(a^\# \text{ exists})$
$0^\#$ exists
$\kappa \longrightarrow (\omega)_2^{<\omega}$
indescribable
weakly compact
α-Mahlo
Mahlo
α-inaccessible
inaccessible
weakly inaccessible

Recuérdese que el teorema de Ramsey dice que $\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)^2_2$.

Recuérdese que el teorema de Ramsey dice que $\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)^2_2$.

Es posible demostrar, por ejemplo, que $\aleph_1 \not\to (\aleph_1)^2_2$.

Recuérdese que el teorema de Ramsey dice que $\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)^2_2$.

Es posible demostrar, por ejemplo, que $\aleph_1 \not\longrightarrow (\aleph_1)^2_2$.

Teorema (Erdös-Tarski 1943)

Dado un cardinal no numerable κ, tenemos que $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$ si y sólo si κ es débilmente compacto.

Teorema (Galvin-Glazer 1975)

Si G es un semigrupo conmutativo y cancelativo, entonces siempre que coloreemos a los elementos de G con dos colores será posible encontrar un subconjunto infinito $X \subseteq G$ tal que el conjunto

$$\mathrm{FS}(X) = \left\{ \sum_{x \in F} x \,\middle|\, F \subseteq X \text{ es finito y no vacío} \right\}$$

es monocromático.

HIND(G, κ) : Siempre que coloreemos a los elementos de G con dos colores, puede encontrarse un subconjunto $X \subseteq G$ con $|X| = \kappa$ tal que $\mathrm{FS}(X)$ es monocromático.

Entonces el teorema previo nos dice que HIND$(G, \aleph_0)$ se satisface.

HIND(G, κ) : Siempre que coloreemos a los elementos de G con dos colores, puede encontrarse un subconjunto $X \subseteq G$ con $|X| = \kappa$ tal que $\mathrm{FS}(X)$ es monocromático.

Entonces el teorema previo nos dice que HIND$(G, \aleph_0)$ se satisface.

La conjetura era que, si HIND(G, κ) se satisfacía para algún G, entonces κ debía de tener propiedades de cardinal grande.

$\mathrm{HIND}(G, \kappa)$: Siempre que coloreemos a los elementos de G con dos colores, puede encontrarse un subconjunto $X \subseteq G$ con $|X| = \kappa$ tal que $\mathrm{FS}(X)$ es monocromático.

Entonces el teorema previo nos dice que $\mathrm{HIND}(G, \aleph_0)$ se satisface.

La conjetura era que, si $\mathrm{HIND}(G, \kappa)$ se satisfacía para algún G, entonces κ debía de tener propiedades de cardinal grande.

Teorema (Moore)

Si G es el grupo Booleano de cardinalidad κ, y $\mathrm{HIND}(G, \kappa)$ se cumple, entonces $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$ (es decir, κ es débilmente compacto).

Teorema (F.B. 2015)

Para todo semigrupo conmutativo y cancelativo G, existe una coloración de sus elementos en dos colores tal que $\mathrm{FS}(X)$ no puede ser monocromático si $X \subseteq G$ es no numerable. En otras palabras, HIND(G, κ) *es falso siempre que $\kappa \geq \aleph_1$.*

Teorema (F.B. 2015)

Para todo semigrupo conmutativo y cancelativo G, existe una coloración de sus elementos en dos colores tal que $\mathrm{FS}(X)$ no puede ser monocromático si $X \subseteq G$ es no numerable. En otras palabras, $\text{HIND}(G, \kappa)$ *es falso siempre que $\kappa \geq \aleph_1$.*

http://arxiv.org/abs/1506.05834