Acerca de los espacios Hausdorff por colecciones

David José Fernández Bretón
davidfb@matmor.unam.mx

Instituto de Matemáticas, UNAM, campus Morelia
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

VII Jornadas de Topología
4 de noviembre de 2009; México, D. F.

1. La conjetura de metrización de Moore: Todo espacio normal de Moore es metrizable.
2. Silver: $MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implica que existe un espacio separable no metrizable normal de Moore.
3. Bing(1951): Un espacio de Moore es metrizable $\iff$ es “normal por colecciones".
4. La pregunta era si todo espacio normal de Moore sería normal por colecciones.
5. En particular, los “Hausdorff por colecciones" son normales por colecciones.
6. William Fleissner (1974): Todo espacio T_4 de caracter $\aleph_1$ es Hausdorff por colecciones (los espacios de Moore tienen caracter $\aleph_0$, i.e. son primero numerables).

1. La conjetura de metrización de Moore: Todo espacio normal de Moore es metrizable.
2. Silver: $MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implica que existe un espacio separable no metrizable normal de Moore.
3. Bing(1951): Un espacio de Moore es metrizable $\iff$ es “normal por colecciones".
4. La pregunta era si todo espacio normal de Moore sería normal por colecciones.
5. En particular, los “Hausdorff por colecciones" son normales por colecciones.
6. William Fleissner (1974): Todo espacio T_4 de caracter $\aleph_1$ es Hausdorff por colecciones (los espacios de Moore tienen caracter $\aleph_0$, i.e. son primero numerables).

1. La conjetura de metrización de Moore: Todo espacio normal de Moore es metrizable.
2. Silver: $MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implica que existe un espacio separable no metrizable normal de Moore.
3. Bing(1951): Un espacio de Moore es metrizable $\iff$ es “normal por colecciones".
4. La pregunta era si todo espacio normal de Moore sería normal por colecciones.
5. En particular, los “Hausdorff por colecciones" son normales por colecciones.
6. William Fleissner (1974): Todo espacio T_4 de caracter $\aleph_1$ es Hausdorff por colecciones (los espacios de Moore tienen caracter $\aleph_0$, i.e. son primero numerables).

1. La conjetura de metrización de Moore: Todo espacio normal de Moore es metrizable.
2. Silver: $MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implica que existe un espacio separable no metrizable normal de Moore.
3. Bing(1951): Un espacio de Moore es metrizable $\iff$ es “normal por colecciones".
4. La pregunta era si todo espacio normal de Moore sería normal por colecciones.
5. En particular, los “Hausdorff por colecciones" son normales por colecciones.
6. William Fleissner (1974): Todo espacio T_4 de caracter $\aleph_1$ es Hausdorff por colecciones (los espacios de Moore tienen caracter $\aleph_0$, i.e. son primero numerables).

1. La conjetura de metrización de Moore: Todo espacio normal de Moore es metrizable.
2. Silver: $MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implica que existe un espacio separable no metrizable normal de Moore.
3. Bing(1951): Un espacio de Moore es metrizable $\iff$ es “normal por colecciones".
4. La pregunta era si todo espacio normal de Moore sería normal por colecciones.
5. En particular, los “Hausdorff por colecciones" son normales por colecciones.
6. William Fleissner (1974): Todo espacio T_4 de caracter $\aleph_1$ es Hausdorff por colecciones (los espacios de Moore tienen caracter $\aleph_0$, i.e. son primero numerables).

1. La conjetura de metrización de Moore: Todo espacio normal de Moore es metrizable.
2. Silver: $MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implica que existe un espacio separable no metrizable normal de Moore.
3. Bing(1951): Un espacio de Moore es metrizable $\iff$ es “normal por colecciones".
4. La pregunta era si todo espacio normal de Moore sería normal por colecciones.
5. En particular, los “Hausdorff por colecciones" son normales por colecciones.
6. William Fleissner (1974): Todo espacio T_4 de caracter $\aleph_1$ es Hausdorff por colecciones (los espacios de Moore tienen caracter $\aleph_0$, i.e. son primero numerables).

Definición

- *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $Y \subseteq X$ es* ***discreto*** *si* $(\forall x \in X)(\exists \mathcal{U} \in \mathcal{O}(X))(|\mathcal{U} \cap Y| \leq 1)$.
- *Similarmente, una familia de subconjuntos $\mathfrak{F} \subseteq \wp(X)$ es* ***discreta*** *si* $(\forall x \in X)(\exists \mathcal{U} \in \mathcal{O}(X))(|\{Y \in \mathfrak{F} | \mathcal{U} \cap Y \neq \varnothing\}| \leq 1)$.
- *Un espacio topológico X es* ***Hausdorff por colecciones*** *(CWH) si para todo subespacio discreto $Y \subseteq X$, hay una familia $\{U_y | y \in Y\}$ de abiertos disjuntos por pares tales que $y \in U_y$ para todo $y \in Y$.*
- *A tal familia la llamamos una* ***separación*** *de Y.*
- *X es* ***primero numerable*** *si* $(\forall x)(\exists \mathcal{B} \text{ base de vecindades de } x)(|\mathcal{B}| \leq \aleph_0)$.

Definición

- *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $Y \subseteq X$ es **discreto** si $(\forall x \in X)(\exists \mathcal{U} \in \mathcal{O}(X))(|\mathcal{U} \cap Y| \leq 1)$.*
- *Similarmente, una familia de subconjuntos $\mathfrak{F} \subseteq \wp(X)$ es **discreta** si $(\forall x \in X)(\exists \mathcal{U} \in \mathcal{O}(X))(|\{Y \in \mathfrak{F} | \mathcal{U} \cap Y \neq \varnothing\}| \leq 1)$.*
- *Un espacio topológico X es **Hausdorff por colecciones** (CWH) si para todo subespacio discreto $Y \subseteq X$, hay una familia $\{U_y | y \in Y\}$ de abiertos disjuntos por pares tales que $y \in U_y$ para todo $y \in Y$.*
- *A tal familia la llamamos una **separación** de Y.*
- *X es **primero numerable** si $(\forall x)(\exists \mathcal{B} \text{ base de vecindades de } x)(|\mathcal{B}| \leq \aleph_0)$.*

Definición

- *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $Y \subseteq X$ es* ***discreto*** *si* $(\forall x \in X)(\exists \mathcal{U} \in \mathcal{O}(X))(|\mathcal{U} \cap Y| \leq 1)$.
- *Similarmente, una familia de subconjuntos $\mathfrak{F} \subseteq \wp(X)$ es* ***discreta*** *si* $(\forall x \in X)(\exists \mathcal{U} \in \mathcal{O}(X))(|\{Y \in \mathfrak{F} | \mathcal{U} \cap Y \neq \varnothing\}| \leq 1)$.
- *Un espacio topológico X es* ***Hausdorff por colecciones*** *(CWH) si para todo subespacio discreto $Y \subseteq X$, hay una familia $\{U_y | y \in Y\}$ de abiertos disjuntos por pares tales que $y \in U_y$ para todo $y \in Y$.*
- *A tal familia la llamamos una* ***separación*** *de Y.*
- *X es* ***primero numerable*** *si* $(\forall x)(\exists \mathcal{B} \text{ base de vecindades de } x)(|\mathcal{B}| \leq \aleph_0)$.

Definición

- *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $Y \subseteq X$ es **discreto** si* $(\forall x \in X)(\exists \mathcal{U} \in \mathcal{O}(X))(|\mathcal{U} \cap Y| \leq 1)$.
- *Similarmente, una familia de subconjuntos $\mathfrak{F} \subseteq \wp(X)$ es **discreta** si* $(\forall x \in X)(\exists \mathcal{U} \in \mathcal{O}(X))(|\{Y \in \mathfrak{F} \big| \mathcal{U} \cap Y \neq \varnothing\}| \leq 1)$.
- *Un espacio topológico X es **Hausdorff por colecciones** (CWH) si para todo subespacio discreto $Y \subseteq X$, hay una familia $\{U_y | y \in Y\}$ de abiertos disjuntos por pares tales que $y \in U_y$ para todo $y \in Y$.*
- *A tal familia la llamamos una **separación** de Y.*
- *X es **primero numerable** si* $(\forall x)(\exists \mathcal{B} \text{ base de vecindades de } x)(|\mathcal{B}| \leq \aleph_0)$.

Definición

- *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $Y \subseteq X$ es* ***discreto*** *si* $(\forall x \in X)(\exists \mathcal{U} \in \mathcal{O}(X))(|\mathcal{U} \cap Y| \leq 1)$.
- *Similarmente, una familia de subconjuntos $\mathfrak{F} \subseteq \wp(X)$ es* ***discreta*** *si* $(\forall x \in X)(\exists \mathcal{U} \in \mathcal{O}(X))(|\{Y \in \mathfrak{F} \big| \mathcal{U} \cap Y \neq \varnothing\}| \leq 1)$.
- *Un espacio topológico X es* ***Hausdorff por colecciones*** *(CWH) si para todo subespacio discreto $Y \subseteq X$, hay una familia $\{U_y | y \in Y\}$ de abiertos disjuntos por pares tales que $y \in U_y$ para todo $y \in Y$.*
- *A tal familia la llamamos una* ***separación*** *de Y.*
- *X es* ***primero numerable*** *si* $(\forall x)(\exists \mathcal{B} \text{ base de vecindades de } x)(|\mathcal{B}| \leq \aleph_0)$.

Definición

- *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $Y \subseteq X$ es **discreto** si $(\forall x \in X)(\exists \mathcal{U} \in \mathcal{O}(X))(|\mathcal{U} \cap Y| \leq 1)$.*
- *Similarmente, una familia de subconjuntos $\mathfrak{F} \subseteq \wp(X)$ es **discreta** si $(\forall x \in X)(\exists \mathcal{U} \in \mathcal{O}(X))(|\{Y \in \mathfrak{F} \big| \mathcal{U} \cap Y \neq \varnothing\}| \leq 1)$.*
- *Un espacio topológico X es **Hausdorff por colecciones** (CWH) si para todo subespacio discreto $Y \subseteq X$, hay una familia $\{U_y | y \in Y\}$ de abiertos disjuntos por pares tales que $y \in U_y$ para todo $y \in Y$.*
- *A tal familia la llamamos una **separación** de Y.*
- *X es **primero numerable** si $(\forall x)(\exists \mathcal{B} \text{ base de vecindades de } x)(|\mathcal{B}| \leq \aleph_0)$.*

Es posible construir espacios T_4 que no son Hausdorff por colecciones (el **espacio potencia de Bing**):

Sea $X = 2^{2^{\omega_1}}$. Podemos considerar a ω_1 como un subconjunto denso de X mediante $\alpha \mapsto \{A \subseteq \omega_1 \big| \alpha \in A\}$.

Bing generó una nueva topología para X añadiendo a $\mathcal{O}(X)$ todos los puntos de $X \setminus \omega_1$ como abiertos.

De este modo X es normal pero no es Hausdorff por colecciones, pues ω_1 es un subconjunto discreto que no admite separación.

Es natural preguntarse qué condiciones extra requiere un espacio para ser Hausdorff por colecciones. En esta plática veremos cómo el axioma de constructibilidad ($V = L$) implica que todo espacio T_4 primero numerable es Hausdorff por colecciones.

Es posible construir espacios T_4 que no son Hausdorff por colecciones (el **espacio potencia de Bing**):

Sea $X = 2^{2^{\omega_1}}$. Podemos considerar a ω_1 como un subconjunto denso de X mediante $\alpha \mapsto \{A \subseteq \omega_1 \big| \alpha \in A\}$.

Bing generó una nueva topología para X añadiendo a $\mathcal{O}(X)$ todos los puntos de $X \setminus \omega_1$ como abiertos.

De este modo X es normal pero no es Hausdorff por colecciones, pues ω_1 es un subconjunto discreto que no admite separación.

Es natural preguntarse qué condiciones extra requiere un espacio para ser Hausdorff por colecciones. En esta plática veremos cómo el axioma de constructibilidad ($V = L$) implica que todo espacio T_4 primero numerable es Hausdorff por colecciones.

Es posible construir espacios T_4 que no son Hausdorff por colecciones (el **espacio potencia de Bing**):
Sea $X = 2^{2^{\omega_1}}$. Podemos considerar a ω_1 como un subconjunto denso de X mediante $\alpha \mapsto \{A \subseteq \omega_1 \big| \alpha \in A\}$.
Bing generó una nueva topología para X añadiendo a $\mathcal{O}(X)$ todos los puntos de $X \setminus \omega_1$ como abiertos.
De este modo X es normal pero no es Hausdorff por colecciones, pues ω_1 es un subconjunto discreto que no admite separación.
Es natural preguntarse qué condiciones extra requiere un espacio para ser Hausdorff por colecciones. En esta plática veremos cómo el axioma de constructibilidad ($V = L$) implica que todo espacio T_4 primero numerable es Hausdorff por colecciones.

Es posible construir espacios T_4 que no son Hausdorff por colecciones (el **espacio potencia de Bing**):

Sea $X = 2^{2^{\omega_1}}$. Podemos considerar a ω_1 como un subconjunto denso de X mediante $\alpha \mapsto \{A \subseteq \omega_1 \big| \alpha \in A\}$.

Bing generó una nueva topología para X añadiendo a $\mathcal{O}(X)$ todos los puntos de $X \setminus \omega_1$ como abiertos.

De este modo X es normal pero no es Hausdorff por colecciones, pues ω_1 es un subconjunto discreto que no admite separación.

Es natural preguntarse qué condiciones extra requiere un espacio para ser Hausdorff por colecciones. En esta plática veremos cómo el axioma de constructibilidad ($V = L$) implica que todo espacio T_4 primero numerable es Hausdorff por colecciones.

Es posible construir espacios T_4 que no son Hausdorff por colecciones (el **espacio potencia de Bing**):

Sea $X = 2^{2^{\omega_1}}$. Podemos considerar a ω_1 como un subconjunto denso de X mediante $\alpha \mapsto \{A \subseteq \omega_1 \big| \alpha \in A\}$.

Bing generó una nueva topología para X añadiendo a $\mathcal{O}(X)$ todos los puntos de $X \setminus \omega_1$ como abiertos.

De este modo X es normal pero no es Hausdorff por colecciones, pues ω_1 es un subconjunto discreto que no admite separación.

Es natural preguntarse qué condiciones extra requiere un espacio para ser Hausdorff por colecciones. En esta plática veremos cómo el axioma de constructibilidad ($V = L$) implica que todo espacio T_4 primero numerable es Hausdorff por colecciones.

Definición

*Sea $\kappa \in \mathrm{Card} \setminus \omega$. Diremos que un espacio topológico X es κ-**Hausdorff por colecciones** (abreviado κ-CWH) si*
$(\forall Y \subseteq X)(Y \text{ es discreto} \wedge |Y| = \kappa \Rightarrow Y \text{ admite una separación})$.

Supongamos que $V = L$, y sea X un espacio T_4 primero numerable.
Probaremos por inducción sobre κ que, para todo $\kappa \in \mathrm{Card} \setminus \omega$, X es κ-CWH.
El caso $\kappa = \omega$ es fácil, y únicamente utiliza la regularidad de X.
El argumento anterior se generaliza fácilmente, usando normalidad, para aplicarse a una familia discreta numerable. Por ello, el caso cuando $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ también es fácil.

Definición

*Sea $\kappa \in \mathrm{Card} \setminus \omega$. Diremos que un espacio topológico X es κ-**Hausdorff por colecciones** (abreviado κ-CWH) si $(\forall Y \subseteq X)(Y \text{ es discreto} \wedge |Y| = \kappa \Rightarrow Y \text{ admite una separación})$.*

Supongamos que $V = L$, y sea X un espacio T_4 primero numerable. Probaremos por inducción sobre κ que, para todo $\kappa \in \mathrm{Card} \setminus \omega$, X es κ-CWH. El caso $\kappa = \omega$ es fácil, y únicamente utiliza la regularidad de X.
El argumento anterior se generaliza fácilmente, usando normalidad, para aplicarse a una familia discreta numerable. Por ello, el caso cuando $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ también es fácil.

Definición

*Sea $\kappa \in \mathrm{Card} \setminus \omega$. Diremos que un espacio topológico X es **κ-Hausdorff por colecciones** (abreviado κ-CWH) si*
$(\forall Y \subseteq X)(Y \text{ es discreto} \wedge |Y| = \kappa \Rightarrow Y \text{ admite una separación})$.

Supongamos que $V = L$, y sea X un espacio T_4 primero numerable.
Probaremos por inducción sobre κ que, para todo $\kappa \in \mathrm{Card} \setminus \omega$, X es κ-CWH.
El caso $\kappa = \omega$ es fácil, y únicamente utiliza la regularidad de X.
El argumento anterior se generaliza fácilmente, usando normalidad, para aplicarse a una familia discreta numerable. Por ello, el caso cuando $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ también es fácil.

Definición

*Sea $\kappa \in \mathrm{Card} \setminus \omega$. Diremos que un espacio topológico X es **κ-Hausdorff por colecciones** (abreviado κ-CWH) si*
$(\forall Y \subseteq X)(Y \text{ es discreto} \wedge |Y| = \kappa \Rightarrow Y \text{ admite una separación})$.

Supongamos que $V = L$, y sea X un espacio T_4 primero numerable. Probaremos por inducción sobre κ que, para todo $\kappa \in \mathrm{Card} \setminus \omega$, X es κ-CWH. El caso $\kappa = \omega$ es fácil, y únicamente utiliza la regularidad de X.
El argumento anterior se generaliza fácilmente, usando normalidad, para aplicarse a una familia discreta numerable. Por ello, el caso cuando $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ también es fácil.

Definición

*Sea $\kappa \in \mathrm{Card} \setminus \omega$. Diremos que un espacio topológico X es κ-**Hausdorff por colecciones** (abreviado κ-CWH) si $(\forall Y \subseteq X)(Y \text{ es discreto} \wedge |Y| = \kappa \Rightarrow Y \text{ admite una separación})$.*

Supongamos que $V = L$, y sea X un espacio T_4 primero numerable.
Probaremos por inducción sobre κ que, para todo $\kappa \in \mathrm{Card} \setminus \omega$, X es κ-CWH.
El caso $\kappa = \omega$ es fácil, y únicamente utiliza la regularidad de X.
El argumento anterior se generaliza fácilmente, usando normalidad, para aplicarse a una familia discreta numerable. Por ello, el caso cuando $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ también es fácil.

Usaremos la siguiente consecuencia de $V = L$.

Teorema (V=L)

Supóngase que tenemos una familia de subconjuntos estacionarios $\{A_f \subseteq \kappa \big| f \in {}^\kappa\omega\}$ *tal que* $(\forall f, g \in {}^\kappa\omega)(\forall \alpha < \kappa)(f \restriction \alpha = g \restriction \alpha \Rightarrow A_f \cap (\alpha + 1) = A_g \cap (\alpha + 1))$. *Entonces hay una sucesión* $\langle f_\alpha : \alpha \to \omega + 1 \big| \alpha < \kappa \rangle$ *tal que para cada* $f \in {}^\kappa\omega$ *el conjunto* $\{\alpha \in \kappa \big| f \restriction \alpha = f_\alpha\} \subseteq A_f$ *es estacionario.*

Sea $\kappa > \omega$ regular, sea $Y \subseteq X$ un conunto discreto con $|Y| = \kappa$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $X \in \mathrm{Ord}$ y que $Y = \kappa$. Para cada $x \in X$ sea $\{N_n(x) \big| n < \omega\}$ una base numerable de vecindades de x.

Para cada $f : \lambda \to \omega$, con $\lambda < \kappa$, si $\alpha < \lambda$ definimos

$$W(f, \alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} N_{f(\beta)}(\beta).$$

En las mismas condiciones, si $H \subseteq \kappa$ entonces definimos

$$W(H, f, \alpha) = \bigcup_{\beta \in H \cap \alpha} N_{f(\beta)}(\beta).$$

Usaremos la siguiente consecuencia de $V = L$.

Teorema (V=L)

Supóngase que tenemos una familia de subconjuntos estacionarios $\{A_f \subseteq \kappa \big| f \in {}^\kappa\omega\}$ *tal que* $(\forall f, g \in {}^\kappa\omega)(\forall \alpha < \kappa)(f \restriction \alpha = g \restriction \alpha \Rightarrow A_f \cap (\alpha+1) = A_g \cap (\alpha+1))$*. Entonces hay una sucesión* $\langle f_\alpha : \alpha \to \omega+1 \big| \alpha < \kappa\rangle$ *tal que para cada* $f \in {}^\kappa\omega$ *el conjunto* $\{\alpha \in \kappa \big| f \restriction \alpha = f_\alpha\} \subseteq A_f$ *es estacionario.*

Sea $\kappa > \omega$ regular, sea $Y \subseteq X$ un conunto discreto con $|Y| = \kappa$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $X \in \mathrm{Ord}$ y que $Y = \kappa$. Para cada $x \in X$ sea $\{N_n(x) \big| n < \omega\}$ una base numerable de vecindades de x.
Para cada $f : \lambda \to \omega$, con $\lambda < \kappa$, si $\alpha < \lambda$ definimos

$$W(f, \alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} N_{f(\beta)}(\beta).$$

En las mismas condiciones, si $H \subseteq \kappa$ entonces definimos

$$W(H, f, \alpha) = \bigcup_{\beta \in H \cap \alpha} N_{f(\beta)}(\beta).$$

Usaremos la siguiente consecuencia de $V = L$.

Teorema (V=L)

Supóngase que tenemos una familia de subconjuntos estacionarios $\{A_f \subseteq \kappa \big| f \in {}^\kappa\omega\}$ *tal que* $(\forall f, g \in {}^\kappa\omega)(\forall \alpha < \kappa)(f \restriction \alpha = g \restriction \alpha \Rightarrow A_f \cap (\alpha + 1) = A_g \cap (\alpha + 1))$*. Entonces hay una sucesión* $\langle f_\alpha : \alpha \to \omega + 1 \big| \alpha < \kappa \rangle$ *tal que para cada* $f \in {}^\kappa\omega$ *el conjunto* $\{\alpha \in \kappa \big| f \restriction \alpha = f_\alpha\} \subseteq A_f$ *es estacionario.*

Sea $\kappa > \omega$ regular, sea $Y \subseteq X$ un conunto discreto con $|Y| = \kappa$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $X \in \mathrm{Ord}$ y que $Y = \kappa$. Para cada $x \in X$ sea $\{N_n(x) \big| n < \omega\}$ una base numerable de vecindades de x.

Para cada $f : \lambda \to \omega$, con $\lambda < \kappa$, si $\alpha < \lambda$ definimos

$$W(f, \alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} N_{f(\beta)}(\beta).$$

En las mismas condiciones, si $H \subseteq \kappa$ entonces definimos

$$W(H, f, \alpha) = \bigcup_{\beta \in H \cap \alpha} N_{f(\beta)}(\beta).$$

Usaremos la siguiente consecuencia de $V = L$.

Teorema (V=L)

Supóngase que tenemos una familia de subconjuntos estacionarios $\{A_f \subseteq \kappa \big| f \in {}^{\kappa}\omega\}$ *tal que* $(\forall f, g \in {}^{\kappa}\omega)(\forall\alpha < \kappa)(f \upharpoonright \alpha = g \upharpoonright \alpha \Rightarrow A_f \cap (\alpha + 1) = A_g \cap (\alpha + 1))$*. Entonces hay una sucesión* $\langle f_\alpha : \alpha \to \omega + 1 \big| \alpha < \kappa\rangle$ *tal que para cada* $f \in {}^{\kappa}\omega$ *el conjunto* $\{\alpha \in \kappa \big| f \upharpoonright \alpha = f_\alpha\} \subseteq A_f$ *es estacionario.*

Sea $\kappa > \omega$ regular, sea $Y \subseteq X$ un conunto discreto con $|Y| = \kappa$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $X \in \mathrm{Ord}$ y que $Y = \kappa$. Para cada $x \in X$ sea $\{N_n(x) \big| n < \omega\}$ una base numerable de vecindades de x.
Para cada $f : \lambda \to \omega$, con $\lambda < \kappa$, si $\alpha < \lambda$ definimos

$$W(f, \alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} N_{f(\beta)}(\beta).$$

En las mismas condiciones, si $H \subseteq \kappa$ entonces definimos

$$W(H, f, \alpha) = \bigcup_{\beta\in H\cap\alpha} N_{f(\beta)}(\beta).$$

Para cada $f \in {}^{\kappa}\omega$ definimos

$$A_f = \{\alpha < \kappa \big| \overline{W(f,\alpha)} \cap \kappa \neq \alpha\}.$$

Notemos que se cumple:
$(\forall f, g \in {}^{\kappa}\omega)(\forall \alpha < \kappa)(f \upharpoonright \alpha = g \upharpoonright \alpha \Rightarrow A_f \cap (\alpha+1) = A_g \cap (\alpha+1))$.

Proposición

O bien Y admite una separación, o bien para cada $f \in {}^{\kappa}\omega$, A_f es estacionario.

Demostración: Supóngase que $C \subseteq \kappa$ es un club y $f \in {}^{\kappa}\omega$ y que $C \cap A_f = \varnothing$. Sea $C = \{\alpha_\nu \big| \nu < \kappa\}$ una enumeración monótona. Como ya sabemos que X es λ-CWH para cada $\lambda < \kappa$, entonces para cada $\nu < \kappa$ hay una familia $\mathfrak{I}_\nu = \{\mathcal{U}_x \big| x \in \alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu\}$ de abiertos que separan a $\alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu$. Sin perder generalidad, podemos suponer $\mathcal{U}_x \subseteq N_{f(x)}(x)$. Más aún, dado que, para cada $\nu < \kappa$, $\alpha_\nu = \overline{W(f,\alpha_\nu)} \cap \kappa$, entonces podemos suponer que para cada $x > \alpha_\nu$, $\mathcal{U}_x \cap \overline{W(f,\alpha)} = \varnothing$.
Con esto, es claro que $\bigcup_{\nu<\kappa} \mathfrak{I}_\nu$ es una separación de Y. $\square$

Para cada $f \in {}^{\kappa}\omega$ definimos

$$A_f = \{\alpha < \kappa \big| \overline{W(f,\alpha)} \cap \kappa \neq \alpha\}.$$

Notemos que se cumple:
$(\forall f, g \in {}^{\kappa}\omega)(\forall \alpha < \kappa)(f \restriction \alpha = g \restriction \alpha \Rightarrow A_f \cap (\alpha+1) = A_g \cap (\alpha+1))$.

Proposición

O bien Y admite una separación, o bien para cada $f \in {}^{\kappa}\omega$, A_f es estacionario.

Demostración: Supóngase que $C \subseteq \kappa$ es un club y $f \in {}^{\kappa}\omega$ y que $C \cap A_f = \varnothing$. Sea $C = \{\alpha_\nu \big| \nu < \kappa\}$ una enumeración monótona. Como ya sabemos que X es λ-CWH para cada $\lambda < \kappa$, entonces para cada $\nu < \kappa$ hay una familia $\mathfrak{I}_\nu = \{\mathcal{U}_x \big| x \in \alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu\}$ de abiertos que separan a $\alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu$. Sin perder generalidad, podemos suponer $\mathcal{U}_x \subseteq N_{f(x)}(x)$. Más aún, dado que, para cada $\nu < \kappa$, $\alpha_\nu = \overline{W(f,\alpha_\nu)} \cap \kappa$, entonces podemos suponer que para cada $x > \alpha_\nu$, $\mathcal{U}_x \cap \overline{W(f,\alpha)} = \varnothing$.
Con esto, es claro que $\bigcup_{\nu<\kappa} \mathfrak{I}_\nu$ es una separación de Y. $\square$

Para cada $f \in {}^{\kappa}\omega$ definimos

$$A_f = \{\alpha < \kappa \big| \overline{W(f,\alpha)} \cap \kappa \neq \alpha\}.$$

Notemos que se cumple:
$(\forall f, g \in {}^{\kappa}\omega)(\forall \alpha < \kappa)(f \restriction \alpha = g \restriction \alpha \Rightarrow A_f \cap (\alpha + 1) = A_g \cap (\alpha + 1))$.

Proposición

O bien Y admite una separación, o bien para cada $f \in {}^{\kappa}\omega$, A_f es estacionario.

Demostración: Supóngase que $C \subseteq \kappa$ es un club y $f \in {}^{\kappa}\omega$ y que $C \cap A_f = \varnothing$. Sea $C = \{\alpha_\nu \big| \nu < \kappa\}$ una enumeración monótona. Como ya sabemos que X es λ-CWH para cada $\lambda < \kappa$, entonces para cada $\nu < \kappa$ hay una familia $\mathfrak{I}_\nu = \{\mathcal{U}_x \big| x \in \alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu\}$ de abiertos que separan a $\alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu$. Sin perder generalidad, podemos suponer $\mathcal{U}_x \subseteq N_{f(x)}(x)$. Más aún, dado que, para cada $\nu < \kappa$, $\alpha_\nu = \overline{W(f, \alpha_\nu)} \cap \kappa$, entonces podemos suponer que para cada $x > \alpha_\nu$, $\mathcal{U}_x \cap \overline{W(f,\alpha)} = \varnothing$.
Con esto, es claro que $\bigcup_{\nu < \kappa} \mathfrak{I}_\nu$ es una separación de Y. $\square$

Para cada $f \in {}^{\kappa}\omega$ definimos

$$A_f = \{\alpha < \kappa \big| \overline{W(f,\alpha)} \cap \kappa \neq \alpha\}.$$

Notemos que se cumple:
$(\forall f, g \in {}^{\kappa}\omega)(\forall \alpha < \kappa)(f \upharpoonright \alpha = g \upharpoonright \alpha \Rightarrow A_f \cap (\alpha + 1) = A_g \cap (\alpha + 1))$.

Proposición

O bien Y admite una separación, o bien para cada $f \in {}^{\kappa}\omega$, A_f es estacionario.

Demostración: Supóngase que $C \subseteq \kappa$ es un club y $f \in {}^{\kappa}\omega$ y que $C \cap A_f = \varnothing$. Sea $C = \{\alpha_\nu \big| \nu < \kappa\}$ una enumeración monótona. Como ya sabemos que X es λ-CWH para cada $\lambda < \kappa$, entonces para cada $\nu < \kappa$ hay una familia $\mathfrak{I}_\nu = \{\mathcal{U}_x \big| x \in \alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu\}$ de abiertos que separan a $\alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu$. Sin perder generalidad, podemos suponer $\mathcal{U}_x \subseteq N_{f(x)}(x)$. Más aún, dado que, para cada $\nu < \kappa$, $\alpha_\nu = \overline{W(f,\alpha_\nu)} \cap \kappa$, entonces podemos suponer que para cada $x > \alpha_\nu$, $\mathcal{U}_x \cap \overline{W(f,\alpha)} = \varnothing$.
Con esto, es claro que $\bigcup_{\nu<\kappa} \mathfrak{I}_\nu$ es una separación de Y. $\square$

Para cada $f \in {}^\kappa\omega$ definimos

$$A_f = \{\alpha < \kappa \big| \overline{W(f,\alpha)} \cap \kappa \neq \alpha\}.$$

Notemos que se cumple:
$(\forall f, g \in {}^\kappa\omega)(\forall \alpha < \kappa)(f \restriction \alpha = g \restriction \alpha \Rightarrow A_f \cap (\alpha+1) = A_g \cap (\alpha+1))$.

Proposición

O bien Y admite una separación, o bien para cada $f \in {}^\kappa\omega$, A_f es estacionario.

Demostración: Supóngase que $C \subseteq \kappa$ es un club y $f \in {}^\kappa\omega$ y que $C \cap A_f = \varnothing$.
Sea $C = \{\alpha_\nu \big| \nu < \kappa\}$ una enumeración monótona. Como ya sabemos que X es λ-CWH para cada $\lambda < \kappa$, entonces para cada $\nu < \kappa$ hay una familia $\mathfrak{I}_\nu = \{\mathcal{U}_x \big| x \in \alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu\}$ de abiertos que separan a $\alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu$. Sin perder generalidad, podemos suponer $\mathcal{U}_x \subseteq N_{f(x)}(x)$. Más aún, dado que, para cada $\nu < \kappa$, $\alpha_\nu = \overline{W(f,\alpha_\nu)} \cap \kappa$, entonces podemos suponer que para cada $x > \alpha_\nu$, $\mathcal{U}_x \cap \overline{W(f,\alpha)} = \varnothing$.
Con esto, es claro que $\bigcup_{\nu<\kappa} \mathfrak{I}_\nu$ es una separación de Y. □

Para cada $f \in {}^{\kappa}\omega$ definimos

$$A_f = \{\alpha < \kappa \big| \overline{W(f,\alpha)} \cap \kappa \neq \alpha\}.$$

Notemos que se cumple:
$(\forall f, g \in {}^{\kappa}\omega)(\forall \alpha < \kappa)(f \restriction \alpha = g \restriction \alpha \Rightarrow A_f \cap (\alpha+1) = A_g \cap (\alpha+1))$.

Proposición

O bien Y admite una separación, o bien para cada $f \in {}^{\kappa}\omega$, A_f es estacionario.

Demostración: Supóngase que $C \subseteq \kappa$ es un club y $f \in {}^{\kappa}\omega$ y que $C \cap A_f = \varnothing$. Sea $C = \{\alpha_\nu \big| \nu < \kappa\}$ una enumeración monótona. Como ya sabemos que X es λ-CWH para cada $\lambda < \kappa$, entonces para cada $\nu < \kappa$ hay una familia $\mathfrak{I}_\nu = \{\mathcal{U}_x \big| x \in \alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu\}$ de abiertos que separan a $\alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu$. Sin perder generalidad, podemos suponer $\mathcal{U}_x \subseteq N_{f(x)}(x)$. Más aún, dado que, para cada $\nu < \kappa$, $\alpha_\nu = \overline{W(f,\alpha_\nu)} \cap \kappa$, entonces podemos suponer que para cada $x > \alpha_\nu$, $\mathcal{U}_x \cap \overline{W(f,\alpha)} = \varnothing$.
Con esto, es claro que $\bigcup_{\nu<\kappa} \mathfrak{I}_\nu$ es una separación de Y. □

Para cada $f \in {}^{\kappa}\omega$ definimos

$$A_f = \{\alpha < \kappa \big| \overline{W(f,\alpha)} \cap \kappa \neq \alpha\}.$$

Notemos que se cumple:
$(\forall f, g \in {}^{\kappa}\omega)(\forall \alpha < \kappa)(f \restriction \alpha = g \restriction \alpha \Rightarrow A_f \cap (\alpha+1) = A_g \cap (\alpha+1))$.

Proposición

O bien Y admite una separación, o bien para cada $f \in {}^{\kappa}\omega$, A_f es estacionario.

Demostración: Supóngase que $C \subseteq \kappa$ es un club y $f \in {}^{\kappa}\omega$ y que $C \cap A_f = \varnothing$. Sea $C = \{\alpha_\nu \big| \nu < \kappa\}$ una enumeración monótona. Como ya sabemos que X es λ-CWH para cada $\lambda < \kappa$, entonces para cada $\nu < \kappa$ hay una familia $\mathfrak{I}_\nu = \{\mathcal{U}_x \big| x \in \alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu\}$ de abiertos que separan a $\alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu$. Sin perder generalidad, podemos suponer $\mathcal{U}_x \subseteq N_{f(x)}(x)$. Más aún, dado que, para cada $\nu < \kappa$, $\alpha_\nu = \overline{W(f,\alpha_\nu)} \cap \kappa$, entonces podemos suponer que para cada $x > \alpha_\nu$, $\mathcal{U}_x \cap \overline{W(f,\alpha)} = \varnothing$.
Con esto, es claro que $\bigcup_{\nu<\kappa} \mathfrak{I}_\nu$ es una separación de Y. $\square$

Para cada $f \in {}^{\kappa}\omega$ definimos

$$A_f = \{\alpha < \kappa \big| \overline{W(f,\alpha)} \cap \kappa \neq \alpha\}.$$

Notemos que se cumple:
$(\forall f, g \in {}^{\kappa}\omega)(\forall \alpha < \kappa)(f \restriction \alpha = g \restriction \alpha \Rightarrow A_f \cap (\alpha + 1) = A_g \cap (\alpha + 1))$.

Proposición

O bien Y admite una separación, o bien para cada $f \in {}^{\kappa}\omega$, A_f es estacionario.

Demostración: Supóngase que $C \subseteq \kappa$ es un club y $f \in {}^{\kappa}\omega$ y que $C \cap A_f = \varnothing$. Sea $C = \{\alpha_\nu \big| \nu < \kappa\}$ una enumeración monótona. Como ya sabemos que X es λ-CWH para cada $\lambda < \kappa$, entonces para cada $\nu < \kappa$ hay una familia $\mathfrak{I}_\nu = \{\mathcal{U}_x \big| x \in \alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu\}$ de abiertos que separan a $\alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu$. Sin perder generalidad, podemos suponer $\mathcal{U}_x \subseteq N_{f(x)}(x)$. Más aún, dado que, para cada $\nu < \kappa$, $\alpha_\nu = \overline{W(f,\alpha_\nu)} \cap \kappa$, entonces podemos suponer que para cada $x > \alpha_\nu$, $\mathcal{U}_x \cap \overline{W(f,\alpha)} = \varnothing$.
Con esto, es claro que $\bigcup_{\nu<\kappa} \mathfrak{I}_\nu$ es una separación de Y. $\square$

Para cada $f \in {}^{\kappa}\omega$ definimos

$$A_f = \{\alpha < \kappa \big| \overline{W(f,\alpha)} \cap \kappa \neq \alpha\}.$$

Notemos que se cumple:
$(\forall f, g \in {}^{\kappa}\omega)(\forall \alpha < \kappa)(f \restriction \alpha = g \restriction \alpha \Rightarrow A_f \cap (\alpha+1) = A_g \cap (\alpha+1))$.

Proposición

O bien Y admite una separación, o bien para cada $f \in {}^{\kappa}\omega$, A_f es estacionario.

Demostración: Supóngase que $C \subseteq \kappa$ es un club y $f \in {}^{\kappa}\omega$ y que $C \cap A_f = \varnothing$. Sea $C = \{\alpha_\nu \big| \nu < \kappa\}$ una enumeración monótona. Como ya sabemos que X es λ-CWH para cada $\lambda < \kappa$, entonces para cada $\nu < \kappa$ hay una familia $\mathfrak{I}_\nu = \{\mathcal{U}_x \big| x \in \alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu\}$ de abiertos que separan a $\alpha_{\nu+1} \setminus \alpha_\nu$. Sin perder generalidad, podemos suponer $\mathcal{U}_x \subseteq N_{f(x)}(x)$. Más aún, dado que, para cada $\nu < \kappa$, $\alpha_\nu = \overline{W(f,\alpha_\nu)} \cap \kappa$, entonces podemos suponer que para cada $x > \alpha_\nu$, $\mathcal{U}_x \cap \overline{W(f,\alpha)} = \varnothing$.
Con esto, es claro que $\bigcup_{\nu<\kappa} \mathfrak{I}_\nu$ es una separación de Y. $\square$

Si Y admite una separación, ya. Si no, entonces tenemos una sucesión $\langle f_\alpha : \alpha \to \omega+1 \big| \alpha < \kappa \rangle$ tal que para cada $f \in {}^\kappa\omega$, $\{\alpha \in \kappa \big| f \upharpoonright \alpha = f_\alpha\} \subseteq A_f$ es estacionario.

Queremos $H_\gamma, K_\gamma \subseteq \kappa$ disjuntos que no admitan separación, con lo cual contradiremos la normalidad de X.

Sea $\nu = \{(\alpha,\beta) \big| \alpha < \kappa \wedge \beta = \min[\overline{W(f_\alpha,\alpha)} \cap (\kappa \setminus \alpha)]\}$. Es claro que ν es una función parcial desde κ hacia κ. Comenzamos poniendo $H_0 = K_0 = \varnothing$, y vamos recorriendo los ordinales. En los ordinales límite, hacemos $H_\gamma = \bigcup\limits_{\beta<\gamma} H_\beta$ y $K_\gamma = \bigcup\limits_{\beta<\gamma} K_\beta$. Por último, si conocemos H_α y K_α, hay dos casos:

1. $f_\alpha : \alpha \to \omega$, $\alpha \in \mathrm{dom}(\nu)$ y $(\forall\beta < \alpha)(\beta \in \mathrm{dom}(\nu) \Rightarrow \nu(\beta) < \alpha)$. Entonces, como $\alpha \subseteq H_\alpha \cup K_\alpha$, esto implica que $\overline{W(f_\alpha,\alpha)} = \overline{W(H_\alpha,f_\alpha,\alpha)} \cup \overline{W(K_\alpha,f_\alpha,\alpha)} \ni \nu(\alpha)$. Si $\nu(\alpha) \in \overline{W(H_\alpha,f_\alpha,\alpha)}$, ponemos $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup \{\nu(\alpha)\}$ y $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup [(\alpha+1) \setminus K_{\alpha+1}]$. En caso contrario, hacemos $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup \{\nu(\alpha)\}$ y $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup [(\alpha+1) \setminus H_{\alpha+1}]$.

Si Y admite una separación, ya. Si no, entonces tenemos una sucesión $\langle f_\alpha : \alpha \to \omega + 1 \big| \alpha < \kappa \rangle$ tal que para cada $f \in {}^\kappa\omega$, $\{\alpha \in \kappa \big| f \upharpoonright \alpha = f_\alpha\} \subseteq A_f$ es estacionario.

Queremos $H_\gamma, K_\gamma \subseteq \kappa$ disjuntos que no admitan separación, con lo cual contradiremos la normalidad de X.

Sea $\nu = \{(\alpha, \beta) \big| \alpha < \kappa \wedge \beta = \min[\overline{W(f_\alpha, \alpha)} \cap (\kappa \setminus \alpha)]\}$. Es claro que ν es una función parcial desde κ hacia κ. Comenzamos poniendo $H_0 = K_0 = \varnothing$, y vamos recorriendo los ordinales. En los ordinales límite, hacemos $H_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} H_\beta$ y $K_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} K_\beta$. Por último, si conocemos H_α y K_α, hay dos casos:

1. $f_\alpha : \alpha \to \omega$, $\alpha \in \mathrm{dom}(\nu)$ y $(\forall \beta < \alpha)(\beta \in \mathrm{dom}(\nu) \Rightarrow \nu(\beta) < \alpha)$. Entonces, como $\alpha \subseteq H_\alpha \cup K_\alpha$, esto implica que $\overline{W(f_\alpha, \alpha)} = \overline{W(H_\alpha, f_\alpha, \alpha)} \cup \overline{W(K_\alpha, f_\alpha, \alpha)} \ni \nu(\alpha)$. Si $\nu(\alpha) \in \overline{W(H_\alpha, f_\alpha, \alpha)}$, ponemos $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup \{\nu(\alpha)\}$ y $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup [(\alpha + 1) \setminus K_{\alpha+1}]$. En caso contrario, hacemos $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup \{\nu(\alpha)\}$ y $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup [(\alpha + 1) \setminus H_{\alpha+1}]$.

Si Y admite una separación, ya. Si no, entonces tenemos una sucesión $\langle f_\alpha : \alpha \to \omega+1 \big| \alpha < \kappa \rangle$ tal que para cada $f \in {}^\kappa\omega$, $\{\alpha \in \kappa \big| f \restriction \alpha = f_\alpha\} \subseteq A_f$ es estacionario.

Queremos $H_\gamma, K_\gamma \subseteq \kappa$ disjuntos que no admitan separación, con lo cual contradiremos la normalidad de X.

Sea $\nu = \{(\alpha,\beta) \big| \alpha < \kappa \wedge \beta = \text{mín}[\overline{W(f_\alpha,\alpha)} \cap (\kappa \setminus \alpha)]\}$. Es claro que ν es una función parcial desde κ hacia κ. Comenzamos poniendo $H_0 = K_0 = \varnothing$, y vamos recorriendo los ordinales. En los ordinales límite, hacemos $H_\gamma = \bigcup\limits_{\beta<\gamma} H_\beta$ y $K_\gamma = \bigcup\limits_{\beta<\gamma} K_\beta$. Por último, si conocemos H_α y K_α, hay dos casos:

1. $f_\alpha : \alpha \to \omega$, $\alpha \in \text{dom}(\nu)$ y $(\forall \beta < \alpha)(\beta \in \text{dom}(\nu) \Rightarrow \nu(\beta) < \alpha)$. Entonces, como $\alpha \subseteq H_\alpha \cup K_\alpha$, esto implica que $\overline{W(f_\alpha,\alpha)} = \overline{W(H_\alpha,f_\alpha,\alpha)} \cup \overline{W(K_\alpha,f_\alpha,\alpha)} \ni \nu(\alpha)$. Si $\nu(\alpha) \in \overline{W(H_\alpha,f_\alpha,\alpha)}$, ponemos $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup \{\nu(\alpha)\}$ y $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup [(\alpha+1) \setminus K_{\alpha+1}]$. En caso contrario, hacemos $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup \{\nu(\alpha)\}$ y $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup [(\alpha+1) \setminus H_{\alpha+1}]$.

Si Y admite una separación, ya. Si no, entonces tenemos una sucesión $\langle f_\alpha : \alpha \to \omega + 1 \big| \alpha < \kappa \rangle$ tal que para cada $f \in {}^\kappa\omega$, $\{\alpha \in \kappa \big| f \restriction \alpha = f_\alpha\} \subseteq A_f$ es estacionario.
Queremos $H_\gamma, K_\gamma \subseteq \kappa$ disjuntos que no admitan separación, con lo cual contradiremos la normalidad de X.
Sea $\nu = \{(\alpha, \beta) \big| \alpha < \kappa \wedge \beta = \min[\overline{W(f_\alpha, \alpha)} \cap (\kappa \setminus \alpha)]\}$. Es claro que ν es una función parcial desde κ hacia κ. Comenzamos poniendo $H_0 = K_0 = \varnothing$, y vamos recorriendo los ordinales. En los ordinales límite, hacemos $H_\gamma = \bigcup\limits_{\beta<\gamma} H_\beta$ y $K_\gamma = \bigcup\limits_{\beta<\gamma} K_\beta$. Por último, si conocemos H_α y K_α, hay dos casos:

1. $f_\alpha : \alpha \to \omega$, $\alpha \in \mathrm{dom}(\nu)$ y $(\forall \beta < \alpha)(\beta \in \mathrm{dom}(\nu) \Rightarrow \nu(\beta) < \alpha)$. Entonces, como $\alpha \subseteq H_\alpha \cup K_\alpha$, esto implica que $\overline{W(f_\alpha, \alpha)} = \overline{W(H_\alpha, f_\alpha, \alpha)} \cup \overline{W(K_\alpha, f_\alpha, \alpha)} \ni \nu(\alpha)$. Si $\nu(\alpha) \in \overline{W(H_\alpha, f_\alpha, \alpha)}$, ponemos $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup \{\nu(\alpha)\}$ y $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup [(\alpha + 1) \setminus K_{\alpha+1}]$. En caso contrario, hacemos $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup \{\nu(\alpha)\}$ y $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup [(\alpha + 1) \setminus H_{\alpha+1}]$.

2 En cualquier otro caso, ponemos $H_{\alpha+1} = H_\alpha$ y $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup [(\alpha+1) \setminus H_{\alpha+1}]$

Lo único que podría fallar es que $K_{\alpha+1} \cap H_{\alpha+1} \neq \varnothing$. Pero ese caso sólo podría ocurrir si en el primer caso, para algunos $\alpha, \alpha' < \kappa$ distintos, ocurre que $\nu(\alpha) = \nu(\alpha')$ y pusimos (sin perder generalidad) a $\nu(\alpha)$ en $H_{\alpha+1}$ y a $\nu(\alpha')$ en $K_{\alpha'+1}$. Pero entonces, si $\alpha < \alpha'$ debemos tener que $(\forall \beta < \alpha')[\beta \in \mathrm{dom}(\nu) \Rightarrow \nu(\beta) < \alpha']$, en particular $\nu(\alpha) < \alpha'$, lo cual es contradictorio. Por ello, $H = \bigcup_{\beta<\kappa} H_\beta$ y $K = \bigcup_{\beta<\kappa}$ son disjuntos, con $H \cup K = \kappa$.

Al ser discretos, son cerrados. Por normalidad, $(\exists \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}(X))(\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing \wedge H \subseteq \mathcal{U} \wedge K \subseteq \mathcal{V})$. Nos escogemos una $f \in {}^\kappa\omega$ tal que $(\forall \alpha < \kappa)[(\alpha \in H \Rightarrow N_{f(\alpha)}(\alpha) \subseteq \mathcal{U}) \wedge (\alpha \in K \Rightarrow N_{f(\alpha)}(\alpha) \subseteq \mathcal{V})]$. $V = L$ implica que $E = \{\alpha < \kappa \big| f \upharpoonright \alpha = f_\alpha\} \subseteq A_f$ es estacionario. Ahora, no es difícil demostrar que $C = \{\alpha < \kappa \big| \alpha \text{ es límite} \wedge (\forall \beta < \alpha)[\beta \in \mathrm{dom}(\nu) \Rightarrow \nu(\beta) < \alpha]\}$ es un club en κ (aquí se utiliza fuertemente la regularidad de κ). Por ello hay un $\alpha \in E \cap C$.

2 En cualquier otro caso, ponemos $H_{\alpha+1} = H_\alpha$ y $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup [(\alpha+1) \setminus H_{\alpha+1}]$

Lo único que podría fallar es que $K_{\alpha+1} \cap H_{\alpha+1} \neq \varnothing$. Pero ese caso sólo podría ocurrir si en el primer caso, para algunos $\alpha, \alpha' < \kappa$ distintos, ocurre que $\nu(\alpha) = \nu(\alpha')$ y pusimos (sin perder generalidad) a $\nu(\alpha)$ en $H_{\alpha+1}$ y a $\nu(\alpha')$ en $K_{\alpha'+1}$. Pero entonces, si $\alpha < \alpha'$ debemos tener que $(\forall\beta < \alpha')[\beta \in \mathrm{dom}(\nu) \Rightarrow \nu(\beta) < \alpha']$, en particular $\nu(\alpha) < \alpha'$, lo cual es contradictorio. Por ello, $H = \bigcup_{\beta<\kappa} H_\beta$ y $K = \bigcup_{\beta<\kappa}$ son disjuntos, con $H \cup K = \kappa$.

Al ser discretos, son cerrados. Por normalidad, $(\exists \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}(X))(\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing \wedge H \subseteq \mathcal{U} \wedge K \subseteq \mathcal{V})$. Nos escogemos una $f \in {}^\kappa\omega$ tal que $(\forall\alpha < \kappa)[(\alpha \in H \Rightarrow N_{f(\alpha)}(\alpha) \subseteq \mathcal{U}) \wedge (\alpha \in K \Rightarrow N_{f(\alpha)}(\alpha) \subseteq \mathcal{V})]$. $V = L$ implica que $E = \{\alpha < \kappa \big| f \restriction \alpha = f_\alpha\} \subseteq A_f$ es estacionario. Ahora, no es difícil demostrar que $C = \{\alpha < \kappa \big| \alpha \text{ es límite} \wedge (\forall\beta < \alpha)[\beta \in \mathrm{dom}(\nu) \Rightarrow \nu(\beta) < \alpha]\}$ es un club en κ (aquí se utiliza fuertemente la regularidad de κ). Por ello hay un $\alpha \in E \cap C$.

2. En cualquier otro caso, ponemos $H_{\alpha+1} = H_\alpha$ y $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup [(\alpha+1) \setminus H_{\alpha+1}]$

Lo único que podría fallar es que $K_{\alpha+1} \cap H_{\alpha+1} \neq \varnothing$. Pero ese caso sólo podría ocurrir si en el primer caso, para algunos $\alpha, \alpha' < \kappa$ distintos, ocurre que $\nu(\alpha) = \nu(\alpha')$ y pusimos (sin perder generalidad) a $\nu(\alpha)$ en $H_{\alpha+1}$ y a $\nu(\alpha')$ en $K_{\alpha'+1}$. Pero entonces, si $\alpha < \alpha'$ debemos tener que $(\forall \beta < \alpha')[\beta \in \mathrm{dom}(\nu) \Rightarrow \nu(\beta) < \alpha']$, en particular $\nu(\alpha) < \alpha'$, lo cual es contradictorio. Por ello, $H = \bigcup_{\beta<\kappa} H_\beta$ y $K = \bigcup_{\beta<\kappa}$ son disjuntos, con $H \cup K = \kappa$.

Al ser discretos, son cerrados. Por normalidad, $(\exists \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}(X))(\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing \wedge H \subseteq \mathcal{U} \wedge K \subseteq \mathcal{V})$. Nos escogemos una $f \in {}^\kappa\omega$ tal que $(\forall \alpha < \kappa)[(\alpha \in H \Rightarrow N_{f(\alpha)}(\alpha) \subseteq \mathcal{U}) \wedge (\alpha \in K \Rightarrow N_{f(\alpha)}(\alpha) \subseteq \mathcal{V})]$. $V = L$ implica que $E = \{\alpha < \kappa \big| f \upharpoonright \alpha = f_\alpha\} \subseteq A_f$ es estacionario. Ahora, no es difícil demostrar que $C = \{\alpha < \kappa \big| \alpha \text{ es límite} \wedge (\forall \beta < \alpha)[\beta \in \mathrm{dom}(\nu) \Rightarrow \nu(\beta) < \alpha]\}$ es un club en κ (aquí se utiliza fuertemente la regularidad de κ). Por ello hay un $\alpha \in E \cap C$.

2 En cualquier otro caso, ponemos $H_{\alpha+1} = H_\alpha$ y $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup [(\alpha+1) \setminus H_{\alpha+1}]$

Lo único que podría fallar es que $K_{\alpha+1} \cap H_{\alpha+1} \neq \varnothing$. Pero ese caso sólo podría ocurrir si en el primer caso, para algunos $\alpha, \alpha' < \kappa$ distintos, ocurre que $\nu(\alpha) = \nu(\alpha')$ y pusimos (sin perder generalidad) a $\nu(\alpha)$ en $H_{\alpha+1}$ y a $\nu(\alpha')$ en $K_{\alpha'+1}$. Pero entonces, si $\alpha < \alpha'$ debemos tener que $(\forall \beta < \alpha')[\beta \in \mathrm{dom}(\nu) \Rightarrow \nu(\beta) < \alpha']$, en particular $\nu(\alpha) < \alpha'$, lo cual es contradictorio. Por ello, $H = \bigcup_{\beta<\kappa} H_\beta$ y $K = \bigcup_{\beta<\kappa}$ son disjuntos, con $H \cup K = \kappa$.

Al ser discretos, son cerrados. Por normalidad, $(\exists \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}(X))(\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing \wedge H \subseteq \mathcal{U} \wedge K \subseteq \mathcal{V})$. Nos escogemos una $f \in {}^\kappa\omega$ tal que $(\forall \alpha < \kappa)[(\alpha \in H \Rightarrow N_{f(\alpha)}(\alpha) \subseteq \mathcal{U}) \wedge (\alpha \in K \Rightarrow N_{f(\alpha)}(\alpha) \subseteq \mathcal{V})]$. $V = L$ implica que $E = \{\alpha < \kappa | f \upharpoonright \alpha = f_\alpha\} \subseteq A_f$ es estacionario. Ahora, no es difícil demostrar que $C = \{\alpha < \kappa | \alpha \text{ es límite} \wedge (\forall \beta < \alpha)[\beta \in \mathrm{dom}(\nu) \Rightarrow \nu(\beta) < \alpha]\}$ es un club en κ (aquí se utiliza fuertemente la regularidad de κ). Por ello hay un $\alpha \in E \cap C$.

2 En cualquier otro caso, ponemos $H_{\alpha+1} = H_\alpha$ y $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup [(\alpha+1) \setminus H_{\alpha+1}]$

Lo único que podría fallar es que $K_{\alpha+1} \cap H_{\alpha+1} \neq \varnothing$. Pero ese caso sólo podría ocurrir si en el primer caso, para algunos $\alpha, \alpha' < \kappa$ distintos, ocurre que $\nu(\alpha) = \nu(\alpha')$ y pusimos (sin perder generalidad) a $\nu(\alpha)$ en $H_{\alpha+1}$ y a $\nu(\alpha')$ en $K_{\alpha'+1}$. Pero entonces, si $\alpha < \alpha'$ debemos tener que $(\forall\beta < \alpha')[\beta \in \mathrm{dom}(\nu) \Rightarrow \nu(\beta) < \alpha']$, en particular $\nu(\alpha) < \alpha'$, lo cual es contradictorio. Por ello, $H = \bigcup\limits_{\beta<\kappa} H_\beta$ y $K = \bigcup\limits_{\beta<\kappa}$ son disjuntos, con $H \cup K = \kappa$.

Al ser discretos, son cerrados. Por normalidad, $(\exists \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}(X))(\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing \wedge H \subseteq \mathcal{U} \wedge K \subseteq \mathcal{V})$. Nos escogemos una $f \in {}^\kappa\omega$ tal que $(\forall\alpha < \kappa)[(\alpha \in H \Rightarrow N_{f(\alpha)}(\alpha) \subseteq \mathcal{U}) \wedge (\alpha \in K \Rightarrow N_{f(\alpha)}(\alpha) \subseteq \mathcal{V})]$. $V = L$ implica que $E = \{\alpha < \kappa \big| f \restriction \alpha = f_\alpha\} \subseteq A_f$ es estacionario. Ahora, no es difícil demostrar que $C = \{\alpha < \kappa \big| \alpha \text{ es límite} \wedge (\forall\beta < \alpha)[\beta \in \mathrm{dom}(\nu) \Rightarrow \nu(\beta) < \alpha]\}$ es un club en κ (aquí se utiliza fuertemente la regularidad de κ). Por ello hay un $\alpha \in E \cap C$.

Como $\alpha \in E$, entonces $f \restriction \alpha = f_\alpha$. Luego, como además $\alpha \in A_f$, entonces

$$\alpha \neq \overline{W(f,\alpha)} \cap \kappa = \overline{W(f_\alpha,\alpha)} \cap \kappa.$$

Esto implica que $\alpha \in \mathrm{dom}(\nu) = \{\beta < \kappa \big| \overline{W(f_\beta,\beta)} \cap (\kappa \setminus \beta) \neq \varnothing\}$. Ahora como $\alpha \in C$, entonces cuando pasamos por α en la construcción anterior, caímos en el primer caso. Por lo tanto:

O bien $\alpha \in \overline{W(H_\alpha, f_\alpha, \alpha)}$, en cuyo caso $\alpha \in K$,

o bien $\alpha \in \overline{W(K_\alpha, f_\alpha, \alpha)}$, en cuyo caso $\alpha \in H$.

Como $\alpha \in \overline{W(H, f_\alpha, \alpha)} \subseteq \mathcal{U}$ y $\alpha \in \overline{W(K, f_\alpha, \alpha)} \subseteq \mathcal{V}$, entonces o bien $\nu(\alpha) \in \overline{\mathcal{U}} \cap K$ o bien $\nu(\alpha) \in \overline{\mathcal{V}} \cap H$, lo cual es una contradicción.

Como $\alpha \in E$, entonces $f \restriction \alpha = f_\alpha$. Luego, como además $\alpha \in A_f$, entonces

$$\alpha \neq \overline{W(f,\alpha)} \cap \kappa = \overline{W(f_\alpha,\alpha)} \cap \kappa.$$

Esto implica que $\alpha \in \mathrm{dom}(\nu) = \{\beta < \kappa \big| \overline{W(f_\beta,\beta)} \cap (\kappa \setminus \beta) \neq \varnothing\}$. Ahora como $\alpha \in C$, entonces cuando pasamos por α en la construcción anterior, caímos en el primer caso. Por lo tanto:

O bien $\alpha \in \overline{W(H_\alpha, f_\alpha, \alpha)}$, en cuyo caso $\alpha \in K$,

o bien $\alpha \in \overline{W(K_\alpha, f_\alpha, \alpha)}$, en cuyo caso $\alpha \in H$.

Como $\alpha \in \overline{W(H, f_\alpha, \alpha)} \subseteq \mathcal{U}$ y $\alpha \in \overline{W(K, f_\alpha, \alpha)} \subseteq \mathcal{V}$, entonces o bien $\nu(\alpha) \in \overline{\mathcal{U}} \cap K$ o bien $\nu(\alpha) \in \overline{\mathcal{V}} \cap H$, lo cual es una contradicción.

Como $\alpha \in E$, entonces $f \restriction \alpha = f_\alpha$. Luego, como además $\alpha \in A_f$, entonces

$$\alpha \neq \overline{W(f,\alpha)} \cap \kappa = \overline{W(f_\alpha,\alpha)} \cap \kappa.$$

Esto implica que $\alpha \in \mathrm{dom}(\nu) = \{\beta < \kappa \big| \overline{W(f_\beta,\beta)} \cap (\kappa \setminus \beta) \neq \varnothing\}$. Ahora como $\alpha \in C$, entonces cuando pasamos por α en la construcción anterior, caímos en el primer caso. Por lo tanto:
O bien $\alpha \in \overline{W(H_\alpha, f_\alpha, \alpha)}$, en cuyo caso $\alpha \in K$,
o bien $\alpha \in \overline{W(K_\alpha, f_\alpha, \alpha)}$, en cuyo caso $\alpha \in H$.
Como $\alpha \in \overline{W(H, f_\alpha, \alpha)} \subseteq \mathcal{U}$ y $\alpha \in \overline{W(K, f_\alpha, \alpha)} \subseteq \mathcal{V}$, entonces o bien $\nu(\alpha) \in \overline{\mathcal{U}} \cap K$ o bien $\nu(\alpha) \in \overline{\mathcal{V}} \cap H$, lo cual es una contradicción.

Como $\alpha \in E$, entonces $f \restriction \alpha = f_\alpha$. Luego, como además $\alpha \in A_f$, entonces

$$\alpha \neq \overline{W(f, \alpha)} \cap \kappa = \overline{W(f_\alpha, \alpha)} \cap \kappa.$$

Esto implica que $\alpha \in \mathrm{dom}(\nu) = \{\beta < \kappa \big| \overline{W(f_\beta, \beta)} \cap (\kappa \setminus \beta) \neq \varnothing\}$. Ahora como $\alpha \in C$, entonces cuando pasamos por α en la construcción anterior, caímos en el primer caso. Por lo tanto:
O bien $\alpha \in \overline{W(H_\alpha, f_\alpha, \alpha)}$, en cuyo caso $\alpha \in K$,
o bien $\alpha \in \overline{W(K_\alpha, f_\alpha, \alpha)}$, en cuyo caso $\alpha \in H$.
Como $\alpha \in \overline{W(H, f_\alpha, \alpha)} \subseteq \mathcal{U}$ y $\alpha \in \overline{W(K, f_\alpha, \alpha)} \subseteq \mathcal{V}$, entonces o bien $\nu(\alpha) \in \overline{\mathcal{U}} \cap K$ o bien $\nu(\alpha) \in \overline{\mathcal{V}} \cap H$, lo cual es una contradicción.

Sólo resta el caso $\aleph_0 < \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$.

Para cada $\rho : (S \subseteq \kappa) \to \kappa$ uno a uno, definimos $V(f,\alpha) = \bigcup_{\substack{\rho(\beta)<\alpha \\ \beta \in S}} N_{f(\beta)}(\beta)$ y

$D(f,\alpha) = \overline{V(f,\alpha)} \cap \{\beta \in S \big| \rho(\beta) \geq \alpha\}$.

Definición

*Decimos que f es **gruesa con respecto a** S **y** ρ si $(\exists \alpha < \kappa)(|D(f,\alpha)| > \alpha)$. En caso contrario decimos que f es **delgada respecto a** S **y** ρ.*

Lema (GCH)

Para cualesquiera S y ρ existe una f delgada con respecto a S y ρ.

Demostración: En caso contrario, definiremos como antes H y K por inducción. Utilizaremos la función de Gödel $\alpha \mapsto \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ que es inversa de la biyección canónica $\kappa \times \kappa \to \kappa$ y que tiene la propiedad de que $\alpha < \max\{\alpha_1, \alpha_2\} + 1$.

Sólo resta el caso $\aleph_0 < \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$.
Para cada $\rho : (S \subseteq \kappa) \to \kappa$ uno a uno, definimos $V(f,\alpha) = \bigcup_{\substack{\rho(\beta)<\alpha \\ \beta\in S}} N_{f(\beta)}(\beta)$ y

$D(f,\alpha) = \overline{V(f,\alpha)} \cap \{\beta \in S \big| \rho(\beta) \geq \alpha\}$.

Definición

*Decimos que f es **gruesa con respecto a** S **y** ρ si $(\exists\alpha < \kappa)(|D(f,\alpha)| > \alpha)$. En caso contrario decimos que f es **delgada respecto a** S **y** ρ.*

Lema (GCH)

Para cualesquiera S y ρ existe una f delgada con respecto a S y ρ.

Demostración: En caso contrario, definiremos como antes H y K por inducción. Utilizaremos la función de Gödel $\alpha \mapsto \langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$ que es inversa de la biyección canónica $\kappa \times \kappa \to \kappa$ y que tiene la propiedad de que $\alpha < \max\{\alpha_1, \alpha_2\} + 1$.

Sólo resta el caso $\aleph_0 < \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$.
Para cada $\rho : (S \subseteq \kappa) \to \kappa$ uno a uno, definimos $V(f,\alpha) = \bigcup_{\substack{\rho(\beta)<\alpha \\ \beta \in S}} N_{f(\beta)}(\beta)$ y $D(f,\alpha) = \overline{V(f,\alpha)} \cap \{\beta \in S \big| \rho(\beta) \geq \alpha\}$.

Definición

*Decimos que f es **gruesa con respecto a** S **y** ρ si $(\exists\alpha < \kappa)(|D(f,\alpha)| > \alpha)$. En caso contrario decimos que f es **delgada respecto a** S **y** ρ.*

Lema (GCH)

Para cualesquiera S y ρ existe una f delgada con respecto a S y ρ.

Demostración: En caso contrario, definiremos como antes H y K por inducción. Utilizaremos la función de Gödel $\alpha \mapsto \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ que es inversa de la biyección canónica $\kappa \times \kappa \to \kappa$ y que tiene la propiedad de que $\alpha < \text{máx}\{\alpha_1, \alpha_2\} + 1$.

Sólo resta el caso $\aleph_0 < \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$.
Para cada $\rho : (S \subseteq \kappa) \to \kappa$ uno a uno, definimos $V(f,\alpha) = \bigcup_{\substack{\rho(\beta)<\alpha \\ \beta \in S}} N_{f(\beta)}(\beta)$ y

$D(f,\alpha) = \overline{V(f,\alpha)} \cap \{\beta \in S \big| \rho(\beta) \geq \alpha\}$.

Definición

*Decimos que f es **gruesa con respecto a** S **y** ρ si $(\exists \alpha < \kappa)(|D(f,\alpha)| > \alpha)$. En caso contrario decimos que f es **delgada respecto a** S **y** ρ.*

Lema (GCH)

Para cualesquiera S y ρ existe una f delgada con respecto a S y ρ.

Demostración: En caso contrario, definiremos como antes H y K por inducción. Utilizaremos la función de Gödel $\alpha \mapsto \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ que es inversa de la biyección canónica $\kappa \times \kappa \to \kappa$ y que tiene la propiedad de que $\alpha < \max\{\alpha_1, \alpha_2\} + 1$.

Sólo resta el caso $\aleph_0 < \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$.
Para cada $\rho : (S \subseteq \kappa) \to \kappa$ uno a uno, definimos $V(f, \alpha) = \bigcup_{\substack{\rho(\beta)<\alpha \\ \beta \in S}} N_{f(\beta)}(\beta)$ y

$D(f, \alpha) = \overline{V(f, \alpha)} \cap \{\beta \in S \big| \rho(\beta) \geq \alpha\}$.

Definición

*Decimos que f es **gruesa con respecto a** S **y** ρ si $(\exists \alpha < \kappa)(|D(f, \alpha)| > \alpha)$. En caso contrario decimos que f es **delgada respecto a** S **y** ρ.*

Lema (GCH)

Para cualesquiera S y ρ existe una f delgada con respecto a S y ρ.

Demostración: En caso contrario, definiremos como antes H y K por inducción. Utilizaremos la función de Gödel $\alpha \mapsto \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ que es inversa de la biyección canónica $\kappa \times \kappa \to \kappa$ y que tiene la propiedad de que $\alpha < \max\{\alpha_1, \alpha_2\} + 1$.

Para cada $\alpha < \kappa$ ordenamos ${}^{\alpha}\omega$. Comenzamos con $H_0 = K_0 = \varnothing$; si γ es límite, entonces $H_\gamma = \bigcup\limits_{\beta<\gamma} H_\beta$ y $K_\gamma = \bigcup\limits_{\beta<\gamma} K_\beta$. Ahora, si ya conocemos H_α y K_α entonces consideraremos, si tiene sentido, a f, el α-ésimo elemento de ${}^{\alpha_2}\omega$ y nos fijamos si hay un $\beta \in D(f, \alpha_2) \setminus (H_\alpha \cup K_\alpha)$. Si sí, como $\beta \in \overline{V(f,\alpha)}$ entonces o bien $\beta \in= \overline{\bigcup\limits_{\substack{\rho(\beta)\\ \beta\in H_\alpha}} N_{f(\beta)}(\beta)}$, en cuyo caso hacemos $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup \{\beta\}$ y $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup (\rho^{-1}(\{\alpha\}) \setminus K_{\alpha+1})$, en caso contrario tenemos que $\beta \in= \overline{\bigcup\limits_{\substack{\rho(\beta)\\ \beta\in K_\alpha}} N_{f(\beta)}(\beta)}$ y hacemos $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup \{\beta\}$, $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup (\rho^{-1}(\{\alpha\}) \setminus H_{\alpha+1})$. Al final, hacemos $H = \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} H_\alpha$ y $K = \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} K_\alpha$. Tenemos que $H \cap K = \varnothing$ y $S = H \cup K$, al ser ambos cerrados hay una separación por abiertos $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ disjuntos con $H \subseteq \mathcal{U}$ y $K \subseteq \mathcal{V}$.

Para cada $\alpha < \kappa$ ordenamos ${}^{\alpha}\omega$. Comenzamos con $H_0 = K_0 = \varnothing$; si γ es límite, entonces $H_\gamma = \bigcup\limits_{\beta<\gamma} H_\beta$ y $K_\gamma = \bigcup\limits_{\beta<\gamma} K_\beta$. Ahora, si ya conocemos H_α y K_α entonces consideraremos, si tiene sentido, a f, el α-ésimo elemento de ${}^{\alpha_2}\omega$ y nos fijamos si hay un $\beta \in D(f, \alpha_2) \setminus (H_\alpha \cup K_\alpha)$. Si sí, como $\beta \in \overline{V(f,\alpha)}$ entonces o bien $\beta \in= \overline{\bigcup\limits_{\substack{\rho(\beta)\\ \beta\in H_\alpha}} N_{f(\beta)}(\beta)}$, en cuyo caso hacemos $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup \{\beta\}$ y $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup (\rho^{-1}(\{\alpha\}) \setminus K_{\alpha+1})$, en caso contrario tenemos que $\beta \in= \overline{\bigcup\limits_{\substack{\rho(\beta)\\ \beta\in K_\alpha}} N_{f(\beta)}(\beta)}$ y hacemos $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup \{\beta\}$, $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup (\rho^{-1}(\{\alpha\}) \setminus H_{\alpha+1})$. Al final, hacemos $H = \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} H_\alpha$ y $K = \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} K_\alpha$. Tenemos que $H \cap K = \varnothing$ y $S = H \cup K$, al ser ambos cerrados hay una separación por abiertos $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ disjuntos con $H \subseteq \mathcal{U}$ y $K \subseteq \mathcal{V}$.

Para cada $\alpha < \kappa$ ordenamos ${}^{\alpha}\omega$. Comenzamos con $H_0 = K_0 = \varnothing$; si γ es límite, entonces $H_\gamma = \bigcup\limits_{\beta<\gamma} H_\beta$ y $K_\gamma = \bigcup\limits_{\beta<\gamma} K_\beta$. Ahora, si ya conocemos H_α y K_α entonces consideraremos, si tiene sentido, a f, el α-ésimo elemento de ${}^{\alpha_2}\omega$ y nos fijamos si hay un $\beta \in D(f, \alpha_2) \setminus (H_\alpha \cup K_\alpha)$. Si sí, como $\beta \in \overline{V(f, \alpha)}$ entonces o bien $\beta \in= \overline{\bigcup\limits_{\substack{\rho(\beta) \\ \beta \in H_\alpha}} N_{f(\beta)}(\beta)}$, en cuyo caso hacemos $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup \{\beta\}$ y $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup (\rho^{-1}(\{\alpha\}) \setminus K_{\alpha+1})$, en caso contrario tenemos que $\beta \in= \overline{\bigcup\limits_{\substack{\rho(\beta) \\ \beta \in K_\alpha}} N_{f(\beta)}(\beta)}$ y hacemos $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup \{\beta\}$, $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup (\rho^{-1}(\{\alpha\}) \setminus H_{\alpha+1})$. Al final, hacemos $H = \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} H_\alpha$ y $K = \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} K_\alpha$. Tenemos que $H \cap K = \varnothing$ y $S = H \cup K$, al ser ambos cerrados hay una separación por abiertos $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ disjuntos con $H \subseteq \mathcal{U}$ y $K \subseteq \mathcal{V}$.

Para cada $\alpha < \kappa$ ordenamos ${}^{\alpha}\omega$. Comenzamos con $H_0 = K_0 = \varnothing$; si γ es límite, entonces $H_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} H_\beta$ y $K_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} K_\beta$. Ahora, si ya conocemos H_α y K_α entonces consideraremos, si tiene sentido, a f, el α-ésimo elemento de ${}^{\alpha_2}\omega$ y nos fijamos si hay un $\beta \in D(f, \alpha_2) \setminus (H_\alpha \cup K_\alpha)$. Si sí, como $\beta \in \overline{V(f, \alpha)}$ entonces o bien $\beta \in= \overline{\bigcup_{\substack{\rho(\beta) \\ \beta \in H_\alpha}} N_{f(\beta)}(\beta)}$, en cuyo caso hacemos $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup \{\beta\}$ y $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup (\rho^{-1}(\{\alpha\}) \setminus K_{\alpha+1})$, en caso contrario tenemos que $\beta \in= \overline{\bigcup_{\substack{\rho(\beta) \\ \beta \in K_\alpha}} N_{f(\beta)}(\beta)}$ y hacemos $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup \{\beta\}$, $K_{\alpha+1} = K_\alpha \cup (\rho^{-1}(\{\alpha\}) \setminus H_{\alpha+1})$. Al final, hacemos $H = \bigcup_{\alpha<\kappa} H_\alpha$ y $K = \bigcup_{\alpha<\kappa} K_\alpha$. Tenemos que $H \cap K = \varnothing$ y $S = H \cup K$, al ser ambos cerrados hay una separación por abiertos $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ disjuntos con $H \subseteq \mathcal{U}$ y $K \subseteq \mathcal{V}$.

Sea g un refinamiento de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$.
Por el grosor de g hay un $\alpha < \kappa$ tal que $|D(f \upharpoonright, \alpha)| > |\alpha|$. Por GCH, tenemos que $|{}^{\alpha}\omega| = 2^{|\alpha|} = |\alpha|^+$. Así, hay un $\beta < |\alpha|^+$ y un γ tal que bajo la función de Gödel, $\gamma \mapsto \langle \beta, \alpha \rangle$ y $f \upharpoonright \alpha$ es el elemento β-ésimo de ${}^{\alpha}\omega$.
Así, $\gamma < \text{máx}\{\beta, \alpha\} + 1$, por tanto $|\gamma| \leq |\alpha|$ y, dado que $|H\gamma \cup K_\gamma| = |\gamma| \leq |\alpha|$ entonces hay elementos de $D(f, \alpha) \setminus (H_\gamma \cup K_\gamma)$, luego en esa etapa del proceso inductivo habíamos “destruido" esta separación, lo cual es contradictorio. $\square$

Ahora debemos escoger ciertos S y ρ con cuidado. Como κ es singular, hay un conjunto de cardinales $C = \{c_\alpha \big| \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ que es club en κ, y $(\forall \alpha < \text{cf}(\kappa))(c_\alpha > \text{cf}(\kappa))$. Sea $B_\alpha = \{\gamma \big| (\exists \delta < c_\alpha)(\gamma = \text{cf}(\kappa) \cdot \delta + \alpha)\}$. Entonces los B_α son disjuntos, $B_\alpha \subseteq C_\alpha$ y $|B_\alpha| = c_\alpha$.

Lema (GCH)

Para $\aleph_0 < \text{cf}(\kappa) < \kappa \in \text{Card}$, X *es* κ*-CWH.*

Sea g un refinamiento de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$.
Por el grosor de g hay un $\alpha < \kappa$ tal que $|D(f \restriction, \alpha)| > |\alpha|$. Por GCH, tenemos que $|{}^{\alpha}\omega| = 2^{|\alpha|} = |\alpha|^{+}$. Así, hay un $\beta < |\alpha|^{+}$ y un γ tal que bajo la función de Gödel, $\gamma \mapsto \langle \beta, \alpha \rangle$ y $f \restriction \alpha$ es el elemento β-ésimo de ${}^{\alpha}\omega$.
Así, $\gamma < \max\{\beta, \alpha\} + 1$, por tanto $|\gamma| \leq |\alpha|$ y, dado que $|H\gamma \cup K_\gamma| = |\gamma| \leq |\alpha|$ entonces hay elementos de $D(f, \alpha) \setminus (H_\gamma \cup K_\gamma)$, luego en esa etapa del proceso inductivo habíamos "destruido" esta separación, lo cual es contradictorio. $\square$

Ahora debemos escoger ciertos S y ρ con cuidado. Como κ es singular, hay un conjunto de cardinales $C = \{c_\alpha \big| \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ que es club en κ, y $(\forall \alpha < \mathrm{cf}(\kappa))(c_\alpha > \mathrm{cf}(\kappa))$. Sea $B_\alpha = \{\gamma \big| (\exists \delta < c_\alpha)(\gamma = \mathrm{cf}(\kappa) \cdot \delta + \alpha)\}$.
Entonces los B_α son disjuntos, $B_\alpha \subseteq C_\alpha$ y $|B_\alpha| = c_\alpha$.

Lema (GCH)

Para $\aleph_0 < \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa \in \mathrm{Card}$, X *es* κ*-CWH.*

Sea g un refinamiento de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$.
Por el grosor de g hay un $\alpha < \kappa$ tal que $|D(f \restriction, \alpha)| > |\alpha|$. Por GCH, tenemos que $|{}^{\alpha}\omega| = 2^{|\alpha|} = |\alpha|^{+}$. Así, hay un $\beta < |\alpha|^{+}$ y un γ tal que bajo la función de Gödel, $\gamma \mapsto \langle \beta, \alpha \rangle$ y $f \restriction \alpha$ es el elemento β-ésimo de ${}^{\alpha}\omega$.
Así, $\gamma < \max\{\beta, \alpha\} + 1$, por tanto $|\gamma| \leq |\alpha|$ y, dado que $|H\gamma \cup K_{\gamma}| = |\gamma| \leq |\alpha|$ entonces hay elementos de $D(f, \alpha) \setminus (H_{\gamma} \cup K_{\gamma})$, luego en esa etapa del proceso inductivo habíamos “destruido" esta separación, lo cual es contradictorio. $\square$

Ahora debemos escoger ciertos S y ρ con cuidado. Como κ es singular, hay un conjunto de cardinales $C = \{c_{\alpha} \big| \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ que es club en κ, y $(\forall \alpha < \mathrm{cf}(\kappa))(c_{\alpha} > \mathrm{cf}(\kappa))$. Sea $B_{\alpha} = \{\gamma \big| (\exists \delta < c_{\alpha})(\gamma = \mathrm{cf}(\kappa) \cdot \delta + \alpha)\}$. Entonces los B_{α} son disjuntos, $B_{\alpha} \subseteq C_{\alpha}$ y $|B_{\alpha}| = c_{\alpha}$.

Lema (GCH)

Para $\aleph_0 < \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa \in \mathrm{Card}$, X es κ-CWH.

Sea g un refinamiento de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$.
Por el grosor de g hay un $\alpha < \kappa$ tal que $|D(f \restriction, \alpha)| > |\alpha|$. Por GCH, tenemos que $|{}^{\alpha}\omega| = 2^{|\alpha|} = |\alpha|^{+}$. Así, hay un $\beta < |\alpha|^{+}$ y un γ tal que bajo la función de Gödel, $\gamma \mapsto \langle \beta, \alpha \rangle$ y $f \restriction \alpha$ es el elemento β-ésimo de ${}^{\alpha}\omega$.
Así, $\gamma < \max\{\beta, \alpha\} + 1$, por tanto $|\gamma| \leq |\alpha|$ y, dado que $|H\gamma \cup K_{\gamma}| = |\gamma| \leq |\alpha|$ entonces hay elementos de $D(f, \alpha) \setminus (H_{\gamma} \cup K_{\gamma})$, luego en esa etapa del proceso inductivo habíamos "destruido" esta separación, lo cual es contradictorio. $\square$

Ahora debemos escoger ciertos S y ρ con cuidado. Como κ es singular, hay un conjunto de cardinales $C = \{c_{\alpha} \big| \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ que es club en κ, y $(\forall \alpha < \mathrm{cf}(\kappa))(c_{\alpha} > \mathrm{cf}(\kappa))$. Sea $B_{\alpha} = \{\gamma \big| (\exists \delta < c_{\alpha})(\gamma = \mathrm{cf}(\kappa) \cdot \delta + \alpha)\}$.
Entonces los B_{α} son disjuntos, $B_{\alpha} \subseteq C_{\alpha}$ y $|B_{\alpha}| = c_{\alpha}$.

Lema (GCH)

Para $\aleph_0 < \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa \in \mathrm{Card}$, X *es* κ*-CWH.*

Sea g un refinamiento de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$.
Por el grosor de g hay un $\alpha < \kappa$ tal que $|D(f \restriction, \alpha)| > |\alpha|$. Por GCH, tenemos que $|{}^{\alpha}\omega| = 2^{|\alpha|} = |\alpha|^{+}$. Así, hay un $\beta < |\alpha|^{+}$ y un γ tal que bajo la función de Gödel, $\gamma \mapsto \langle \beta, \alpha \rangle$ y $f \restriction \alpha$ es el elemento β-ésimo de ${}^{\alpha}\omega$.
Así, $\gamma < \max\{\beta, \alpha\} + 1$, por tanto $|\gamma| \leq |\alpha|$ y, dado que $|H\gamma \cup K_{\gamma}| = |\gamma| \leq |\alpha|$ entonces hay elementos de $D(f, \alpha) \setminus (H_{\gamma} \cup K_{\gamma})$, luego en esa etapa del proceso inductivo habíamos “destruido" esta separación, lo cual es contradictorio. $\square$
Ahora debemos escoger ciertos S y ρ con cuidado. Como κ es singular, hay un conjunto de cardinales $C = \{c_{\alpha} \big| \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ que es club en κ, y $(\forall \alpha < \mathrm{cf}(\kappa))(c_{\alpha} > \mathrm{cf}(\kappa))$. Sea $B_{\alpha} = \{\gamma \big| (\exists \delta < c_{\alpha})(\gamma = \mathrm{cf}(\kappa) \cdot \delta + \alpha)\}$.
Entonces los B_{α} son disjuntos, $B_{\alpha} \subseteq C_{\alpha}$ y $|B_{\alpha}| = c_{\alpha}$.

Lema (GCH)

Para $\aleph_0 < \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa \in \mathrm{Card}$, X *es* κ*-CWH.*

Demostración: Para $i < \omega$, definimos S_i, ρ_i, f_i. Comenzamos haciendo $S_0 = \kappa$, $\rho_0 = \mathrm{id}_\kappa$. Siempre escogeremos una f_i delgada con respecto de S_i y ρ_i.
Hacemos $S_{i+1} = \bigcup_{\alpha \in C} D(f_i, \alpha)$. Por la delgadez de f_i, $|D(f_i, \alpha)| \leq \alpha$, al ser $|B_\alpha| = c_\alpha \geq |D(f_i, c_\alpha)|$ entonces hay funciones inyectivas $f : D(f_i, \alpha) \hookrightarrow B_\alpha$, las unimos para obtener $\rho_{i+1} : S_{i+1} \hookrightarrow \kappa$.
Así, si $\beta \in D(f_i, \alpha)$ entonces $\rho_{i+1}(\beta) < \alpha \leq \rho_i(\beta)$ por la definición de $D(f_i, \alpha)$.
Al no haber sucesiones infinitamente descendientes de ordinales, $\bigcap_{i<\omega} S_i = \varnothing$.
Luego $\kappa = \bigcup_{1<\omega} (S_i \setminus S_{i+1})$, es unión de una familia discreta numerable de cerrados, la cual por consiguiente puede separarse. Por lo tanto basta demostrar que podemos separar a los conjuntos discretos $S_i \setminus S_{i+1}$. Desde luego, esto sólo presenta dificultad cuando $|S_i \setminus S_{i+1}| = \kappa$.Pero en este caso, C seguirá siendo club en $S_i \setminus S_{i+1}$, y para cada $\alpha \in C$, tendremos que $V(f_i, \alpha) \cap (S_i \setminus S_{i+1}) = \rho_i(\alpha)$ debido a que si $x \notin S_{i+1}$ esto significa que $\rho_i(x) < \alpha$ para cada $\alpha \in C$. Luego el conjunto $\{\alpha \in S_i \setminus S_{i+1} \big| \overline{V(f_i, \alpha)} \cap (S_i \setminus S_{i+1}) \neq \alpha\}$ no es estacionario; por una ligera modificación de un argumento anterior, $S_i \setminus S_{i+1}$ admite una separación.
Por lo tanto todo el conjunto κ admite una separación. $\square$

DEMOSTRACIÓN: Para $i < \omega$, definimos S_i, ρ_i, f_i. Comenzamos haciendo $S_0 = \kappa$, $\rho_0 = \mathrm{id}_\kappa$. Siempre escogeremos una f_i delgada con respecto de S_i y ρ_i. Hacemos $S_{i+1} = \bigcup_{\alpha \in C} D(f_i, \alpha)$. Por la delgadez de f_i, $|D(f_i, \alpha)| \leq \alpha$, al ser $|B_\alpha| = c_\alpha \geq |D(f_i, c_\alpha)|$ entonces hay funciones inyectivas $f : D(f_i, \alpha) \hookrightarrow B_\alpha$, las unimos para obtener $\rho_{i+1} : S_{i+1} \hookrightarrow \kappa$.

Así, si $\beta \in D(f_i, \alpha)$ entonces $\rho_{i+1}(\beta) < \alpha \leq \rho_i(\beta)$ por la definición de $D(f_i, \alpha)$. Al no haber sucesiones infinitamente descendientes de ordinales, $\bigcap_{i<\omega} S_i = \varnothing$.

Luego $\kappa = \bigcup_{1<\omega} (S_i \setminus S_{i+1})$, es unión de una familia discreta numerable de cerrados, la cual por consiguiente puede separarse. Por lo tanto basta demostrar que podemos separar a los conjuntos discretos $S_i \setminus S_{i+1}$. Desde luego, esto sólo presenta dificultad cuando $|S_i \setminus S_{i+1}| = \kappa$.Pero en este caso, C seguirá siendo club en $S_i \setminus S_{i+1}$, y para cada $\alpha \in C$, tendremos que $V(f_i, \alpha) \cap (S_i \setminus S_{i+1}) = \rho_i(\alpha)$ debido a que si $x \notin S_{i+1}$ esto significa que $\rho_i(x) < \alpha$ para cada $\alpha \in C$. Luego el conjunto $\{\alpha \in S_i \setminus S_{i+1} \big| \overline{V(f_i, \alpha)} \cap (S_i \setminus S_{i+1}) \neq \alpha\}$ no es estacionario; por una ligera modificación de un argumento anterior, $S_i \setminus S_{i+1}$ admite una separación.

Por lo tanto todo el conjunto κ admite una separación. $\square$

Demostración: Para $i < \omega$, definimos S_i, ρ_i, f_i. Comenzamos haciendo $S_0 = \kappa$, $\rho_0 = \mathrm{id}_\kappa$. Siempre escogeremos una f_i delgada con respecto de S_i y ρ_i.
Hacemos $S_{i+1} = \bigcup_{\alpha \in C} D(f_i, \alpha)$. Por la delgadez de f_i, $|D(f_i, \alpha)| \leq \alpha$, al ser $|B_\alpha| = c_\alpha \geq |D(f_i, c_\alpha)|$ entonces hay funciones inyectivas $f : D(f_i, \alpha) \hookrightarrow B_\alpha$, las unimos para obtener $\rho_{i+1} : S_{i+1} \hookrightarrow \kappa$.
Así, si $\beta \in D(f_i, \alpha)$ entonces $\rho_{i+1}(\beta) < \alpha \leq \rho_i(\beta)$ por la definición de $D(f_i, \alpha)$.
Al no haber sucesiones infinitamente descendientes de ordinales, $\bigcap_{i<\omega} S_i = \varnothing$.
Luego $\kappa = \bigcup_{1<\omega} (S_i \setminus S_{i+1})$, es unión de una familia discreta numerable de cerrados, la cual por consiguiente puede separarse. Por lo tanto basta demostrar que podemos separar a los conjuntos discretos $S_i \setminus S_{i+1}$. Desde luego, esto sólo presenta dificultad cuando $|S_i \setminus S_{i+1}| = \kappa$.Pero en este caso, C seguirá siendo club en $S_i \setminus S_{i+1}$, y para cada $\alpha \in C$, tendremos que $V(f_i, \alpha) \cap (S_i \setminus S_{i+1}) = \rho_i(\alpha)$ debido a que si $x \notin S_{i+1}$ esto significa que $\rho_i(x) < \alpha$ para cada $\alpha \in C$. Luego el conjunto $\{\alpha \in S_i \setminus S_{i+1} \big| \overline{V(f_i, \alpha)} \cap (S_i \setminus S_{i+1}) \neq \alpha\}$ no es estacionario; por una ligera modificación de un argumento anterior, $S_i \setminus S_{i+1}$ admite una separación.
Por lo tanto todo el conjunto κ admite una separación. $\square$

Demostración: Para $i < \omega$, definimos S_i, ρ_i, f_i. Comenzamos haciendo $S_0 = \kappa$, $\rho_0 = \mathrm{id}_\kappa$. Siempre escogeremos una f_i delgada con respecto de S_i y ρ_i.
Hacemos $S_{i+1} = \bigcup_{\alpha \in C} D(f_i, \alpha)$. Por la delgadez de f_i, $|D(f_i, \alpha)| \leq \alpha$, al ser $|B_\alpha| = c_\alpha \geq |D(f_i, c_\alpha)|$ entonces hay funciones inyectivas $f : D(f_i, \alpha) \hookrightarrow B_\alpha$, las unimos para obtener $\rho_{i+1} : S_{i+1} \hookrightarrow \kappa$.
Así, si $\beta \in D(f_i, \alpha)$ entonces $\rho_{i+1}(\beta) < \alpha \leq \rho_i(\beta)$ por la definición de $D(f_i, \alpha)$.
Al no haber sucesiones infinitamente descendientes de ordinales, $\bigcap_{i<\omega} S_i = \varnothing$.
Luego $\kappa = \bigcup_{1<\omega} (S_i \setminus S_{i+1})$, es unión de una familia discreta numerable de cerrados, la cual por consiguiente puede separarse. Por lo tanto basta demostrar que podemos separar a los conjuntos discretos $S_i \setminus S_{i+1}$. Desde luego, esto sólo presenta dificultad cuando $|S_i \setminus S_{i+1}| = \kappa$. Pero en este caso, C seguirá siendo club en $S_i \setminus S_{i+1}$, y para cada $\alpha \in C$, tendremos que $V(f_i, \alpha) \cap (S_i \setminus S_{i+1}) = \rho_i(\alpha)$ debido a que si $x \notin S_{i+1}$ esto significa que $\rho_i(x) < \alpha$ para cada $\alpha \in C$. Luego el conjunto $\{\alpha \in S_i \setminus S_{i+1} \big| \overline{V(f_i, \alpha)} \cap (S_i \setminus S_{i+1}) \neq \alpha\}$ no es estacionario; por una ligera modificación de un argumento anterior, $S_i \setminus S_{i+1}$ admite una separación.
Por lo tanto todo el conjunto κ admite una separación. $\square$

Demostración: Para $i < \omega$, definimos S_i, ρ_i, f_i. Comenzamos haciendo $S_0 = \kappa$, $\rho_0 = \mathrm{id}_\kappa$. Siempre escogeremos una f_i delgada con respecto de S_i y ρ_i.
Hacemos $S_{i+1} = \bigcup_{\alpha \in C} D(f_i, \alpha)$. Por la delgadez de f_i, $|D(f_i, \alpha)| \leq \alpha$, al ser $|B_\alpha| = c_\alpha \geq |D(f_i, c_\alpha)|$ entonces hay funciones inyectivas $f : D(f_i, \alpha) \hookrightarrow B_\alpha$, las unimos para obtener $\rho_{i+1} : S_{i+1} \hookrightarrow \kappa$.
Así, si $\beta \in D(f_i, \alpha)$ entonces $\rho_{i+1}(\beta) < \alpha \leq \rho_i(\beta)$ por la definición de $D(f_i, \alpha)$.
Al no haber sucesiones infinitamente descendientes de ordinales, $\bigcap_{i<\omega} S_i = \varnothing$.
Luego $\kappa = \bigcup_{1<\omega} (S_i \setminus S_{i+1})$, es unión de una familia discreta numerable de cerrados, la cual por consiguiente puede separarse. Por lo tanto basta demostrar que podemos separar a los conjuntos discretos $S_i \setminus S_{i+1}$. Desde luego, esto sólo presenta dificultad cuando $|S_i \setminus S_{i+1}| = \kappa$.Pero en este caso, C seguirá siendo club en $S_i \setminus S_{i+1}$, y para cada $\alpha \in C$, tendremos que $V(f_i, \alpha) \cap (S_i \setminus S_{i+1}) = \rho_i(\alpha)$ debido a que si $x \notin S_{i+1}$ esto significa que $\rho_i(x) < \alpha$ para cada $\alpha \in C$. Luego el conjunto $\{\alpha \in S_i \setminus S_{i+1} | \overline{V(f_i, \alpha)} \cap (S_i \setminus S_{i+1}) \neq \alpha\}$ no es estacionario; por una ligera modificación de un argumento anterior, $S_i \setminus S_{i+1}$ admite una separación.
Por lo tanto todo el conjunto κ admite una separación. $\square$

Demostración: Para $i < \omega$, definimos S_i, ρ_i, f_i. Comenzamos haciendo $S_0 = \kappa$, $\rho_0 = \mathrm{id}_\kappa$. Siempre escogeremos una f_i delgada con respecto de S_i y ρ_i.
Hacemos $S_{i+1} = \bigcup\limits_{\alpha \in C} D(f_i, \alpha)$. Por la delgadez de f_i, $|D(f_i,\alpha)| \leq \alpha$, al ser $|B_\alpha| = c_\alpha \geq |D(f_i, c_\alpha)|$ entonces hay funciones inyectivas $f : D(f_i,\alpha) \hookrightarrow B_\alpha$, las unimos para obtener $\rho_{i+1} : S_{i+1} \hookrightarrow \kappa$.
Así, si $\beta \in D(f_i,\alpha)$ entonces $\rho_{i+1}(\beta) < \alpha \leq \rho_i(\beta)$ por la definición de $D(f_i,\alpha)$.
Al no haber sucesiones infinitamente descendientes de ordinales, $\bigcap\limits_{i<\omega} S_i = \varnothing$.
Luego $\kappa = \bigcup\limits_{1<\omega} (S_i \setminus S_{i+1})$, es unión de una familia discreta numerable de cerrados, la cual por consiguiente puede separarse. Por lo tanto basta demostrar que podemos separar a los conjuntos discretos $S_i \setminus S_{i+1}$. Desde luego, esto sólo presenta dificultad cuando $|S_i \setminus S_{i+1}| = \kappa$.Pero en este caso, C seguirá siendo club en $S_i \setminus S_{i+1}$, y para cada $\alpha \in C$, tendremos que $V(f_i,\alpha) \cap (S_i \setminus S_{i+1}) = \rho_i(\alpha)$ debido a que si $x \notin S_{i+1}$ esto significa que $\rho_i(x) < \alpha$ para cada $\alpha \in C$. Luego el conjunto $\{\alpha \in S_i \setminus S_{i+1} | \overline{V(f_i,\alpha)} \cap (S_i \setminus S_{i+1}) \neq \alpha\}$ no es estacionario; por una ligera modificación de un argumento anterior, $S_i \setminus S_{i+1}$ admite una separación.
Por lo tanto todo el conjunto κ admite una separación. $\square$

Devlin, Keith J., *The Axiom of Constructibility. A Guide for the Mathematician*, Lecture Notes in Mathematics (617) Springer-Verlag, 1970.

Fleissner, William, “Moore Spaces in the Constructible Universe"; *Proceedings of the American Mathematical Society*; **46**-2 (1974), 294-298.

Gödel, Kurt; *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*; Annals of mathematics studies vol. 3. Princeton, 1940. Aparece en *Kurt Gödel, Collected Works vol. II*, ed. Solomon Feferman et. al. Oxford University Press, New York, 1990, pp. 1-101.

Hrbacek, Karel y Jech, Thomas; *Introduction to set theory.* 3rd. ed., Pure and Applied Mathematics (220), Marcel Dekker, 1999.

Steen, Lynn Arthur y Seebach, Jr., J. Arthur. *Counterexamples in Topology*. Dover, 1995.

Devlin, Keith J., *The Axiom of Constructibility. A Guide for the Mathematician*, Lecture Notes in Mathematics (617) Springer-Verlag, 1970.

Fleissner, William, “Moore Spaces in the Constructible Universe"; *Proceedings of the American Mathematical Society*; **46**-2 (1974), 294-298.

Gödel, Kurt; *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*; Annals of mathematics studies vol. 3. Princeton, 1940. Aparece en *Kurt Gödel, Collected Works vol. II*, ed. Solomon Feferman et. al. Oxford University Press, New York, 1990, pp. 1-101.

Hrbacek, Karel y Jech, Thomas; *Introduction to set theory*. 3rd. ed., Pure and Applied Mathematics (220), Marcel Dekker, 1999.

Steen, Lynn Arthur y Seebach, Jr., J. Arthur. *Counterexamples in Topology*. Dover, 1995.

Devlin, Keith J., *The Axiom of Constructibility. A Guide for the Mathematician*, Lecture Notes in Mathematics (617) Springer-Verlag, 1970.

Fleissner, William, “Moore Spaces in the Constructible Universe"; *Proceedings of the American Mathematical Society*; **46**-2 (1974), 294-298.

Gödel, Kurt; *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*; Annals of mathematics studies vol. 3. Princeton, 1940. Aparece en *Kurt Gödel, Collected Works vol. II*, ed. Solomon Feferman et. al. Oxford University Press, New York, 1990, pp. 1-101.

Hrbacek, Karel y Jech, Thomas; *Introduction to set theory.* 3rd. ed., Pure and Applied Mathematics (220), Marcel Dekker, 1999.

Steen, Lynn Arthur y Seebach, Jr., J. Arthur. *Counterexamples in Topology*. Dover, 1995.

Devlin, Keith J., *The Axiom of Constructibility. A Guide for the Mathematician*, Lecture Notes in Mathematics (617) Springer-Verlag, 1970.

Fleissner, William, “Moore Spaces in the Constructible Universe"; *Proceedings of the American Mathematical Society*; **46**-2 (1974), 294-298.

Gödel, Kurt; *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*; Annals of mathematics studies vol. 3. Princeton, 1940. Aparece en *Kurt Gödel, Collected Works vol. II*, ed. Solomon Feferman et. al. Oxford University Press, New York, 1990, pp. 1-101.

Hrbacek, Karel y Jech, Thomas; *Introduction to set theory.* 3rd. ed., Pure and Applied Mathematics (220), Marcel Dekker, 1999.

Steen, Lynn Arthur y Seebach, Jr., J. Arthur. *Counterexamples in Topology*. Dover, 1995.

- Devlin, Keith J., *The Axiom of Constructibility. A Guide for the Mathematician*, Lecture Notes in Mathematics (617) Springer-Verlag, 1970.
- Fleissner, William, “Moore Spaces in the Constructible Universe"; *Proceedings of the American Mathematical Society*; **46**-2 (1974), 294-298.
- Gödel, Kurt; *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*; Annals of mathematics studies vol. 3. Princeton, 1940. Aparece en *Kurt Gödel, Collected Works vol. II*, ed. Solomon Feferman et. al. Oxford University Press, New York, 1990, pp. 1-101.
- Hrbacek, Karel y Jech, Thomas; *Introduction to set theory.* 3rd. ed., Pure and Applied Mathematics (220), Marcel Dekker, 1999.
- Steen, Lynn Arthur y Seebach, Jr., J. Arthur. *Counterexamples in Topology*. Dover, 1995.