



Escuela Superior de Física y Matemáticas
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

LA COMPACTACIÓN DE ČECH-STONE COMO
HERRAMIENTA PARA PROBAR RESULTADOS DE
COMBINATORIA Y ANÁLISIS.

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Presentada por
Jesús Alberto Flores Hinostrosa

Asesor de tesis
Dr. David José Fernández Bretón

Noviembre 2025

Agradecimientos

Este trabajo es producto de mucha paciencia y apoyo por parte de varias personas. Agradezco enormemente al Dr. David por guiarme desde mis años cursando en la licenciatura y por mostrarme una pequeña parte de su vasto conocimiento para comprender los complicados conceptos involucrados en este trabajo. Agradezco al Dr. Egor por sus sugerencias de estilo, que impactaron enormemente en este texto, así como por inspirarme a estudiar temas de análisis funcional y por ser fundamental en mi paso hacia la maestría. Agradezco al M. en C. Gamaliel por sus correcciones, especialmente respecto a la unicidad de la compactación de Čech-Stone y por introducirme en temas avanzados de topología durante la licenciatura. Agradezco al Dr. Pablo y la Dra. Miriam por sus correcciones, que ayudaron a mejorar sustancialmente este trabajo.

CARTA CESIÓN DE DERECHOS AL IPN

Ciudad de México a 10 de diciembre de 2025.

El que suscribe:

C. Jesús Alberto Flores Hinostrosa con número de boleta 2019330284.

Egresado del Programa Académico: Licenciatura en Física y Matemáticas

que se imparte en la Escuela Superior de Física y Matemáticas, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de tesis titulado:

La compactación de Čech-Stone como herramienta para probar resultados de combinatoria y análisis

El cual fue desarrollado bajo la dirección de: David José Fernández Bretón

Por lo anterior es mi interés manifestar que **SI** cedo los derechos del trabajo antes mencionado, al Instituto Politécnico Nacional, ello con el propósito de que lo ponga a disposición de la comunidad politécnica que requiera consultarlo con fines académicos y de investigación. Es importante aclarar que los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Dicho permiso puede ser solicitado a la siguiente dirección de correo electrónico: jfloreshinostrosa@gmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Atentamente

Jesús Alberto Flores Hinostrosa



Nombre y firma del alumno



Secretaría Académica
Dirección de Educación Superior
Escuela Superior de Física y Matemáticas

Folio

SeAca-DES-ESFM-SAC-T-394 -2025

Asunto

Autorización de impresión

90 Años de la Creación del Consejo Técnico de la Escuela Politécnica Nacional
90 Aniversario del CECyT 9 "Juan de Dios Bátiz"
50 Aniversario del CICS, Unidad Milpa Alta
25 Aniversario del CICS, Unidad Santo Tomás y del CICATA, Unidad Altamira
20 Aniversario de la Defensoría de los Derechos Politécnicos

Ciudad de México, 10 de diciembre de 2025

**C. JESUS ALBERTO FLORES HINOSTROSA
PASANTE DE LA LICENCIATURA EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS
PRESENTE**

Sirva este medio para informarle que derivado de que ha concluido exitosamente el desarrollo de su trabajo, bajo la asesoría del **DR. DAVID JOSÉ FERNÁNDEZ BRETÓN**, como su asesor de tesis, tengo a bien autorizar la versión final del trabajo de tesis profesional desarrollado por usted, denominado: "**La compactación de Čech-Stone como herramienta para probar resultados de combinatoria y análisis**".

Es importante **integrar** en su trabajo, después de los agradecimientos, la carta de cesión de derechos del IPN, cuyo formato podrán descargar en la siguiente dirección electrónica: <https://www.esfm.ipn.mx/estudiantes/titulacion.html>

Después de integrar la cesión de derechos, deberás añadir este oficio de autorización de impresión.

Posteriormente se deberá entregar a esta subdirección, la versión final digitalizada en formato PDF.

De manera adicional deberá mostrar en original para cotejo los documentos siguientes:

Acta de nacimiento, Certificado de estudios, Carta de Pasante, Carta de Liberación de Servicio Social y (CURP).

Además, debes traer **seis fotografías** tamaño **ovalo credencial** b/n papel mate **auto-adherible, fondo blanco, vestimenta formal** y comprobante de pago de acta de examen profesional.

El horario de recepción de documentación son los días lunes a viernes, en un horario de 11:00 a 14:00 h y de 16:00 a 19:00 h.

Finalmente, deberá hacer conocimiento de su fecha de realización de examen profesional, no debiendo ser esta menor a una semana posterior a la fecha de entrega y la cual deberá acordar previamente con su(s) asesor(es) y sinodales.

Sin otro particular, reciba un saludo cordial.

ATENTAMENTE

"La Técnica al Servicio de la Patria"



M. en C. Erick Lee Guzmán
Subdirector Académico

ELG/mjc

Resumen

Este trabajo está inspirado por las contribuciones de William T. Gowers, ganador de la medalla Fields en 1998. En particular, se estudia una de sus contribuciones al problema de la distorsión. En su artículo *Lipschitz Functions on Classical Spaces*, Gowers demuestra que el espacio c_0 no es distorsionable utilizando herramientas combinatorias. En este trabajo se busca comprender la compactación de Čech-Stone en espacios discretos, misma que Gowers empleó para obtener su resultado.

Abstract

This work is inspired by the contributions made by William T. Gowers, winner of the Fields medal in 1998. In particular, we study one of his contributions to the distortion problem. In his article *Lipschitz Functions on Classical Spaces*, Gowers showed that c_0 is not a distortionable space using combinatorial tools. In this work, one important goal is understanding the Čech-Stone compactification, which Gowers implemented to obtain his results.

Índice general

1. Conceptos fundamentales	11
1.1. Ultrafiltros	11
1.2. Semigrupos	15
1.3. Semigrupos topológicos	19
2. Compactación de Čech-Stone	23
2.1. Topología de Stone en el espacio de ultrafiltros	23
2.2. Compactación de Čech-Stone de espacios discretos	27
2.3. Compactación de Čech-Stone de un semigrupo discreto	30
2.4. Residuo de Čech-Stone de un semigrupo discreto	33
3. Ultrafiltros aplicados a Teoría de Ramsey	37
3.1. Teorema de Ramsey	37
3.2. Teoremas de Schur, Folkman-Rado-Sanders y Hindman	39
3.3. Van der Waerden	41
4. Teorema de Gowers y su aplicación	43
4.1. Funciones de soporte finito	43
4.2. La esfera positiva de c_0	50
4.3. Funciones de Lipschitz definidas en c_0	54
A. Topología general	63

Introducción

En la década de los 60's muchos matemáticos perseguían muchas de las incógnitas planteadas por Stefan Banach y otros matemáticos de la escuela de matemáticas de Lwów en el *Scottish book*. Algunos de estos problemas fueron solucionados gracias al trabajo de **William Timothy Gowers** y sus colaboradores, entre los cuales destacan: *el problema de la base incondicional* [7], *el problema del espacio homogéneo* [3], *el problema del hiperplano de Banach* [4] y *el problema de Schröder-Bernstein* [5]. Aunque varios autores desempeñaron un papel importante en la resolución de estos problemas, lo que distinguió a Gowers, y lo hizo merecedor de la Medalla Fields, fue el hecho de hacer uso de herramientas combinatorias para atacar dichos problemas de Análisis Funcional, logrando hacer contribuciones importantes en ambas ramas y exhibiendo conexiones donde parecía que no las había.

La primera vez que Gowers relacionó sus trabajos anteriores con herramientas de combinatoria fue en su artículo *Lipschitz Functions on Classical Spaces* [6], el cual surgió en un momento en el que se buscaba solucionar un problema acerca de la geometría de los espacios de Banach conocido como *problema de la distorsión*. Es muy conocido el hecho de que la topología de un espacio de Banach no es alterada por normas equivalentes, pero surge la duda de qué tanto se modifican los objetos geométricos por dichas normas. Como Gowers y otros autores explican en los artículos [11], [12] y [13], para saber si un espacio de Banach X se puede distorsionar es útil analizar la oscilación de las funciones de Lipschitz, definidas en la esfera unitaria S_X . Gowers en su artículo se concentró en las funciones de Lipschitz definidas en c_0 , utilizó la teoría de ultrafiltros idempotentes y la compactación de Čech-Stone para concluir que las funciones $f : S_{c_0} \rightarrow \mathbb{R}$ son de oscilaciones estables, lo que significa que el espacio c_0 no es distorsionable.

La intención de este trabajo es entender cómo se utilizó la compactación de Čech-Stone para demostrar la conclusión que obtuvo Gowers en su artículo, además de entender demostraciones de algunos resultados combinatorios que la emplean. En el artículo de Gowers se utilizan esta teoría sobre el semigrupo $\mathbb{N}^{<+\infty}$, el conjunto de los subconjuntos finitos de \mathbb{N} , en este trabajo seguimos el enfoque de Todorčevich [14], que emplea funciones de soporte finito.

En el primer capítulo de esta tesis se introducen conceptos conocidos. Comenzamos presentando el concepto de *filtro*, el cual es un concepto que suele presentarse en cursos de topología de manera tangencial. Se presentan algunas formas de contruir filtros para

conjuntos o colecciones con ciertas propiedades. También se introduce el concepto de *ultrafiltro*, el cual es probablemente el concepto más importante en este trabajo. Se presentan los ultrafiltros principales y los no principales, además de mostrar algunos resultados que ayudan a caracterizarlos. Más adelante en este capítulo se define lo que es un *semigrupo*, se presentan conceptos parecidos a los de los cursos de Álgebra Moderna tales como los *ideales* y los *elementos idempotentes* de un semigrupo, además de describir un orden sobre los elementos idempotentes de un semigrupo. Por último en este capítulo se presenta la definición de los *semigrupos topológicos* y el teorema de Ellis-Numakura, que es de los más importantes de esta teoría.

El segundo capítulo está dedicado a la compactación de Čech-Stone, comenzamos presentando la definición de la compactación de un semigrupo discreto y dando algunas de sus propiedades. Seguido de eso, se indaga en la existencia de dicha compactación para cualquier semigrupo discreto, mencionando temas relacionados con la universalidad de esta construcción. Por último, se dedica una sección al estudio del residuo de Stone, que es indispensable para justificar la existencia de ultrafiltros no principales idempotentes.

En el tercer capítulo se utiliza lo desarrollado en el capítulo anterior para probar algunos de los resultados más famosos de combinatoria: el teorema Ramsey, el teorema de Schur, el teorema de Folkman-Rado-Sanders, el teorema de Hindman y el teorema de Van der Waerden. El primero es un resultado relacionado con gráficas, mientras que los demás hacen preguntas relacionadas con coloraciones de \mathbb{N} en donde se permiten operaciones aritméticas. Estos resultados se pueden probar con tácticas puramente combinatorias pero en este trabajo se recurre a la teoría de la compactación de Čech-Stone.

En el capítulo final se introduce un espacio de funciones de soporte finito y los ultrafiltros cofinitos para entender la versión combinatoria del teorema de Gowers. Las definiciones al principio del capítulo se extienden para dar una versión “aproximativa” del teorema combinatorio de Gowers. Esta última versión del teorema es la que permite hacer la conexión entre el resultado combinatorio y el problema de la distorsión que motivó a Gowers. El capítulo cierra con la demostración del resultado principal del artículo de Gowers.

Por último, al final del texto se encuentra un apéndice que presenta resultados de topología de manera muy breve para que no exista confusión a lo largo del texto. La intención del apéndice únicamente es enlistar resultados conocidos omitiendo su demostración, ya que se asume que el lector está familiarizado con estos conceptos.

Contribuciones del autor

Este trabajo es mayormente compilativo, sin embargo, hay algunos razonamientos que se presentan de forma más explícita que en los textos consultados.

- En el libro de Todorčevich [14] se define una operación parcial en FIN_k , en este texto que considera una operación alternativa que resulta estar definida en todo el conjunto. Como consecuencia, no es necesario adaptar la teoría de ultrafiltros al caso

de operaciones parciales.

- En la proposición 4.1.6 se demuestra explícitamente que γFIN_k es subsemigrupo topológico de βFIN_k .
- En la sección 4.2 se describe la relación entre FIN_k y Δ_k de manera más detallada que en [14].
- En la sección 4.3 se demuestra a detalle que S^\pm es subsemigrupo cerrado de γFIN_k^\pm (proposición 4.3.4). Este resultado no es totalmente trivial pero se apoya en ideas anteriores.
- En la sección 4.3 se discute la relación entre FIN_k^\pm y Δ_k^\pm de manera más extensa que en [14].
- En la sección 4.3 se demuestra explícitamente el corolario que relaciona el teorema de Gowers con la esfera de c_0 , (corolario 4.3.10).
- En la sección 4.3 se demuestra explícitamente el corolario que relaciona la esfera de c_0 con las funciones de Lipschitz sobre c_0 , (corolario 4.3.11).

Capítulo 1

Conceptos fundamentales

A lo largo de esta sección se definen distintos conceptos y se explora lo necesario para trabajar con estas herramientas. En un inicio los conceptos no tienen relación inmediata, más adelante se definirá lo necesario para conectar dichos conceptos y aplicarlos a la compactación de Čech-Stone. Este capítulo está basado principalmente en el libro de Hindman y Strauss [8].

1.1. Ultrafiltros

Definición 1.1.1. Sea X un conjunto no vacío. Decimos que un conjunto no vacío $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un *filtro* sobre X si:

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{P}(X)$, si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$ (Propiedad de absorción),
- Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{P}(X)$, si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$ (Cerradura bajo intersección).

Ejemplo 1.1.2.

Si X es un conjunto infinito, el filtro de Fréchet sobre X se define como el conjunto $\text{Fr} = \{A \in \mathcal{P}(X) : X \setminus A \text{ es finito}\}$.

Definición 1.1.3. Sea \mathcal{U} un filtro sobre X . Decimos que \mathcal{U} es un *ultrafiltro* sobre X si cualquier filtro \mathcal{F} tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ cumple que $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.

Denotamos al conjunto de los filtros sobre X por Φ_X y lo dotamos del orden parcial de la inclusión. Con esta notación demostramos el siguiente lema.

Lema 1.1.4. *Todo filtro está contenido en un ultrafiltro.*

Demostración. Sean $\mathcal{F} \in \Phi_X$ y $Q = \{\mathcal{U} \in \Phi_X : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}\}$. Sea \mathcal{C} una cadena en Q . Mostraremos que $\cup \mathcal{C} \in Q$ y es cota superior de \mathcal{C} .

- i) Supongamos que $\emptyset \in \cup \mathcal{C}$, entonces existe un filtro $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$ tal que $\emptyset \in \mathcal{U}$, lo cual es falso. Por lo tanto $\emptyset \notin \cup \mathcal{C}$.
- ii) Sean $A \in \cup \mathcal{C}$ y $B \supseteq A$, entonces existe un filtro $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$ tal que $A \in \mathcal{U}$, por lo tanto $B \in \mathcal{U} \subseteq \cup \mathcal{C}$.
- iii) Sean $A, B \in \cup \mathcal{C}$, entonces existen filtros $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{C}$ tal es que $A \in \mathcal{U}_1$ y $B \in \mathcal{U}_2$. Asumimos sin pérdida de generalidad que $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$. Por lo tanto $A \cap B \in \mathcal{U}_2$. Lo que demuestra que $A \cap B \in \cup \mathcal{C}$.
- iv) Como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$, claramente $\mathcal{F} \subseteq \cup \mathcal{C}$.

La existencia de un filtro maximal que contiene a \mathcal{F} es consecuencia del lema de Zorn. \square

El entendimiento de los ultrafiltros será indispensable en los capítulos finales, es por esto que las siguientes proposiciones nos ayudan a construirlos:

Definición 1.1.5. Decimos que una familia \mathcal{B} tiene la propiedad de la intersección finita si la intersección de cualquier subfamilia finita $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ es no vacía, es decir, $\cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Lema 1.1.6. Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia con la propiedad de la intersección finita. Entonces existe un filtro \mathcal{F} sobre X que contiene a \mathcal{B} .

Demostración. Sean $\mathcal{M} = \{\cap U : U \subseteq \mathcal{B} \text{ y } U \text{ es finito}\}$ y $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) : \exists M \in \mathcal{M} \text{ tal que } M \subseteq A\}$. Veamos que \mathcal{F} es filtro sobre X .

- Debido a que \mathcal{B} tiene la propiedad de la intersección finita, para cualquier $U \subseteq \mathcal{B}$ finito se tiene que $\cap U \neq \emptyset$, es decir, $\emptyset \notin \mathcal{M}$. Suponiendo que $\emptyset \in \mathcal{F}$, entonces existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $M \subseteq \emptyset$, por lo tanto $M = \emptyset \in \mathcal{M}$, lo cual es falso. Por el razonamiento anterior concluimos que $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- Sean $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{P}(X)$ tales que $A \subseteq B$, entonces existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $M \subseteq A \subseteq B$, lo que muestra que $B \in \mathcal{F}$.
- Sean $A, B \in \mathcal{F}$, entonces existen $M, N \in \mathcal{M}$ tales que $M \subseteq A$ y $N \subseteq B$. Como $M, N \in \mathcal{M}$, existen $P_1, P_2, \dots, P_m, P_{m+1}, \dots, P_{m+n} \in \mathcal{B}$ tales que

$$M = \bigcap_{i=1}^m P_i \quad ; \quad N = \bigcap_{i=1}^n P_{m+i}.$$

Como el conjunto $\{P_1, \dots, P_{m+n}\} \subseteq \mathcal{B}$ es finito, entonces

$$M \cap N = \left(\bigcap_{i=1}^m P_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n P_{m+i} \right) = \bigcap_{i=1}^{m+n} P_i \in \mathcal{M}.$$

Más aún, se cumple que $M \cap N \subseteq A \cap B$ y, por lo tanto, $A \cap B \in \mathcal{F}$.

De la construcción de \mathcal{F} y la propiedad reflexiva de la inclusión " \subseteq ", notamos inmediatamente que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$. Más aún, dado $B \in \mathcal{B}$ se tiene que $B = \cap\{B\} \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$, por lo tanto, el filtro \mathcal{F} contiene a \mathcal{B} . \square

Corolario 1.1.7. *Cualquier familia con la propiedad de la intersección finita está contenida en un ultrafiltro.*

La siguiente proposición nos permite determinar cuándo un filtro es ultrafiltro sin revisar directamente la condición de maximalidad, por lo que será muy útil en varias ocasiones.

Proposición 1.1.8. *(Caracterización de los ultrafiltros). Un filtro \mathcal{U} es un ultrafiltro sobre X , si y sólo si para cualquier $A \in \mathcal{P}(X)$ o bien se cumple que $A \in \mathcal{U}$ o bien $X \setminus A \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Supongamos que \mathcal{U} es un ultrafiltro sobre X . Dado $A \in \mathcal{P}(X)$, se tienen dos posibilidades:

$$\forall B \in \mathcal{U}, A \cap B \neq \emptyset.$$

En caso contrario, existe un $B_0 \in \mathcal{U}$ tal que $A \cap B_0 = \emptyset$. Para el segundo caso se sigue que $B_0 \subseteq X \setminus A$, por lo tanto $X \setminus A \in \mathcal{U}$. Ahora, asumimos que para cualquier $B \in \mathcal{U}$ se cumple que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{U} \cup \{A\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, pues \mathcal{U} es un filtro. Por el lema 1.1.6, se sigue que existe un filtro \mathcal{F} tal que $\mathcal{U} \cup \{A\} \subseteq \mathcal{F}$. Dado que \mathcal{U} es un ultrafiltro y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, concluimos que $\mathcal{U} = \mathcal{F}$, por lo tanto, $A \in \mathcal{U}$.

Recíprocamente, supongamos que \mathcal{U} es un filtro en X tal que para cualquier $A \in \mathcal{P}(X)$ se cumple que $A \in \mathcal{U}$ o bien $X \setminus A \in \mathcal{U}$. Suponiendo que existe un filtro \mathcal{F} que contiene propiamente a \mathcal{U} , luego se toma $A \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{U}$, por hipótesis sabemos que $X \setminus A \in \mathcal{U}$. Como \mathcal{U} está contenido en \mathcal{F} , entonces $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Además, como $A, X \setminus A \in \mathcal{F}$, que es un filtro, se concluye que $A \cap (X \setminus A) = \emptyset \in \mathcal{F}$, lo cual es falso. \square

Proposición 1.1.9. *Sea $x \in X$ un elemento, entonces el conjunto $\mathcal{U}_x = \{A \in \mathcal{P}(X) : x \in A\}$ es un ultrafiltro sobre X .*

Demostración. Vemos primero que \mathcal{U}_x es un filtro ya que

- $\emptyset \notin \mathcal{U}_x$.
- Si $A, B \in \mathcal{U}_x$, entonces $x \in A$ y $x \in B$, luego $x \in A \cap B$.
- Si $C \subseteq D \subseteq X$ y $C \in \mathcal{U}_x$, entonces $x \in C \subseteq D$, luego $D \in \mathcal{U}_x$.

Para mostrar que \mathcal{U}_x es un ultrafiltro, utilizamos la caracterización de los ultrafiltros. Dado $A \in \mathcal{P}(X)$, sabemos que $x \in A$ o $x \notin A$. Así $A \in \mathcal{U}_x$ o $X \setminus A \in \mathcal{U}_x$. \square

Definición 1.1.10. El conjunto $\mathcal{U}_x = \{A \in \mathcal{P}(X) : x \in A\}$ es *el ultrafiltro principal* sobre X definido por x . Si un ultrafiltro \mathcal{U} no es de la forma \mathcal{U}_x para algún $x \in X$, decimos que es un **ultrafiltro no principal**.

Proposición 1.1.11. (*Caracterización de los filtros principales*). Un ultrafiltro \mathcal{U} sobre X es principal, si y sólo si existe un conjunto finito $F \in \mathcal{P}(X)$ tal que $F \in \mathcal{U}$.

Demostración. Supongamos que \mathcal{U} es un ultrafiltro principal sobre X . Entonces existe un $x \in X$ tal que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_x$. En particular, $\{x\} \in \mathcal{U}_x = \mathcal{U}$. Lo que muestra que existe un conjunto finito $F = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$ tal que $F \in \mathcal{U}$.

Recíprocamente, supongamos que \mathcal{U} es un ultrafiltro y existe $F = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ tal que $F \in \mathcal{U}$. Suponiendo que $\{x_i\} \notin \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, por la caracterización de los ultrafiltros, se tiene que $\bigcap_{i=1}^n X \setminus \{x_i\} = X \setminus F \in \mathcal{U}$, lo cual es falso, pues \mathcal{U} es ultrafiltro. Por lo anterior, debe existir $\{x_i\} \in \mathcal{U}$ con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Como $\{x_i\} \in \mathcal{U}$, para cualquier $A \in \mathcal{P}(X)$ tal que $x_i \in A$, se tiene que $A \in \mathcal{U}$, luego $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}$. Más aún, x_i es el único elemento de F que pertenece a \mathcal{U} , ya que $\{x_i\} \cap \{x_j\} \neq \emptyset$, si y sólo si $x_i = x_j$. Finalmente, para cualquier $A \in \mathcal{U}$ se tiene que $A \cap \{x_i\} \neq \emptyset$, si y sólo si $x_i \in A$, por lo tanto $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_x$. \square

En el lema 1.1.6 se vio que tener una familia con la propiedad de la intersección finita permite encontrar un filtro, por lo tanto un ultrafiltro, que contenga a dicha familia. Más aún, las intersecciones finitas están contenidas en al menos un elemento del ultrafiltro, esto significa que la cardinalidad de cualquier elemento del ultrafiltro depende de la cardinalidad de las intersecciones finitas. Este hecho en conjunto con la caracterización anterior nos da el siguiente corolario.

Corolario 1.1.12. Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia tal que para cualquier $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ finito se cumple que $\bigcap \mathcal{A}$ es infinito. Entonces existe un ultrafiltro no principal \mathcal{U} tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$.

Demostración. Claramente \mathcal{B} tiene la propiedad de la intersección finita. Como todas las intersecciones finitas son conjuntos infinitos, se sigue que todos los elementos del ultrafiltro que contiene a \mathcal{B} son infinitos. Por la caracterización 1.1 se sigue que el ultrafiltro que contiene a \mathcal{B} no puede ser principal. \square

Corolario 1.1.13. Sea X un conjunto y $B \subseteq X$ infinito. Entonces existe un ultrafiltro no principal \mathcal{U} sobre X tal que $B \in \mathcal{U}$.

Demostración. Notamos que la colección $\{B \setminus F : F \subseteq B \text{ es finito}\}$ cumple las hipótesis del corolario anterior, por lo tanto existe un ultrafiltro no principal \mathcal{U} sobre X tal que $B \in \{B \setminus F : F \subseteq B \text{ es finito}\} \subseteq \mathcal{U}$. \square

Aunque el corolario anterior será más útil cuando nos interese contruir ultrafiltros no principales, a continuación tenemos otra caracterización muy distinta.

Proposición 1.1.14. (*Caracterización de los filtros no principales*). Un ultrafiltro \mathcal{U} sobre X es no principal si y sólo si $\text{Fr} \subseteq \mathcal{U}$, donde Fr se definió en el ejemplo 1.1.2.

Demostración. Suponga que \mathcal{U} es un ultrafiltro no principal. Procediendo por contradicción, suponga que existe $A \in \text{Fr} \setminus \mathcal{U}$. Por la caracterización de los ultrafiltros se tiene que

$X \setminus A \in \mathcal{U}$, más aún, como $A \in \text{Fr}$, entonces $X \setminus A$ es finito. Por la proposición anterior, concluimos que \mathcal{U} es un ultrafiltro principal, lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que \mathcal{U} es un ultrafiltro sobre X y $\text{Fr} \subseteq \mathcal{U}$. Suponiendo que \mathcal{U} es ultrafiltro principal, por la proposición anterior, existe un $F \subseteq X$ finito tal que $F \in \mathcal{U}$. Más aún, como F es finito, entonces $X \setminus F \in \text{Fr} \subseteq \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\emptyset = F \cap (X \setminus F) \in \mathcal{U}$, lo cual es falso. \square

Proposición 1.1.15. *Sea \mathcal{U} un ultrafiltro sobre X y $A \in \mathcal{U}$ tal que $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Entonces existe un $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $A_i \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Suponga que $A_i \notin \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Por la caracterización de los ultrafiltros se tiene que $X \setminus A_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Luego $X \setminus A = X \setminus (\cup_{i=1}^n A_i) = \cap_{i=1}^n (X \setminus A_i) \in \mathcal{U}$, lo que contradice que $A \in \mathcal{U}$. \square

Corolario 1.1.16. *Sea \mathcal{U} un ultrafiltro sobre X y $A \in \mathcal{U}$ tal que $\{A_1, \dots, A_n\}$ es una partición de A . Entonces existe un único $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $A_i \in \mathcal{U}$.*

Este último corolario resalta la cualidad que tienen los ultrafiltros de “elegir” una pieza de cualquier partición, hecho que será muy útil para hacer combinatoria.

1.2. Semigrupos

La estructura algebraica más importante en este trabajo son los semigrupos, los cuales tienen muchas propiedades interesantes aunque pueda parecer en un principio, que son estructuras con poca riqueza.

Definición 1.2.1. Sea S un conjunto no vacío y $*$: $S \times S \rightarrow S$ una operación binaria. Decimos que $(S, *)$ es un **semigrupo** si $*$ es asociativa. Dado un semigrupo $(S, *)$ y dos subconjuntos $R, T \subseteq S$, se define

$$RT = \{r * t : r \in R, t \in T\}.$$

En caso de que algún conjunto sea unipuntual, digamos $T = \{a\}$, se denota Ra en lugar de $R\{a\}$.

Ejemplo 1.2.2. Las siguientes parejas son ejemplos de semigrupos:

- $(\mathbb{N}, +)$,
- (\mathbb{N}, \cdot) ,
- (X^X, \circ) para cualquier conjunto X ,
- cualquier grupo $(G, *)$.

Definición 1.2.3. Sea $(S, *)$ un semigrupo, $T \subseteq S$ y $x \in S$. Decimos que T es un **subsemigrupo** de S si es cerrado bajo la operación $*$, es decir, si $TT \subseteq T$. Además, definimos las funciones

- $\rho_x : S \rightarrow S$ dada por $\rho_x(y) = yx$,
- $\lambda_x : S \rightarrow S$ dada por $\lambda_x(y) = xy$.

Definición 1.2.4. Sean $(S, *)$, (T, \circ) semigrupos y $\psi : S \rightarrow T$ una función. Decimos que ψ es un **homomorfismo de semigrupos** si $\psi(x * y) = \psi(x) \circ \psi(y)$ para cualesquiera $x, y \in S$.

Si ψ es un homomorfismo biyectivo, decimos que es un **isomorfismo**.

Observación 1.2.5. Dados $(S, *)$, (R, \circ) semigrupos, $T \subseteq S$ subsemigrupo y $\psi : S \rightarrow R$ un homomorfismo, entonces $\psi[T] \subseteq R$ es un subsemigrupo.

A partir de este punto se omite la notación $(S, *)$, que denota la operación con la que va dotado cada semigrupo; no obstante, en todo momento se debe tener presente. A continuación, definimos lo que es un ideal en el contexto de semigrupos.

Definición 1.2.6. Sea S un semigrupo. Decimos que

- $L \subseteq S$ es un **ideal izquierdo** de S , si $L \neq \emptyset$ y $SL \subseteq L$.
- $R \subseteq S$ es un **ideal derecho** de S , si $R \neq \emptyset$ y $RS \subseteq R$.
- $I \subseteq S$ es un **ideal** si es ideal izquierdo e ideal derecho de S .

Observación 1.2.7. De la definición 1.2.6 notamos que todo ideal es subsemigrupo pero el recíproco no se cumple en general.

Definición 1.2.8. Sea S un semigrupo.

- Decimos que $L \subseteq S$ es un **ideal minimal izquierdo** de S , si es un ideal izquierdo de S que cumple lo siguiente: Cualquier ideal izquierdo no vacío I de S tal que $I \subseteq L$ debe cumplir $I = L$.
- Decimos que $R \subseteq S$ es un **ideal minimal derecho** de S , si es un ideal derecho de S que cumple lo siguiente: Cualquier ideal derecho no vacío I de S tal que $I \subseteq R$ debe cumplir $I = R$.

Proposición 1.2.9. Sean S un semigrupo, $L \subseteq S$ un ideal minimal izquierdo y $T \subseteq S$. Entonces T es un ideal minimal izquierdo si y sólo si existe un $a \in S$ tal que $T = La$.

Demostración. Supongamos que T es ideal minimal izquierdo y sea $a \in T$. Como L es ideal izquierdo, se cumple que $SL \subseteq L$, entonces

$$\forall x \in SLa, \exists s \in S, l \in L \text{ tales que } x = sla = (sl)a \in La \quad (1.2-E1)$$

Lo que muestra que La es ideal izquierdo, más aún, como $a \in T$, entonces $La \subseteq Sa \subseteq ST \subseteq T$. Por la minimalidad de T , concluimos que $T = La$.

Recíprocamente, supongamos que existe $a \in S$ tal que $T = La$. Por (1.2-E1) sabemos que T es un ideal izquierdo. Sea $I \subseteq La$ un ideal izquierdo, veamos que $I = La$. Consideramos el conjunto $J = \{x \in L : xa \in I\}$, el cual es no vacío ya que I es no vacío por ser un ideal. Veamos que además es un ideal izquierdo:

Dados $s \in S$ y $x \in J$ se tiene que $sx \in L$ ya que L es ideal izquierdo, además $(sx)a = s(xa) \in I$ ya que I es ideal izquierdo. Así $SJ \subseteq J$.

Por definición $J \subseteq L$, como L es minimal, se tiene que $J = L$ y esto implica que $I = La$. \square

Observación 1.2.10. Por la ecuación (1.2-E1) podemos decir que para cualquier ideal izquierdo $L \subseteq S$ se tiene que $La \subseteq S$ es ideal izquierdo también.

Proposición 1.2.11. *Sea S un semigrupo. Si S tiene algún ideal minimal izquierdo, entonces cualquier ideal izquierdo de S contiene algún ideal minimal izquierdo.*

Demostración. Sea M un ideal minimal izquierdo y sea L un ideal izquierdo de S . Por ser ideal izquierdo, existe $a \in L$, luego $Ma \subseteq Sa \subseteq SL \subseteq L$ y sabemos por la proposición 1.2.9 que Ma es ideal minimal izquierdo. \square

Los resultados anteriores fueron enunciados para ideales izquierdos, pero son válidos también al considerar ideales derechos, realizando demostraciones enteramente análogas.

Definición 1.2.12. Sea S un semigrupo, decimos que $x \in S$ es un **elemento idempotente** si $xx = x$. Denotamos al conjunto de los elementos idempotentes de S por $E(S)$.

Los elementos idempotentes serán los más importantes más adelante, tanto que se define un orden para estos elementos.

Definición 1.2.13. Sea S un semigrupo y $x, y \in E(S)$. Entonces decimos que

- $x \leq_L y$ si y sólo si $x = xy$,
- $x \leq_R y$ si y sólo si $x = yx$,
- $x \leq y$ si y sólo si $x = yx = xy$.

Proposición 1.2.14. *Las relaciones \leq_L, \leq_R, \leq son reflexivas y transitivas. Más aún, la relación \leq es un orden parcial en $E(S)$.*

Demostración. Mostraremos que \leq_L es reflexiva y transitiva, para \leq_R, \leq se puede mostrar de forma análoga.

- Reflexividad: Dado $x \in E(S)$ se tiene que $x = xx$, es decir, $x \leq_L x$,
- Transitividad: Sean $x, y, z \in E(S)$ con $x \leq_L y$ y $y \leq_L z$, entonces $x = xy$ y $y = yz$. Por lo tanto $x = xy = x(yz) = (xy)z = xz$, luego $x \leq_L z$.

Para probar que \leq es orden parcial, comprobamos la propiedad antisimétrica: Dados $x, y \in E(S)$ con $x \leq y$ y $y \leq x$, se tiene que $x = xy = yx = y$. \square

La proposición anterior deja en claro que las tres relaciones anteriores son muy distintas; sin embargo, ser elemento minimal es indistinto para las tres. Para probar esto necesitamos de los siguientes lemas:

Lema 1.2.15. *Sea $x \in E(S)$. Entonces x es minimal respecto a la relación \leq_R , si y sólo si, para cualquier $y \in E(S)$ se cumple $x = xy$.*

Demostración. Consideramos primero que x es minimal respecto a la relación \leq_R . Como $x \in E(S)$, entonces

$$x(xy) = x^2y = xy.$$

Esto significa que $xy \leq_R x$, por la minimalidad de x obtenemos $xy = x$. Ahora supongamos que para cualquier $y \in E(S)$ se cumple $xy = x$. Sea $z \in E(S)$ con $z \leq_R x$, entonces $z = xz = x$. \square

Podemos adaptar los razonamientos del lema anterior y obtener un resultado similar con la relación \leq_L , dando el siguiente lema como consecuencia directa.

Lema 1.2.16. *Sea $x \in E(S)$. Entonces x es minimal respecto al orden parcial \leq , si y sólo si, para cualquier $y \in E(S)$ se cumple $x = xy = yx$.*

Proposición 1.2.17. *Sea $x \in E(S)$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- 1) x es minimal con respecto a \leq ,
- 2) x es minimal con respecto a \leq_L ,
- 3) x es minimal con respecto a \leq_R .

Demostración. Mostraremos que 1) \iff 3). La equivalencia 1) \iff 2) es análoga. Suponga que x es minimal con respecto a \leq_R . Dado $y \in E(S)$ tal que $y \leq x$, se cumple que $y = xy = yx$, en particular $y \leq_R x$. Por la minimalidad de x se tiene que $x = y$. Ahora supongamos que x es minimal con respecto a \leq . Sea $y \in E(S)$ con $y \leq_R x$, por el lema 1.2.16 y la minimalidad de x sabemos que $x = xy = y$. \square

Definición 1.2.18. Un *elemento idempotente* es *minimal*, si es un elemento minimal respecto a alguna de las relaciones \leq_L, \leq_R, \leq .

Observación 1.2.19. Sea $\psi : S \rightarrow T$ un homomorfismo de semigrupos. Entonces

- Para cualquier $x \in E(S)$ se tiene $\psi(x) = \psi(xx) = \psi(x)\psi(x)$, es decir, $\psi(x) \in E(T)$.
- Para cualesquiera $x, y \in E(S)$, si $x \leq_L y$ entonces $\psi(x) = \psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$, es decir, $\psi(x) \leq_L \psi(y)$. Lo mismo se cumple para las relaciones \leq_R y \leq .

Proposición 1.2.20. *Sea L un ideal minimal izquierdo de S . Cualquier elemento idempotente que pertenezca a L , es también elemento minimal.*

Demostración. Sea $L \subseteq S$ un ideal minimal izquierdo y $x \in L$ un elemento idempotente. Sea $y \in E(S)$ tal que $y \leq x$, es decir, $y = xy = yx$. Entonces $y = yx \in SL \subseteq L$, más aún, $SLy \subseteq Ly$. Por lo tanto $Ly \subseteq SL \subseteq L$ es un ideal izquierdo. Por la minimalidad de L se tiene que $Ly = L$, por lo que existe $z \in L$ tal que $zy = x$. Por lo tanto $xy = zy^2 = zy = x$ y así $x \leq y$. Lo que muestra que $x = y$ y x es minimal. \square

Proposición 1.2.21. *Sea S un semigrupo. Suponga que existe un ideal minimal izquierdo de S con un elemento idempotente. Entonces cualquier ideal minimal izquierdo tiene un elemento idempotente.*

1.3. Semigrupos topológicos

Ahora que se ha trabajado con semigrupos, nuestro objetivo es dotarlos de estructura topológica. En esta sección se verá el lema de Ellis-Numakura, nuestra herramienta más útil para encontrar elementos idempotentes.

Definición. Decimos que $(S, *, \tau)$ es un *semigrupo topológico derecho* si

- $(S, *)$ es un semigrupo.
- (S, τ) es un espacio topológico.
- La función $p_x : S \rightarrow S$ dada por $y \mapsto y * x$ es continua para todo $x \in S$.

Observación 1.3.1. En esta sección, siempre que se considere S compacto, se asume también que es espacio de Hausdorff. Por [A.0.10](#) y [A.0.11](#), cualquier subconjunto $K \subseteq S$ es cerrado si y sólo si es compacto, así que se utilizan los términos “cerrado” y “compacto” de manera indistinta en estos casos.

Lema 1.3.2. *Sea $(S, *, \tau)$ es un semigrupo topológico derecho y compacto. Entonces existe un subsemigrupo no vacío, compacto y minimal.*

Consideramos el conjunto $\mathcal{F} = \{C \subseteq S : C \text{ es subsemigrupo compacto y no vacío de } S\}$ ordenado parcialmente con el siguiente orden: $A \leq B \iff A \subseteq B$.

Cualquier cadena \mathcal{C} de \mathcal{F} tiene la propiedad de la intersección finita, pues para cualesquiera $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ se puede asumir que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n$ al cambiar los índices para respetar la notación, lo que implica que $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \neq \emptyset$. De la caracterización de compactos A.0.5, se sigue que $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Además sabemos que $\bigcap \mathcal{C}$ es compacto por la observación 1.3.1, pues es la intersección arbitraria de conjuntos compactos en un espacio de Hausdorff. Hemos encontrado una cota superior de \mathcal{F} , por el lema de Zorn, se sigue que existe un elemento maximal respecto a este orden, el cual es minimal respecto al orden de contención usual.

Teorema 1.3.1 (Ellis-Numakura [8]). *Si $(S, *, \tau)$ es un semigrupo topológico derecho, compacto y de Hausdorff, entonces existe un elemento idempotente $s \in S$.*

Demostración: Sea T el subsemigrupo compacto, minimal, no vacío, que existe por la proposición anterior, y $s \in T$, se sigue de inmediato que $T * s \subseteq T$. Se tiene que $T * s$ es subsemigrupo compacto de S , ya que $(t_1 * s) * (t_2 * s) = (t_1 * s * t_2) * s \in T * s$ para cualesquiera $t_1, t_2 \in T$, además $T * s = \rho_s[T]$. Por lo tanto, por minimalidad de T , se tiene que $T * s = T$, en particular, $s \in T * s$. Con esto se ha mostrado que el conjunto $\{t \in T : t * s = s\}$ es no vacío.

Sea $R = \{t \in T : t * s = s\}$. Dados $t_1, t_2 \in R$ se tiene que $(t_1 * t_2) * s = t_1 * (t_2 * s) = t_1 * s = s$, por lo que R es subsemigrupo de S , más aún $\{t \in T : t * s = s\} \subseteq T$ es compacto ya que es la imagen inversa del cerrado $\{s\}$ bajo la función continua $t \mapsto t * s$. Nuevamente, por minimalidad de T , se tiene que $T = \{t \in T : t * s = s\}$ y como $s \in T$, es un elemento tal que $s = s * s$, lo que muestra que s es idempotente.

Lema 1.3.3. *Sea S un semigrupo topológico derecho, compacto y de Hausdorff, $L \subseteq S$ un ideal izquierdo cerrado y $a \in E(S)$ (elemento idempotente). Entonces el ideal izquierdo La contiene un $e \in E(S)$ tal que $e \leq a$.*

Demostración. Por la observación 1.2.10, se tiene que La es ideal izquierdo, más aún, $La = \rho_a[L]$ es compacto. Al ser un ideal compacto, en particular es un semigrupo compacto. Por el teorema de Ellis-Numakura 1.3.1, existe un elemento idempotente $b \in La$. En particular, $b = xa$ para algún $x \in L$. Sea $e = ab$, entonces

$$ee = abab = axaaxa = axaxa = abb = ab = e.$$

Más aún, se tiene que

- $ea = aba = axaa = axa = ab = e$, luego $e \leq_L a$,
- $ae = aab = ab = e$, luego $e \leq_R a$.

Es decir, $e \leq a$. □

Teorema 1.3.2. *Sea S un semigrupo topológico derecho, compacto y de Hausdorff. Un elemento idempotente es minimal si y sólo si pertenece a un ideal minimal izquierdo.*

Demostración. La suficiencia es cierta debido a la proposición 1.2.20. Para la necesidad, sean $e \in E(S)$ minimal y L ideal minimal izquierdo cerrado. Dicho ideal minimal existe ya que se puede aplicar el lema de Zorn a la colección de ideales izquierdos cerrados de S . Entonces Le es ideal minimal izquierdo por la proposición 1.2.9. Por el lema anterior, existe un elemento idempotente $e' \in Le$ tal que $e' \leq e$. Como e es minimal, entonces $e' = e \in Le$. \square

Corolario 1.3.4. *Cualquier ideal minimal izquierdo es de la forma Se para algún $e \in E(S)$.*

Demostración. Sea L un ideal minimal izquierdo. Por el teorema anterior sabemos que tiene un elemento minimal idempotente, digamos e . Inmediatamente notamos que $Se \subseteq SL \subseteq L$ es un ideal izquierdo, por la minimalidad de L concluimos que $Se = L$. \square

Observación 1.3.5. Una consecuencia directa del corolario anterior es que cualquier ideal minimal de un semigrupo topológico derecho, compacto y de Hausdorff, es la imagen de la función ρ_e para algún $e \in E(S)$ y, por lo tanto, es compacto.

Capítulo 2

Compactación de Čech-Stone en semigrupos discretos

Ahora que se han definido todos los conceptos necesarios, el objetivo de esta sección es presentar la Compactación de Čech-Stone para el caso de semigrupos discretos; la construcción general es más complicada y sale de los objetivos de este trabajo. La Compactación de Čech-Stone de semigrupos discretos es una herramienta muy poderosa, que brinda soluciones elegantes a distintos problemas de combinatoria. Este capítulo presenta algunos conceptos de topología general extraídos del libro de Munkres [10] pero se basa en el caso particular de la compactación de espacios discretos que se presenta en el libro de Hindman-Strauss [8].

2.1. Topología de Stone en el espacio de ultrafiltros

Definición 2.1.1. Sea X un espacio topológico dotado de la topología discreta. Se define

$$\beta X = \{\mathcal{U} \in \mathcal{P}(X) : \mathcal{U} \text{ es un ultrafiltro sobre } X\}.$$

A partir de este punto, para cualquier $x \in X$, denotaremos su ultrafiltro principal por

$$e(x) = \{A \subseteq X : x \in A\}.$$

Para cualquier $A \subseteq X$, se define

$$\overline{A} = \{\mathcal{U} \in \beta X : A \in \mathcal{U}\}.$$

Observación 2.1.2. Dado $x \in X$ se cumple que $\overline{\{x\}} = \{e(x)\}$. Como $\{x\} \in e(x)$, entonces $e(x) \in \overline{\{x\}}$. Suponiendo que se tiene otro ultrafiltro \mathcal{V} en $\overline{\{x\}}$, se debe cumplir que $e(x) \subseteq \mathcal{V}$ por la propiedad de absorción de los filtros. Por ser filtros maximales, concluimos que $e(x) = \mathcal{V}$.

Proposición 2.1.3. *Para $A, B \subseteq X$ tenemos las siguientes propiedades*

1. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3. $\overline{X \setminus A} = \beta X \setminus \overline{A}$
4. $\overline{A} = \emptyset$ si y sólo si $A = \emptyset$.
5. $\overline{A} = \beta X$ si y sólo si $A = X$.
6. $\overline{A} = \overline{B}$ si y sólo si $A = B$.

Demostración. Sean $A, B \subseteq X$. Probamos entonces

1. Por definición $\overline{A \cap B} = \{\mathcal{U} \in \beta X : A \cap B \in \mathcal{U}\}$. Si $\mathcal{U} \in \beta X$ es tal que $A \cap B \in \mathcal{U}$, por la propiedad de absorción se tiene que $A \in \mathcal{U}$ y $B \in \mathcal{U}$. Recíprocamente, si $A \in \mathcal{U}$ y $B \in \mathcal{U}$, por la cerradura de la intersección se tiene que $A \cap B \in \mathcal{U}$. Con esto hemos demostrado que $\{\mathcal{U} \in \beta X : A \cap B \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \beta X : A \in \mathcal{U} \text{ y } B \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \beta X : A \in \mathcal{U}\} \cap \{\mathcal{U} \in \beta X : B \in \mathcal{U}\} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. Similarmente, utilizando la proposición 1.1.16, se tiene que $\overline{A \cup B} = \{\mathcal{U} \in \beta X : A \cup B \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \beta X : A \in \mathcal{U} \text{ o } B \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \beta X : A \in \mathcal{U}\} \cup \{\mathcal{U} \in \beta X : B \in \mathcal{U}\} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. $\overline{X \setminus A} = \{\mathcal{U} \in \beta X : X \setminus A \in \mathcal{U}\} = \beta X \setminus \overline{A}$, por la caracterización de los ultrafiltros 1.1.8.
4. Si $A = \emptyset$, por definición de ultrafiltro sabemos que ningún ultrafiltro contiene a A , por lo tanto $\overline{A} = \emptyset$. Mostramos la otra implicación de manera contrapositiva, suponiendo que $A \neq \emptyset$, existe $x \in A$, luego $A \in e(x)$, por la definición del ultrafiltro principal de x . Entonces $e(x) \in \overline{A} = \{\mathcal{U} \in \beta X : A \in \mathcal{U}\}$, es decir, $\overline{A} \neq \emptyset$.
5. Utilizando 3 y 4, tenemos lo siguiente

$$\overline{A} = \beta X \iff \emptyset = \beta X \setminus \overline{A} \iff \emptyset = \overline{X \setminus A} \iff \emptyset = X \setminus A \iff A = X$$

6. Si $A = B$, por definición $\overline{A} = \overline{B}$. Recíprocamente, supongamos que $A \neq B$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \in A \setminus B$, por lo tanto $A \in e(x)$ pero $B \notin e(x)$. Así $e(x) \in \overline{A} \setminus \overline{B}$, es decir, $\overline{A} \setminus \overline{B} \neq \emptyset$ y $\overline{A} \neq \overline{B}$.

□

Definición 2.1.4. Por la proposición 2.1.3, se sabe que el conjunto

$$\mathcal{B} = \{\overline{A} : A \subseteq X\},$$

es cerrado bajo intersecciones finitas, luego \mathcal{B} es base para una topología. A la topología generada por \mathcal{B} se le conoce como la topología de Stone y se denota por τ .

A continuación se presentan las propiedades topológicas de la topología de Stone en βX .

Teorema 2.1.1. *Sea X un espacio topológico discreto.*

1. Para toda $A \subseteq X$, \overline{A} es cerrado y abierto en la topología de Stone.
2. $(\beta X, \tau)$ es un espacio de Hausdorff compacto.
3. Para toda $A \subseteq X$, $\overline{A} = cl(e[A])$.
4. Para toda $A \subseteq X$ y cualquier $u \in \beta X$, $u \in cl(e[A])$ si y sólo si $A \in u$.
5. La función $e : X \rightarrow \beta X$ es un encaje (X es homeomorfo a $e[X]$).
6. $e[X] \subseteq \beta X$ es denso y coincide con el conjunto de puntos aislados de βX .
7. Si U es abierto en βX , entonces $cl(U)$ es abierto.

Demostración. 1. Sea $A \subseteq X$. Por definición $\overline{\beta X \setminus A}$ es abierto de la topología τ . Por otro lado, $\overline{A} = \beta X \setminus \overline{\beta X \setminus A}$, por lo que \overline{A} es cerrado en βX .

2. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta X$ distintos, por lo que existe $A \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$. Como $A \notin \mathcal{V}$, por la caracterización de los ultrafiltros 1.1.8 se tiene que $X \setminus A \in \mathcal{V}$. Entonces $\mathcal{U} \in \overline{A}$ y $\mathcal{V} \in X \setminus \overline{A}$ donde $\overline{A}, X \setminus \overline{A} \in \tau$ y $\overline{A} \cap X \setminus \overline{A} = \emptyset$. Por lo que βX es Hausdorff.

Para mostrar que βX es compacto se mostrará que cualquier familia de cerrados básicos con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía. Sea

$$\overline{\mathcal{F}} \subseteq \{\overline{A} : A \in \mathcal{P}(X)\},$$

con la propiedad de la intersección finita. Se verá que $\bigcap \overline{\mathcal{F}} \neq \emptyset$. Se define

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) : \overline{A} \in \overline{\mathcal{F}}\}.$$

Se toma un subconjunto finito $F \subseteq \mathcal{F}$, por hipótesis $\bigcap_{A \in F} \overline{A} \neq \emptyset$. Esto implica que existe $\mathcal{U} \in \bigcap_{A \in F} \overline{A}$, es decir, $A \in \mathcal{U}$ para toda $A \in F$. Como \mathcal{U} es cerrado bajo intersecciones finitas, se tiene que $\bigcap F \neq \emptyset$, por lo que \mathcal{F} también tiene la propiedad de la intersección finita. Por 1.1.7 se sabe que existe un ultrafiltro $\mathcal{V} \in \beta X$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$. Así $\mathcal{V} \in \overline{A}$ para toda $A \in \mathcal{F}$, por lo tanto $\mathcal{V} \in \bigcap \overline{\mathcal{F}}$.

3. Considerando la función $e : X \rightarrow \beta X$, $x \mapsto e(x)$. Dado $\mathcal{U} \in e[A]$, existe $x \in A$ tal que $\mathcal{U} = e(x)$. Por la definición de ultrafiltro principal se cumple que $A \in \mathcal{U}$, es decir, $\mathcal{U} \in \bar{A}$ y $e[A] \subseteq \bar{A}$. Del inciso (1) obtenemos $\text{cl}(e[A]) \subseteq \text{cl}(\bar{A}) = \bar{A}$. Recíprocamente, sea $\mathcal{U} \in \bar{A}$, luego $A \in \mathcal{U}$. Dada una vecindad \bar{N} de \mathcal{U} , entonces $N \in \mathcal{U}$. Por ser ultrafiltro, se tiene que $N \cap A \neq \emptyset$. Sea $a \in A \cap N$, entonces $N \in e(a)$ y $e(a) \in e[A] \cap \bar{N}$, por lo que $\mathcal{U} \in \text{cl}(e[A])$.

4. Por (3) se cumple que

$$\mathcal{U} \in \text{cl}(e[A]) \iff \mathcal{U} \in \bar{A} \iff A \in \mathcal{U}$$

5. Se define la función $e : X \rightarrow \beta X$, $x \mapsto e(x)$.

- Inyectividad: Suponga que $e(a) = e(b)$, en particular se tiene que $\{a\} \in e(b)$. Por definición $\{b\} \in e(b)$. Se tiene que $\{a\} \cap \{b\} \neq \emptyset \iff a = b$.
- Continuidad: Cualquier función con un espacio topológico discreto $(X, \mathcal{P}(X))$ como dominio es continua.
- Función abierta: Para cualquier $A \in \mathcal{P}(X)$ abierto, se tiene que $e[A] = \cup_{a \in A} \overline{\{a\}}$ es abierto.

6. Sea \bar{A} no vacío, por definición, $e(a) \in \bar{A}$ para cualquier $a \in A$, por lo tanto $e[X] \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Así $e[X]$ es denso en βX .

Por la observación 2.1.2, para cualquier $x \in X$, $\{e(x)\} = \overline{\{x\}}$ es abierto, por lo que cualquier elemento de $e[X]$ es punto aislado de βX . Recíprocamente, sea \mathcal{U} un punto aislado de βX , por definición $\{\mathcal{U}\}$ es abierto en βX . Por densidad se tiene que $e[X] \cap \{\mathcal{U}\} \neq \emptyset$, lo que implica que $\mathcal{U} \in e[X]$.

7. Si $U = \emptyset$, entonces $\text{cl}(U) = \emptyset$. Supongamos que $U \neq \emptyset$ es abierto en βX , consideramos el conjunto $A = e^{-1}[U]$, por lo que $e[A] \subseteq U$.

Utilizamos la proposición A.0.13 con el abierto U y, sabiendo por el inciso (6) que $e[X]$ es denso en βX , tenemos que

$$\text{cl}(U) = \text{cl}(e[X] \cap U) = \text{cl}(e[A]) = \bar{A}$$

de donde se concluye que $\text{cl}(U)$ es abierto en βX . □

El teorema anterior nos permite identificar a $e[X]$ en βX como una copia de X , por lo que se puede escribir $X \subseteq \beta X$, entendiendo que es un abuso de notación.

Definición 2.1.5. El conjunto $X^* = \beta X \setminus X$ es llamado **residuo de Čech-Stone**. Note que X^* es el conjunto de todos los ultrafiltros no principales sobre X .

Proposición 2.1.6. *El residuo de Čech-Stone es cerrado con la topología de Stone.*

Demostración. Por el teorema 2.1.1, se tiene $X \cong e[X] = \cup_{x \in X} \{x\}$ que es abierto en βX . □

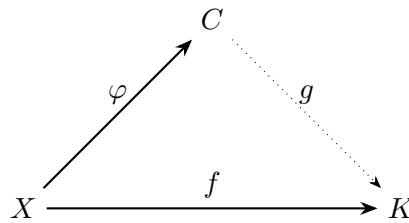
2.2. Compactación de Čech-Stone de espacios discretos

En esta sección se enfatiza la universalidad de la compactación de Čech-Stone y se muestra que βX es la que le corresponde a cualquier espacio discreto X .

Hay que recordar que estamos suponiendo que los espacios topológicos presentados aquí son espacios de Hausdorff. También recordamos que se dice que una función $\varphi : X \rightarrow Z$, entre dos espacios topológicos, es un **encaje** si es un homeomorfismo de X en $\varphi[X]$.

Definición 2.2.1. Sea X un espacio completamente regular. Una **compactación de Čech-Stone** de X , es una pareja (φ, C) tal que

- C es un espacio compacto,
- φ es un encaje de X en C ,
- $\varphi[X]$ es denso en C .
- Dado un espacio compacto K y una función continua $f : X \rightarrow K$, existe una única función continua $g : C \rightarrow K$ tal que $g \circ \varphi = f$ (Es decir, el siguiente diagrama conmuta).



Observación 2.2.2. La compactación de Čech-Stone de un espacio completamente regular es única salvo homeomorfismos.

La existencia de la compactación de Čech-Stone es crucial pero la demostración de este hecho para cualquier espacio completamente regular no es el objetivo de este texto, por lo que enunciamos este teorema sin demostración. Para saber los detalles de esta demostración y la observación anterior se puede consultar el libro de Munkres [10].

Teorema 2.2.1. *Cualquier espacio completamente regular X tiene una correspondiente compactación de Čech-Stone.*

Por el teorema anterior se sabe que está garantizada la existencia de una compactación de Čech-Stone para los espacios completamente regulares. Más aún, nos referiremos a **la compactación de Čech-Stone** de un espacio topológico ya que esta resulta ser única salvo homeomorfismos.

En nuestro caso, la compactación que nos interesa es la de espacios discretos, por lo que tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *Sea X un espacio discreto. Entonces $(e, \beta X)$ es una compactación de Čech-Stone de X .*

Demostración. Por el teorema 2.1.1 sabemos que βX es compacto y $e : X \rightarrow \beta X$ es un encaje y $e[X] \subseteq \beta X$ es denso. Sea K un compacto y $f : X \rightarrow K$ una función continua, veamos que existe una función continua $g : \beta X \rightarrow K$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 & \beta X & \\
 e \nearrow & & \searrow g \\
 X & \xrightarrow{f} & K
 \end{array}$$

Para definir esta función, dado un ultrafiltro $\mathcal{U} \in \beta X$ consideramos $A_{\mathcal{U}} = \{\text{cl}_K(f[A]) : A \in \mathcal{U}\}$. Veamos que $A_{\mathcal{U}}$ tiene la propiedad de la intersección finita: Sean $B \subseteq A_{\mathcal{U}}$ finito y $C = \{A \in \mathcal{U} : \text{cl}_K(f[A]) \in B\}$. Por ser elementos de un ultrafiltro, sabemos que $\bigcap C \in \mathcal{U}$ y así $\bigcap C \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in \bigcap C$, hacemos notar que

$$\bigcap C = \bigcap_{A \in C} A \quad ; \quad \bigcap B = \bigcap_{A \in C} \text{cl}_K(f[A]),$$

por lo tanto

$$f(x_0) \in f\left(\bigcap_{A \in C} A\right) \subseteq \bigcap_{A \in C} f[A] \subseteq \text{cl}_K\left(\bigcap_{A \in C} f[A]\right) \subseteq \bigcap_{A \in C} \text{cl}_K(f[A]) = \bigcap B.$$

Como el espacio K es compacto, para cada $\mathcal{U} \in \beta X$ se sigue que $\bigcap A_{\mathcal{U}} \neq \emptyset$. Elegimos $g(\mathcal{U}) \in \bigcap A_{\mathcal{U}}$.

Veamos que el diagrama conmuta. Sea $x \in X$, entonces $\{x\} \in e(x)$ y $g(e(x)) \in \bigcap A_{e(x)}$. En particular, debido a que el espacio K es de Hausdorff, tenemos

$$g(e(x)) \in \text{cl}_K(f[\{x\}]) = \text{cl}_K\{f(x)\} = \{f(x)\}.$$

Por lo tanto $g(e(x)) = f(x)$.

Sea $\mathcal{U} \in \beta X$ y V una vecindad de $g(\mathcal{U})$ en K . Como K es espacio de Hausdorff compacto, entonces es regular. Como K es regular, existe W una vecindad de $g(\mathcal{U})$ en K tal que $\text{cl}_K(W) \subseteq V$. Sea $A = f^{-1}[W]$, veamos que $A \in \mathcal{U}$. Supongamos que $A \notin \mathcal{U}$, como \mathcal{U} es ultrafiltro se sigue que $X \setminus A \in \mathcal{U}$, por lo tanto $g(\mathcal{U}) \in \text{cl}_K(f[X \setminus A])$. Como sabemos que W es vecindad de $g(\mathcal{U})$, entonces $W \cap f[X \setminus A] \neq \emptyset$, lo que contradice que $A = f^{-1}[W]$.

Hemos mostrado que \overline{A} es una vecindad de \mathcal{U} . Para probar que g es continua basta mostrar que $g[\overline{A}] \subseteq V$. Sea $\mathcal{F} \in \overline{A}$ y supongamos que $g(\mathcal{F}) \notin V$, entonces $K \setminus \text{cl}_K W$ es una vecindad de $g(\mathcal{F})$. Por la definición de g , en particular $g(\mathcal{F}) \in \text{cl}_K f[A]$, lo que implica que $(K \setminus \text{cl}_K W) \cap f[A] \neq \emptyset$, lo que contradice que $A = f^{-1}[W]$. \square

Teorema 2.2.3. Sean X, Y dos espacios discretos y $f : X \rightarrow Y$. Entonces existe una única extensión continua $\beta f : \beta X \rightarrow \beta Y$.

Demostración. Consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 e_X \downarrow & & \downarrow e_Y \\
 \beta X & \xrightarrow{\beta f} & \beta Y
 \end{array}$$

Como βY es compacto y $e_Y \circ f$ es continua, por el teorema anterior existe una extensión continua $\beta f : \beta X \rightarrow \beta Y$.

Supongamos que existe $g : \beta X \rightarrow \beta Y$ extensión continua de f . Entonces $g = \beta f$ en el conjunto denso $e[X]$, por el teorema A.0.2 concluimos que $g = \beta f$ en βX . \square

Observación 2.2.3. Al considerar $Y = K$ compacto en las hipótesis del teorema 2.2.3, resulta $\beta K = K$ y $e_K = Id_K$, lo que implica directamente que la función que cumple la propiedad universal (denotada g en 2.2.2) es única salvo isomorfismos.

Proposición 2.2.4. Con las hipótesis del teorema 2.2.3, la extensión continua está dada por $\beta f(\mathcal{U}) = \{A \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}[A] \in \mathcal{U}\}$.

Demostración. Dado $\mathcal{U} \in \beta X$, veamos primero que el conjunto $\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}[A] \in \mathcal{U}\}$ es un ultrafiltro en Y .

- Supongamos que $\emptyset \in \mathcal{V}$, entonces $\emptyset = f^{-1}[\emptyset] \in \mathcal{U}$, lo cual es falso.
- Sean $A, B \subseteq Y$, con $A, B \in \mathcal{V}$. Entonces $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] \in \mathcal{U}$, por lo tanto $A \cap B \in \mathcal{V}$.
- Sean $A \subseteq B \subseteq Y$ con $A \in \mathcal{V}$. Entonces $f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B]$ con $f^{-1}[A] \in \mathcal{U}$, por lo tanto $f^{-1}[B] \in \mathcal{U}$, así $B \in \mathcal{V}$.
- Dado $A \in \mathcal{P}(Y)$, se tiene que $f^{-1}[A] \in \mathcal{U}$, o bien, $f^{-1}[Y \setminus A] \in \mathcal{U}$. Por lo tanto $A \in \mathcal{V}$, o bien, $Y \setminus A \in \mathcal{V}$.

Ahora consideramos la función $g(\mathcal{U}) = \{A \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}[A] \in \mathcal{U}\}$ para $\mathcal{U} \in \beta X$, veamos que g es continua. Sea $\mathcal{U} \in \beta X$ fijo y $A \in \mathcal{P}(Y)$ tal que \bar{A} es una vecindad de $g(\mathcal{U})$. Para cualquier $\mathcal{W} \in g^{-1}[\bar{A}]$, se cumple que $g[\mathcal{W}] \in \bar{A}$, por definición de la topología de Stone, esto es equivalente a que $A \in g(\mathcal{W})$, por definición de g esto equivale a que

$f^{-1}[A] \in \mathcal{W}$, que es lo mismo que $\mathcal{W} \in \overline{f^{-1}[A]}$. Hemos mostrado que $g^{-1}[\overline{A}] = \overline{f^{-1}[A]}$ es abierto, por lo que g es continua.

Por último, como $e[X] \subseteq \beta X$ es denso, basta mostrar que $g = \beta f$ para ultrafiltros principales y ocupar el teorema A.0.2. Sea $x \in X$, por la definición de g tenemos que

$$g(e_X(x)) = \{A \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}[A] \in e_X(x)\}.$$

Notamos que para cualquier $A \in \mathcal{P}(Y)$, se cumple que $A \in g(e_X(x))$ si y sólo si $f^{-1}[A] \in e_X(x)$, lo que ocurre si y sólo si $x \in f^{-1}[A]$, es decir $f(x) \in A$, lo que es equivalente a que $A \in e_Y(f(x))$. Por el teorema 2.2.3 se sabe que $\beta f(e_X(x)) = e_Y(f(x))$, así que se concluye que $g = \beta f$. \square

Gracias al último teorema, tenemos una forma de extender funciones definidas en espacios discretos, a funciones continuas definidas en sus compactaciones y la forma explícita de esa función. Estos resultados serán muy importantes cuando revisemos el teorema de Gowers, que es con el que culmina todo este trabajo.

2.3. Compactación de Čech-Stone de un semigrupo discreto

Hasta ahora se ha hablado de la compactación de Čech-Stone como un espacio topológico creado a partir de un espacio topológico discreto X . Ahora, se verá que la compactación de Čech-Stone resulta ser un semigrupo topológico-derecho, los cuales ya fueron tratados en el capítulo anterior, cuando el espacio X tiene estructura de semigrupo.

Definición 2.3.1. Sean $(X, *)$ un semigrupo dotado de la topología discreta y $(\beta X, \tau)$ la compactación de Čech-Stone dotada de la topología de Stone. Dados $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta X$, se define la operación $*$: $\beta X \times \beta X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ por

$$\mathcal{U} * \mathcal{V} = \{A \in \mathcal{P}(X) : \{x \in X : \{y \in X : x * y \in A\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}\}.$$

Observación 2.3.2. Para cualquier $A \in \mathcal{P}(X)$ se cumple que

$$A \in \mathcal{U} * \mathcal{V}, \text{ si y sólo si } \{x \in X : \{y \in X : x * y \in A\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}.$$

Definición 2.3.3. Para simplificar la notación, se define el conjunto

$$A/x = \{y \in X : x * y \in A\}.$$

Con esta definición, la observación 2.3.2 se escribe como

$$A \in \mathcal{U} * \mathcal{V}, \text{ si y sólo si } \{x \in X : A/x \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}.$$

Proposición 2.3.4. *Utilizando la notación de la definición anterior, se cumple que:*

- $(A \cap B)/x = (A/x) \cap (B/x)$
- $(X \setminus A)/x = X \setminus (A/x)$
- $\{y \in X : (A/x)/y \in \mathcal{W}\} = \{y \in X : A/y \in \mathcal{W}\}/x$

Demostración. ▪ Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} (A \cap B)/x &= \{y \in X : x * y \in A \cap B\} \\ &= \{y \in X : x * y \in A\} \cap \{y \in X : x * y \in B\} \\ &= (A/x) \cap (B/x). \end{aligned}$$

- Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} (X \setminus A)/x &= \{y \in X : x * y \in X \setminus A\} \\ &= \{y \in X : x * y \notin A\} = \{y \in X : y \notin A/x\} \\ &= X \setminus (A/x). \end{aligned}$$

- Tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} z \in \{y \in X : (A/x)/y \in \mathcal{W}\} &\iff (A/x)/z \in \mathcal{W} \iff \{p \in X : z * p \in A/x\} \in \mathcal{W} \\ &\iff \{p \in X : z * p \in \{t \in X : x * t \in A\}\} \in \mathcal{W} \\ &\iff \{p \in X : x * (z * p) \in A\} \in \mathcal{W} \\ &\iff \{p \in X : (x * z) * p \in A\} \in \mathcal{W} \\ &\iff A/(x * z) \in \mathcal{W} \\ &\iff x * z \in \{y \in X : A/y \in \mathcal{W}\} \\ &\iff z \in \{\{y \in X : A/y \in \mathcal{W}\}/x\}. \end{aligned}$$

Lo que muestra la doble contención de los conjuntos. □

Lema 2.3.5 (Cerradura de la operación $*$ en βX). *Para cualesquiera $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta X$ se cumple que $\mathcal{U} * \mathcal{V} \in \beta X$.*

Demostración. Se mostrará que $\mathcal{U} * \mathcal{V}$ es un ultrafiltro sobre X . Sean $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Entonces

- Suponga que $\emptyset \in \mathcal{U} * \mathcal{V}$, por la definición 2.3.3, sabemos que esto implica que $\{x \in X : \emptyset/x \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$. Es decir, $\emptyset = \emptyset/x = \{y \in X : x * y \in \emptyset\} \in \mathcal{V}$, lo cual contradice que \mathcal{V} es un filtro. Concluimos que $\emptyset \notin \mathcal{U} * \mathcal{V}$.

- Sean $A \in \mathcal{U} * \mathcal{V}$ y $A \subseteq B$, esto último implica que

$$A/x = \{y \in X : x * y \in A\} \subseteq \{y \in X : x * y \in B\} = B/x.$$

Dado $x \in \{x \in X : A/x \in \mathcal{V}\}$, por la propiedad de absorción del filtro \mathcal{V} se tiene que $B/x \in \mathcal{V}$. Por lo tanto $x \in \{x \in X : B/x \in \mathcal{V}\}$, lo que muestra que $\{x \in X : A/x \in \mathcal{V}\} \subseteq \{x \in X : B/x \in \mathcal{V}\}$. Utilizando la propiedad de absorción del filtro \mathcal{U} concluimos que $\{x \in X : B/x \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, es decir, $B \in \mathcal{U} * \mathcal{V}$.

- Sean $A, B \in \mathcal{U} * \mathcal{V}$, de la proposición anterior sabemos que $(A \cap B)/x = (A/x) \cap (B/x)$. Por lo que

$$\begin{aligned} \{x \in X : (A \cap B)/x \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} &\iff \{x \in X : (A/x) \cap (B/x) \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \\ &\iff \{x \in X : A/x \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \\ &\quad \text{y } \{x \in X : B/x \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Por lo que $A \cap B \in \mathcal{U} * \mathcal{V}$.

- Sea $A \in \mathcal{U} * \mathcal{V}$. Por la proposición anterior sabemos que $(X \setminus A)/x = X \setminus (A/x)$. Como \mathcal{V} es un ultrafiltro, se cumple que $(X \setminus A)/x \in \mathcal{V}$ o bien $A/x \in \mathcal{V}$. Por otra parte, como \mathcal{U} es ultrafiltro principal,

$$\begin{aligned} \{x \in X : (X \setminus A)/x \in \mathcal{V}\} \notin \mathcal{U} &\iff X \setminus \{x \in X : (X \setminus A)/x \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \\ &\iff \{x \in X : (X \setminus A)/x \notin \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \\ &\iff \{x \in X : A/x \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $X \setminus A \notin \mathcal{U} * \mathcal{V}$. □

Lema 2.3.6 (Asociatividad). Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W} \in \beta X$, entonces $(\mathcal{U} * \mathcal{V}) * \mathcal{W} = \mathcal{U} * (\mathcal{V} * \mathcal{W})$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{P}(X)$, tenemos que

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{U} * (\mathcal{V} * \mathcal{W}) &\iff \{x \in X : A/x \in \mathcal{V} * \mathcal{W}\} \in \mathcal{U} \\ &\iff \{x \in X : \{y \in X : (A/x)/y \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

De la última proposición sabemos que $\{y \in X : (A/x)/y \in \mathcal{W}\} = \{y \in X : A/y \in \mathcal{W}\}/x$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \{x \in X : \{y \in X : (A/x)/y \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} &\iff \{x \in X : \{y \in X : A/y \in \mathcal{W}\}/x \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \\ &\iff \{y \in X : A/y \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{U} * \mathcal{V} \\ &\iff A \in (\mathcal{U} * \mathcal{V}) * \mathcal{W} \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.1. *Sea $(X, *)$ un semigrupo. Entonces $(\beta X, *, \tau)$ es un semigrupo topológico derecho.*

Demostración. Se ha demostrado la cerradura de la operación de $(\beta X, *)$ en el lema 2,3,5, y que es asociativa en el lema 2,3,6. Por lo que $(\beta X, *)$ es semigrupo, más aún, sabemos que está dotado de la topología de Stone τ y $(\beta X, *, \tau)$ es espacio topológico compacto.

Resta ver que, dado $\mathcal{U} \in \beta X$, la función $\rho_{\mathcal{U}} : \beta X \rightarrow \beta X$ es continua. Sea $A \subseteq X$, veremos que $\rho_{\mathcal{U}}^{-1}[\overline{A}] \in \tau$, más aún, es un elemento de la base de esta topología. Definimos $B = \{x \in X : A/x \in \mathcal{U}\}$ y notamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \in \rho_{\mathcal{U}}^{-1}[\overline{A}] &\iff \rho_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) = \mathcal{V} * \mathcal{U} \in \overline{A} \iff A \in \mathcal{V} * \mathcal{U} \\ &\iff B = \{x \in X : A/x \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V} \iff \mathcal{V} \in \overline{B} \end{aligned}$$

Hemos mostrado que $\rho_{\mathcal{U}}^{-1}[\overline{A}] = \overline{B} \in \tau$. □

En la sección anterior se presentó la extensión continua de cualquier función $f : X \rightarrow Y$, denotada por $\beta f : \beta X \rightarrow \beta Y$. Ahora que se ha visto que la compactación de Čech-Stone es semigrupo topológico, es natural preguntarse si la extensión resulta ser un homomorfismo.

Teorema 2.3.2. *Sea $f : X \rightarrow Y$ un homomorfismo. Entonces la extensión continua $\beta f : \beta X \rightarrow \beta Y$ también es homomorfismo.*

Demostración. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta X$, veamos que $\beta f(\mathcal{U} * \mathcal{V}) = \beta f(\mathcal{U}) * \beta f(\mathcal{V})$. Comenzamos con $B \in \beta f(\mathcal{U}) * \beta f(\mathcal{V})$ para encontrar una condición equivalente más directa. Utilizando la observación 2.3.2 y la proposición 2.2.4 se obtiene directamente

$$\begin{aligned} B \in \beta f(\mathcal{U}) * \beta f(\mathcal{V}) &\iff \{z \in Y : \{w \in Y : z * w \in B\} \in \beta f(\mathcal{V})\} \in \beta f(\mathcal{U}) \\ &\iff \{z \in Y : f^{-1}[\{w \in Y : z * w \in B\}] \in \mathcal{V}\} \in \beta f(\mathcal{U}) \\ &\iff \{z \in Y : \{y \in X : z * f(y) \in B\} \in \mathcal{V}\} \in \beta f(\mathcal{U}) \\ &\iff f^{-1}[\{z \in Y : \{y \in X : z * f(y) \in B\} \in \mathcal{V}\}] \in \mathcal{U} \\ &\iff \{x \in X : \{y \in X : f(x) * f(y) \in B\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \\ &\iff \{x \in X : \{y \in X : f(x * y) \in B\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \\ &\iff \{x \in X : \{y \in X : x * y \in f^{-1}[B]\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \\ &\iff f^{-1}[B] \in \mathcal{U} * \mathcal{V} \\ &\iff B \in \beta f(\mathcal{U} * \mathcal{V}). \end{aligned}$$

□

2.4. Residuo de Čech-Stone de un semigrupo discreto

Sabemos por la subsección 2.1, que $X^* = \beta X \setminus X$ es un subespacio topológico cerrado de βX . Sin embargo, nuestra motivación es encontrar ultrafiltros no principales idempotentes

(por sus aplicaciones en la teoría de Ramsey), así que debemos examinar cuándo es posible utilizar el lema Ellis-Numakura. El siguiente teorema, nos brinda una herramienta para saber cuando el residuo de Čech-Stone resulta ser un semigrupo.

Teorema 2.4.1. *Sea $(X, *)$ un semigrupo. Entonces $X^* \subseteq \beta X$ es un subsemigrupo, si y sólo si para cualquier subconjunto finito $A \subseteq X$ y cualquier subconjunto infinito $B \subseteq X$, existe un subconjunto finito $F \subseteq B$ tal que $\bigcap_{x \in F} A/x$ es finito.*

Demostración. Primero, mostremos la necesidad de manera contrapositiva. Sean $A \subseteq X$ un conjunto finito y $B \subseteq X$ un conjunto infinito tales que para cualquier $F \subseteq B$ finito se cumple que $\bigcap_{x \in F} A/x$ es infinito. Entonces el conjunto $\{A/x : x \in B\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, más aún, las intersecciones finitas son conjuntos infinitos. Por el corolario 1.1.12, sabemos que existe $\mathcal{V} \in X^*$ tal que

$$\{A/x : x \in B\} \subseteq \mathcal{V}. \quad (2.4-E1)$$

Por el corolario 1.1.13, se sabe que existe \mathcal{U} ultrafiltro no principal tal que $B \in \mathcal{U}$. Notamos que de la ecuación (2.4-E1) se sigue que $B \subseteq \{x \in X : A/x \in \mathcal{V}\}$. Como $B \in \mathcal{U}$, por las propiedades de filtro se sigue que $\{x \in X : A/x \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, es decir $A \in \mathcal{U} * \mathcal{V}$. Como A es finito, se sigue que $\mathcal{U} * \mathcal{V}$ es un ultrafiltro principal, lo que significa que X^* no es un subsemigrupo de βX .

Mostremos ahora la suficiencia de manera contrapositiva. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in X^*$ tales que $\mathcal{U} * \mathcal{V} = e(z)$ para algún $z \in X$. Por la definición de los ultrafiltros principales y la operación $*$ se obtiene para cualquier $A \subseteq X$ que

$$z \in A \iff A \in e(z) \iff A \in \mathcal{U} * \mathcal{V} \iff \{x \in X : A/x \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}.$$

En particular podemos tomar $A = \{z\}$ y $B = \{x \in X : A/x \in \mathcal{V}\}$. Lo anterior implica que $B \in \mathcal{U}$, por lo que es infinito. Vemos que para cualquier $F \subseteq B$ se tiene que $\bigcap_{x \in F} A/x \in \mathcal{V}$, por lo que es infinito. Hemos encontrado un $A \subseteq X$ finito y un $B \subseteq X$ infinito tales que para cualquier $F \subseteq B$ finito, se tiene que $\bigcap_{x \in F} A/x \in \mathcal{V}$ es infinito, lo que concluye la demostración. \square

Definición 2.4.1. Sea $(X, *)$ un semigrupo. Decimos que X es débilmente cancelable por la izquierda, si $\{z \in X : x * z = y\}$ es finito para cualesquiera $x, y \in X$.

Proposición 2.4.2. *Sea $(X, *)$ un semigrupo infinito. Entonces X^* es un ideal izquierdo de βX si y sólo si X es débilmente cancelable por la izquierda.*

Demostración. Mostremos la necesidad de manera contrapositiva. Supongamos que existe $x, y \in X$ tales que $A = \{z \in X : x * z = y\}$ es infinito. Entonces existe $\mathcal{U} \in X^*$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Dado un $S \subseteq X$, notamos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} S \in e(x) * \mathcal{U} &\iff \{a \in X : S/a \in \mathcal{U}\} \in e(x) \\ &\iff x \in \{a \in X : S/a \in \mathcal{U}\} \\ &\iff S/x \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Como $A \in \mathcal{U}$, si tomamos $S \in e(x) * \mathcal{U}$ se sigue que $(S/x) \cap A \neq \emptyset$. Más aún, esto significa que hay algún $z \in X$ tal que $y = x * z \in S$, es decir, $S \in e(y)$. Por la maximalidad de los ultrafiltros concluimos que $e(x) * \mathcal{U} = e(y)$, lo que muestra que X^* no es ideal izquierdo de βX .

Mostremos ahora la suficiencia de manera contrapositiva. Supongamos que X^* no es ideal izquierdo de βX . Sabemos que $X^* \neq \emptyset$ ya que X es infinito. Entonces existen $\mathcal{U} \in \beta X$ y $\mathcal{V} \in X^*$ tales que $\mathcal{U} * \mathcal{V} = e(y)$ para algún $y \in X$. En particular $\{y\} \in \mathcal{U} * \mathcal{V}$, por lo tanto $\{a \in X : \{y\}/a \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$. Como \mathcal{U} es ultrafiltro, ninguno de sus elementos es el vacío, por lo que sabemos que existe algún $x \in X$ tal que $\{y\}/x = \{z \in X : x * z = y\} \in \mathcal{V}$, lo que implica que $\{z \in X : x * z = y\}$ es infinito. Hemos mostrado que X no es débilmente cancelable por izquierda. \square

Las proposiciones anteriores nos ayudan a saber cuándo X^* es un semigrupo o un ideal, esto es muy importante ya que saberlo (puesto que $X^* \subseteq \beta X$ es cerrado) nos permite aplicar el lema de Ellis-Numakura 1.3.1 para obtener ultrafiltros idempotentes.

Lema 2.4.3. *Si X^* es un subsemigrupo de βX , existe un ultrafiltro no principal idempotente sobre X .*

Observación 2.4.4. Evidentemente \mathbb{N} es débilmente cancelable, por lo tanto, $\beta\mathbb{N}^*$ es un ideal izquierdo de $\beta\mathbb{N}$. En particular sabemos que $\beta\mathbb{N}^*$ es subsemigrupo de $\beta\mathbb{N}$, lo que significa que siempre existe un ultrafiltro no principal idempotente sobre \mathbb{N} . Esta observación será crucial para la Teoría de Ramsey que se desarrolla en el siguiente capítulo.

Observación 2.4.5. Sea $\mathcal{U} \in \beta X$ idempotente. Entonces $A \in \mathcal{U}$, si y sólo si

$$\{x \in X : A/x \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}.$$

Visualizar esta propiedad nos será de gran ayuda en lo que sigue.

Capítulo 3

Ultrafiltros aplicados a Teoría de Ramsey

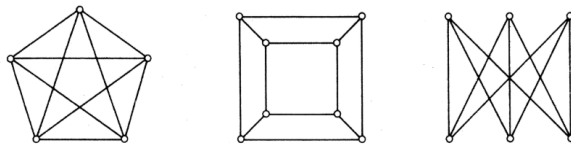
En esta sección presentaremos algunos resultados de combinatoria muy famosos y utilizaremos la teoría de ultrafiltros de los capítulos previos para demostrarlos. Nuestra intención es exhibir la versatilidad de esta teoría, aunque cabe recalcar que todos estos teoremas fueron demostrados por primera vez de manera puramente combinatoria.

3.1. Teorema de Ramsey

En esta sección enunciaremos el teorema de Ramsey para gráficas infinitas, aunque existen muchas variaciones de éste. Las gráficas son utilizadas en muchas ramas de las matemáticas, ya que la manera de visualizarlas es muy intuitiva.

Definición 3.1.1. Una **gráfica** G es una pareja (V, E) , donde V es un conjunto no vacío, cuyos elementos se conocen como vértices y $E \subseteq V \times V$ es una relación simétrica, cuyos elementos se conocen como aristas. Si V es infinito, se dice que G es una gráfica infinita.

Esta definición es la abstracción de lo que en muchos ámbitos se puede visualizar con un diagrama, en el que distintos nodos se encuentran unidos por curvas continuas. Algunos ejemplos son los siguientes:



Existe una gran variedad de gráficas, las siguientes definiciones nos ayudan a distinguir ciertas gráficas en las que estaremos interesados.

- Definición 3.1.2.** i) Decimos que una gráfica $H = (V_H, E_H)$ es subgráfica de $G = (V_G, E_G)$, si $V_H \subseteq V_G$ y $E_H \subseteq E_G$.
- ii) Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Si $V' \subseteq V$, se conoce como **subgráfica inducida** a la pareja (V', E') , donde $E' = \{(v, w) \in E : v, w \in V'\}$.
- iii) Decimos que una gráfica $G = (V, E)$ es completa, si para cualesquiera dos vértices disntintos, existe una arista que los une. Es decir, si se toman $v, w \in V$ distintos, entonces existe $e = (v, w) \in E$.

De las gráficas mostradas anteriormente, sólo la primera es una gráfica completa.

Definición 3.1.3. Sea A un conjunto no vacío. Decimos que una **coloración** es una función $c : A \rightarrow \{0, 1\}$. Si $B \subseteq A$ es tal que $c[B] \subseteq \{0\}$ o bien $c[B] \subseteq \{1\}$, se dice que B es **monocromático**.

Cuando se considera una coloración estamos pensando en una función que induce una partición sobre A en dos partes, también se puede pensar en coloraciones que particionan un conjunto en más partes. En combinatoria, cuando se trata con coloraciones o particiones, muchas veces el resultado esperado es una estructura que resulta ser monocromática. Por comodidad, en esta sección se denotara vw en lugar de (v, w) para referirnos a aristas de una gráfica. Ahora tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.1.1 (Ramsey). *Sea $G = (V, E)$ una gráfica infinita completa. Para cualquier coloración $c : E \rightarrow \{0, 1\}$, existe un conjunto infinito $X \subseteq V$ tal que la subgráfica inducida por X es monocromática.*

Demostración. Como V es infinito, por el corolario 1.1.13, existe \mathcal{U} un ultrafiltro no principal de V . Se toma $v \in V$ fijo, por lo que se tiene la siguiente partición

$$V = \{v\} \cup \{w \in V : c(vw) = 0\} \cup \{w \in V : c(vw) = 1\}.$$

Como consecuencia de 1.1.16, sólo uno de estos elementos de la partición pertenece a \mathcal{U} . Dado que \mathcal{U} es no principal, por la proposición 1.1, no puede ocurrir que $\{v\} \in \mathcal{U}$, así que $\{w \in V : c(vw) = 0\} \in \mathcal{U}$ (en este caso se dice que v es \mathcal{U} -cero) o $\{w \in V : c(vw) = 1\} \in \mathcal{U}$ (en este caso se dice que v es \mathcal{U} -uno).

Con el procedimiento anterior, se puede determinar para cada vértice si es \mathcal{U} -uno o \mathcal{U} -cero, lo que permite construir otra la siguiente partición:

$$V = \{v \in V : v \text{ es } \mathcal{U}\text{-uno}\} \cup \{v \in V : v \text{ es } \mathcal{U}\text{-cero}\}$$

Nuevamente, sólo uno de los elementos de la partición pertenece a \mathcal{U} por 1.1. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $A = \{v \in V : v \text{ es } \mathcal{U}\text{-uno}\} \in \mathcal{U}$. Para cada $v \in A$, dado que v es \mathcal{U} -uno, \mathcal{U} tiene el conjunto $A_v = \{w \in V : c(vw) = 1\}$ como elemento. Se toma

$v_1 \in A$ y $v_2 \in A \cap A_{v_1}$, sabemos que v_2 existe ya que $A \cap A_{v_1} \in \mathcal{U}$ (por lo tanto $A \cap A_{v_1} \neq \emptyset$). Dado que $v_2 \in A_{v_1}$, se tiene que $c(v_1 v_2) = 1$. Por otro lado, dado que $v_2 \in A$, se tiene que $A_{v_2} \in \mathcal{U}$, por lo que se escoge $v_3 \in A_{v_1} \cap A_{v_2}$ ya que $A_{v_1}, A_{v_2} \in \mathcal{U}$ y se ocupan nuevamente las propiedades de filtro de \mathcal{U} . Ya que $v_3 \in A_{v_1}$, se tiene que $c(v_1 v_3) = 1$ también. De esta forma se han encontrado tres vértices v_1, v_2, v_3 que generan una gráfica monocromática (de color *uno*).

Construimos de manera inductiva a los demás elementos de la sucesión. Supongamos que se tienen vértices v_1, v_2, \dots, v_k tales $A_{v_1}, A_{v_2}, \dots, A_{v_k} \in \mathcal{U}$, de modo que la gráfica inducida por $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es monocromática de color *uno*. Por propiedades de los ultrafiltros existe $v_{k+1} \in A \cap A_{v_1} \cap \dots \cap A_{v_k}$. Entonces para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ se tiene que $v_{k+1} \in A_{v_i}$, por lo que $c(v_i v_{k+1}) = 1$. Se sigue que la gráfica inducida por $\{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$ es monocromática. Además, como $v_{k+1} \in A$, se tiene que $A_{v_{k+1}} \in \mathcal{U}$, lo que termina el paso inductivo. \square

3.2. Teoremas de Schur, Folkman-Rado-Sanders y Hindman

Esta sección está dedicada a los teoremas del tipo Ramsey en los que se considera una estructura aditiva.

Teorema 3.2.1 (Schur). *Supóngase que se tiene una coloración $c : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$. Entonces existe un conjunto monocromático de la forma $\{x, y, x + y\}$.*

Demostración. Por la observación 2.4.4 se sabe que existe un ultrafiltro \mathcal{U} no principal idempotente en \mathbb{N} . Como $\mathbb{N} = \{n : c(n) = 1\} \cup \{n : c(n) = 0\}$, se cumple que $\{n : c(n) = 1\} \in \mathcal{U}$ ó $\{n : c(n) = 0\} \in \mathcal{U}$. Supongase, sin pérdida de generalidad, que $A = \{n : c(n) = 0\} \in \mathcal{U}$. Como \mathcal{U} es idempotente, se tiene que

$$A \in \mathcal{U} \iff \{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : n + m \in A\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$$

Por lo tanto

$$A^* = A \cap \{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : n + m \in A\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$$

Como $A^* \neq \emptyset$ por ser elemento de \mathcal{U} , se toma $x \in A^*$. Entonces $c(x) = 0$, más aún, el conjunto

$$A_x = \{m \in \mathbb{N} : x + m \in A\} \in \mathcal{U}$$

Luego, se puede tomar $y \in A_x \cap A$. Con esto se tiene que $c(y) = 0$, ya que $y \in A$, más aún, como $y \in A_x$, se cumple que $x + y \in A$ (es decir $c(x + y) = 0$). Se ha encontrado un conjunto de la forma $\{x, y, x + y\}$ monocromático (todos los elementos son color *cero*). \square

Observación 3.2.1. Analizando la demostración del teorema 3.2.1 se puede notar que, utilizando que \mathcal{U} es ultrafiltro no principal idempotente de \mathbb{N} , para cualquier $A \in \mathcal{U}$ se pueden encontrar dos elementos distintos $\{x, y, x + y\} \subseteq A$.

Definición. Dado un conjunto de números $X \subseteq \mathbb{N}$, el conjunto de **sumas finitas** de X se define como

$$FS(X) = \{x_1 + \cdots + x_n : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X \text{ distintos a pares}\} \\ = \left\{ \sum_{x \in F} x : F \subseteq X \text{ es finito y no vacío} \right\}$$

Teorema 3.2.2 (Folkman-Rado-Sanders). *Dada una coloración $c : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ y un número $n \in \mathbb{N}$, existen elementos $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ tales que el conjunto $FS(x_1, \dots, x_n)$ es monocromático.*

Demostración. Sea \mathcal{U} un ultrafiltro no principal e idempotente sobre \mathbb{N} . Se procede por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ con la idea comentada en la observación 3.2.1, es decir, dado $A \in \mathcal{U}$ existen distintos elementos x_1, \dots, x_n tales que $FS(x_1, \dots, x_n) \subseteq A$. El caso $n = 1$ es evidente, supóngase entonces que la afirmación se cumple para n y sea $A \in \mathcal{U}$. Como \mathcal{U} es un ultrafiltro idempotente, se tiene que $A^* = A \cap \{x \in \mathbb{N} : \{y \in \mathbb{N} : x + y \in A\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. En particular, A^* es no vacío, por lo que se puede elegir $x_1 \in A^*$. Esto implica que $x_1 \in A$ y, más aún, $B = A \cap \{y \in \mathbb{N} : x_1 + y \in A\} \in \mathcal{U}$, por hipótesis de inducción existen x_2, \dots, x_{n+1} tales que $FS(x_2, \dots, x_{n+1}) \subseteq B$. Notar que si $z \in FS(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, entonces $z = x_1 \in A^* \subseteq A$, o $z \in FS(x_2, \dots, x_{n+1}) \subseteq B \subseteq A$, o $z = x_1 + y$ para algún $y \in FS(x_2, \dots, x_{n+1}) \subseteq B$, por definición esto es que $z = x_1 + y \in A$. En cualquier caso $z \in A$, lo que implica que $FS(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \subseteq A$.

Supóngase ahora que se tiene una coloración $c : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Por las propiedades de filtro de \mathcal{U} , se tiene que sólo uno de los conjuntos $\{x \in \mathbb{N} : c(x) = 0\}$ y $\{x \in \mathbb{N} : c(x) = 1\}$ pertenece a \mathcal{U} , se denota a dicho conjunto por $A \in \mathcal{U}$. Entonces, por la afirmación establecida en el párrafo anterior, existen elementos x_1, x_2, \dots, x_n tales que $FS(x_1, x_2, \dots, x_n) \subseteq A$. Lo que significa que el conjunto $FS(x_1, \dots, x_n)$ es monocromático. \square

Revisando cuidadosamente la prueba de la demostración 3.2.2, se puede notar que las mismas ideas funcionan para probar un resultado aún más fuerte, que ahora involucra infinitos elementos tales que el conjunto de sus sumas finitas es monocromático. Este resultado se conoce como “Teorema de Hindman”.

Teorema 3.2.3 (Hindman). *Dada una coloración $c : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, existe un conjunto infinito $X = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que el conjunto $FS(X)$ es monocromático.*

Demostración. Considerando las condiciones del teorema anterior, se debe observar que en el paso inductivo la elección de $x_1 \in A^*$ es independiente de n . En otras palabras, es

posible encontrar un x_1 tal que para cualquier n , x_1 es el primer elemento del conjunto de n elementos, que se define como X_n , que satisfacen $FS(X_n) \subseteq A$. Se toma x_1 fijo, se definen $B = A \cap \{y \in \mathbb{N} : x_1 + y \in A\} = A \cap A_{x_1}$ y $B^* = B \cap \{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : n + m \in B\} \in \mathcal{U}\}$. Dado que \mathcal{U} es un ultrafiltro idempotente, $B^* \in \mathcal{U}$. Ahora se elige $x_2 \in B^*$ fijo.

Se define $C = B \cap \{y \in \mathbb{N} : x_2 + y \in B\}$ y se aplica el mismo argumento inductivo que en la demostración del teorema 3.2.2: Por hipótesis de inducción existen n elementos x_3, \dots, x_{n+2} tales que $FS(x_3, \dots, x_{n+2}) \subseteq C$. Entonces, de manera similar al teorema anterior, se concluye que $FS(x_1, \dots, x_{n+2}) \subseteq C \subseteq A$ es monocromático para x_1, x_2 fijos. En otras palabras, es posible encontrar x_2 tal que para cualquier n , los elementos x_1, x_2 son dos elementos del conjunto X_n de n elementos que satisfacen $FS(X_n) \subseteq A$.

Fijando de manera inductiva x_k se obtiene una sucesión infinita tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $FS(x_1, x_2, \dots) \subseteq A$, por lo que es monocromático. Entonces el conjunto $X = \{x_1, \dots, x_k, \dots\}$ es tal que $FS(X)$ es monocromático. \square

3.3. Van der Waerden

Este teorema aprovecha la estructura aditiva para concluir que es posible encontrar una progresión aritmética monocromática, un hecho bastante sorprendente.

Teorema 3.3.1 (Van der Waerden). *Dada una coloración $c : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ y cualquier número finito l , existen números $a, b \in \mathbb{N}$ tales que el conjunto $\{a, a + b, a + 2b, \dots, a + (l - 1)b\}$ (que forman una progresión aritmética de tamaño l) es monocromático.*

Demostración. Se considera el conjunto

$$X = \{n + mx : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

de todos los polinomios (en la variable x) de grado 0 o 1 con coeficientes en \mathbb{N} . Este conjunto tiene estructura de semigrupo (conmutativo) equipado con la operación de adición usual. Más aún, el conjunto de los polinomios en X de grado exactamente 1

$$I = X \setminus \mathbb{N} = \{n + mx : n, m \in \mathbb{N}\},$$

es un ideal del semigrupo X . Con esto se tiene una situación donde X es un semigrupo que puede escribirse como la unión disjunta de $I \cup \mathbb{N}$, donde \mathbb{N} es un subsemigrupo e I es un ideal de X . Ahora se extienden estos semigrupos e ideales a la compactación de Čech-Stone, por lo que se tiene que βX es un semigrupo topológico-derecho que puede escribirse como la unión disjunta de $\bar{I} \cup \bar{\mathbb{N}}$, donde $\bar{\mathbb{N}} = \{\mathcal{U} \in \beta X : \mathbb{N} \in \mathcal{U}\}$ es un subsemigrupo cerrado e $\bar{I} = \{\mathcal{U} \in \beta X : I \in \mathcal{U}\}$ es un ideal cerrado de βX .

Más aún, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se puede construir el mapeo de evaluación

$$ev_k : X \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n + mx \mapsto n + mk$$

que resulta ser un homomorfismo de semigrupos y, al restringirse a \mathbb{N} , es simplemente la función identidad. A partir de aquí denotaremos por ev_k a la extensión continua que va de βX en $\bar{\mathbb{N}}$. Por el teorema 2.3.2, sabemos que $ev_k : \beta X \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$ es un homomorfismo continuo entre semigrupos cuya restricción a $\bar{\mathbb{N}}$ es la función identidad en este caso particular.

Ahora que se han establecido las herramientas, se considera una coloración $c : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$. Sea $\mathcal{U} \in \bar{\mathbb{N}}$ un ultrafiltro no principal, minimal, idempotente (minimal en $\bar{\mathbb{N}}$), y sea $\mathcal{V} \in \bar{I}$ un ultrafiltro no principal, minimal, idempotente (minimal en βX) que pertenece al ideal cerrado \bar{I} con $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$. Se fija un $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ y ev_k es un homomorfismo de semigrupos, se tiene que $ev_k(\mathcal{V}) \leq ev_k(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Con esto $ev_k(\mathcal{V}) \in \bar{\mathbb{N}}$ y \mathcal{U} se eligió para ser minimal en $\bar{\mathbb{N}}$, por lo tanto, se cumple que $ev_k(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$.

Ahora, como \mathcal{U} es un ultrafiltro y $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$, se cumple que $\{n \in \mathbb{N} : c(n) = 1\} \in \mathcal{U}$ o $\{n \in \mathbb{N} : c(n) = 0\} \in \mathcal{U}$. Se considera, sin pérdida de generalidad, que se cumple la primer afirmación y se procede a construir la progresión aritmética de longitud l cuyos elementos sean todos de color *uno*. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : c(n) = 1\}$, para cada $k \in \{0, \dots, l-1\}$ se tiene que $A \in \mathcal{U} = ev_k(\mathcal{V}) = \{B \subseteq X : ev_k^{-1}[B] \in \mathcal{V}\}$. En otras palabras, $ev_k^{-1}[A] \in \mathcal{V}$.

Como \mathcal{V} es un ultrafiltro, es cerrado bajo intersecciones finitas, por lo que

$$B = I \cap \left(\bigcap_{k=0}^{l-1} ev_k^{-1}[A] \right) \in \mathcal{V}$$

En particular, este conjunto es no vacío, por lo que podemos elegir un elemento $a + bx \in B$, como $a + bx \in I$, se tiene que $b \neq 0$, más aún, dado $k \in \{0, \dots, l-1\}$, el hecho de que $a + bx \in ev_k^{-1}[A]$ significa que $a + bk = ev_k(a + bx) \in A$ y así $c(a + bk) = 1$. Esto se aplica para cualquier $k \in \{0, \dots, l-1\}$, por lo que el conjunto $\{a, a + b, a + 2b, \dots, a + (l-1)b\}$ (con más de un elemento ya que $b \neq 0$) es monocromático de color 1. \square

Capítulo 4

Teorema de Gowers y su aplicación a la esfera positiva de c_0

En las secciones anteriores, la mayoría de los razonamientos fueron consecuencia de las propiedades de la compactación de Čech-Stone en \mathbb{N} , pero ahora es necesario definir un nuevo semigrupo discreto. Esta sección está dedicada a expandir muchos detalles de las ideas del artículo de W. Timothy Gowers, mencionado en la introducción. En dicho artículo, el autor presentó resultados acerca del conjunto $\mathbb{N}^{(<\omega)}$ (el conjunto de los subconjuntos finitos de \mathbb{N}), nosotros presentaremos una versión más contemporánea, en términos de funciones definidas sobre \mathbb{N} . Este enfoque más moderno se puede encontrar en el libro de Todorčevich [14].

4.1. Funciones de soporte finito

Consideramos en esta sección que k es un número natural fijo. En este texto, el soporte de una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ se refiere al siguiente conjunto

$$\text{supp}(f) = \{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq 0\}.$$

Definición 4.1.1. Dado $k \in \mathbb{N}$, se define el conjunto

$$\text{FIN}_k = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, k\} : \text{supp}(f) \text{ es finito y } k \in \text{rang}(f)\} \cup \{\mathbf{0}\},$$

donde $\mathbf{0}$ es la función constante cero. Dotamos al conjunto FIN_k con la siguiente operación:

$$(f + g)(n) = \text{mín}\{f(n) + g(n), k\}.$$

Observación 4.1.2. La suma está definida y es asociativa en todo FIN_k , aunque en realidad sólo será necesario sumar funciones con soportes disjuntos. Como la suma es una operación total, es evidente que el conjunto $(\text{FIN}_k, +)$ es un semigrupo discreto, por lo que su compactación de Čech-Stone, βFIN_k , es un semigrupo compacto.

Observación 4.1.3. La operación que definimos en 4.1.1, se puede extender al conjunto

$$\text{FIN}_{[1,k]} = \bigcup_{j=1}^k \text{FIN}_j,$$

de la siguiente manera: Si $f \in \text{FIN}_p$ y $g \in \text{FIN}_q$, entonces

$$(f + g)(n) = \min\{f(n) + g(n), r\}, \quad r = \max\{p, q\}.$$

Con esta definición no es difícil mostrar que FIN_k es un ideal de $\text{FIN}_{[1,k]}$.

Definición 4.1.4. Dado $k \in \mathbb{N}$ se tiene lo siguiente:

- Una **sucesión de bloques** es cualquier sucesión finita o infinita $B = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{FIN}_k$ tal que si $m < n$, entonces $\max(\text{supp}(b_m)) < \min(\text{supp}(b_n))$.
- Definimos la **operación tetris** $T : \text{FIN}_k \rightarrow \text{FIN}_{k-1}$ como $T(f)(n) = \max\{f(n) - 1, 0\}$.
- Dada una sucesión de bloques $B = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, el **subsemigrupo combinatorio generado por B** será la familia de vectores de la forma

$$TFU(B) = \{T^{(j_0)}(b_{n_0}) + \dots + T^{(j_l)}(b_{n_l}) : (b_{n_i})_{i=0}^l \text{ es una subsucesión creciente finita de } B \text{ y } 0 \in \{j_1, \dots, j_l\} \subseteq \{0, 1, \dots, k\}\}.$$

De manera muy similar a los teoremas de combinatoria mostrados en la sección anterior, el teorema de Gowers nos dice que para cualquier coloración de FIN_k , existe una sucesión de bloques tal que el subsemigrupo generado es monocromático. Para la prueba del teorema de Gowers, necesitamos una colección especial de ultrafiltros, por lo que son necesarias las siguientes definiciones.

Definición 4.1.5. Decimos que un ultrafiltro \mathcal{U} sobre FIN_k es **cofinito**, si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\{f \in \text{FIN}_k : \text{supp}(f) \cap \{0, 1, \dots, n\} = \emptyset\} \in \mathcal{U},$$

podemos escribir de manera equivalente esta condición como

$$\{f \in \text{FIN}_k : \min(\text{supp}(f)) > n\} \in \mathcal{U}.$$

Al conjunto de los ultrafiltros cofinitos sobre FIN_k lo denotaremos por γFIN_k .

Proposición 4.1.6. *El conjunto γFIN_k es subsemigrupo topológico cerrado de $(\beta FIN_k, +, \tau)$ con la suma de ultrafiltros y la topología de Stone que se definieron anteriormente.*

Demostración. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \gamma FIN_k$, primero veamos que $\mathcal{U} + \mathcal{V} \in \gamma FIN_k$. Por definición tenemos que para $A \in \mathcal{P}(FIN_k)$,

$$A \in \mathcal{U} + \mathcal{V} \iff \{f \in FIN_k : \{g \in FIN_k : f + g \in A\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}.$$

Para mostrar que $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ es un ultrafiltro cofinito hay que verificar que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \{f \in FIN_k : \{g \in FIN_k : \min(\text{supp}(f + g)) > n\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$ fijo, consideramos $f, g \in FIN_k$ tales que $\min(\text{supp}(f)) > n$ y $\min(\text{supp}(g)) > n$.

Por la definición de la suma, se tiene que $\min(\text{supp}(f + g)) = \min(\text{supp}(f))$ ó $\min(\text{supp}(f + g)) = \min(\text{supp}(g))$. En cualquier caso se cumple que $\min(\text{supp}(f + g)) > n$, por lo tanto

$$\{g \in FIN_k : \min(\text{supp}(g)) > n\} \subseteq \{g \in FIN_k : \min(\text{supp}(f + g)) > n\}.$$

Por las propiedades de ultrafiltro de \mathcal{V} , se sigue que $\{g \in FIN_k : \min(\text{supp}(f + g)) > n\} \in \mathcal{V}$. Más aún, hemos mostrado que

$$\{f \in FIN_k : \min(\text{supp}(f)) > n\} \subseteq \{f \in FIN_k : \{g \in FIN_k : \min(\text{supp}(f + g)) > n\} \in \mathcal{V}\},$$

por lo tanto

$$\{f \in FIN_k : \{g \in FIN_k : \min(\text{supp}(f + g)) > n\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}.$$

Ahora veamos que γFIN_k es cerrado. Sea $\mathcal{U} \in \beta FIN_k \setminus \gamma FIN_k$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{f \in FIN_k : \text{supp}(f) \cap \{0, \dots, n\} = \emptyset\} \notin \mathcal{U}$. Sea $A = \{f \in FIN_k : \text{supp}(f) \cap \{0, \dots, n\} \neq \emptyset\}$, entonces $\mathcal{U} \in \overline{A}$. Ahora, si tomamos $\mathcal{V} \in \overline{A}$, se tiene que $\{f \in FIN_k : \text{supp}(f) \cap \{0, \dots, n\} = \emptyset\} \notin \mathcal{V}$, lo que muestra que \mathcal{V} no es ultrafiltro cofinito. Así obtenemos que $\mathcal{U} \in \overline{A} \subseteq \beta FIN_k \setminus \gamma FIN_k$. \square

Corolario 4.1.7. *$(\gamma FIN_k, +)$ es semigrupo compacto con la topología de Stone.*

Corolario 4.1.8. *Al extender la operación definida en cada γFIN_j ($1 \leq j \leq k$) al conjunto*

$$\gamma FIN_{[1,k]} = \bigcup_{j=1}^k \gamma FIN_j,$$

dado que está bien definida la operación en $FIN_{[1,k]}$, se sigue que γFIN_k es ideal de $\gamma FIN_{[1,k]}$.

Proposición 4.1.9. *La extensión continua $\gamma T : \gamma \text{FIN}_k \rightarrow \gamma \text{FIN}_{k-1}$ de la operación tetris, que es la restricción $\gamma T = \beta T \upharpoonright_{\gamma \text{FIN}_k}$, es un homomorfismo suprayectivo para $k > 1$.*

Demostración. Sabemos por el teorema 2.3.2 que la extensión continua de T que va de βFIN_k en βFIN_{k-1} es homomorfismo.

Ahora veamos que al restringirla a γFIN_k , su imagen cae en γFIN_{k-1} . Dados $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{U} \in \gamma \text{FIN}_k$, se define $B_n = \{f \in \text{FIN}_{k-1} : \min(\text{supp}(f)) > n\}$, por la proposición 2.2.4, tenemos la siguiente cadena de equivalencias

$$\begin{aligned} B_n \in \gamma T(\mathcal{U}) &\iff T^{-1}(B_n) \in \mathcal{U} \\ &\iff \{f \in \text{FIN}_k : Tf \in B_n\} \in \mathcal{U} \\ &\iff \{f \in \text{FIN}_k : \min(\text{supp}(Tf)) > n\} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Como $\text{supp}(Tf) \subseteq \text{supp}(f)$, entonces $\min(\text{supp}(f)) \leq \min(\text{supp}(Tf))$. Del hecho de que \mathcal{U} es cofinito se sigue que $\{f \in \text{FIN}_k : \min(\text{supp}(Tf)) > n\} \in \mathcal{U}$, como se quería mostrar.

Por último, mostremos que la función $\gamma T : \gamma \text{FIN}_k \rightarrow \gamma \text{FIN}_{k-1}$ es suprayectiva. Dado $\mathcal{V} \in \gamma \text{FIN}_{k-1}$, consideramos $\mathcal{U} = \{T^{-1}[B] : B \in \mathcal{V}\}$. Entonces $A \in \gamma T(\mathcal{U}) \iff T^{-1}[A] \in \mathcal{U} \iff A \in \mathcal{V}$, por lo tanto $\mathcal{V} = \gamma T(\mathcal{U})$. \square

Hemos mostrado que para cualquier función tetris que consideremos, su extensión continua es homomorfismo suprayectivo y tenemos una descripción explícita de esta extensión. Si denotamos por T_j a la función tetris cuyo dominio está en FIN_j , podemos considerar la función tetris general $T : \text{FIN}_{[1,k]} \rightarrow \text{FIN}_{[1,k]}$ como $T \upharpoonright_{\text{FIN}_j} = T_j$. A partir de este punto, estamos considerando que T es la función tetris general y γT su extensión continua.

Para demostrar el teorema principal de esta sección será importante el siguiente lema.

Lema 4.1.10. *Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se puede encontrar un ultrafiltro idempotente $\mathcal{U}_k \in \gamma \text{FIN}_k$ tal que para cualesquiera $i < j$:*

- (1) $\mathcal{U}_i \geq \mathcal{U}_j$,
- (2) $\gamma T^{(j-i)}(\mathcal{U}_j) = \mathcal{U}_i$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre k . Para $k = 1$ tomamos cualquier ultrafiltro minimal idempotente \mathcal{U}_1 del semigrupo γFIN_1 . Supongamos que hemos construido los ultrafiltros idempotentes \mathcal{U}_j con $1 \leq j < k$, que satisfacen (1) y (2). Sea

$$S_k = \{\mathcal{V} \in \gamma \text{FIN}_k : \gamma T(\mathcal{V}) = \mathcal{U}_{k-1}\} = \gamma T^{-1}[\{\mathcal{U}_{k-1}\}].$$

Por el lema 4.1.9, sabemos que S_k es un subconjunto cerrado no vacío de γFIN_k . Más aún, sea $\rho_{\mathcal{V}} : \gamma \text{FIN}_k \rightarrow \gamma \text{FIN}_k$, definida como $\rho_{\mathcal{V}}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} + \mathcal{V}$ con $\mathcal{V} \in \gamma \text{FIN}_{k-1}$,

sabemos que está bien definida por el corolario 4.1.8 y es continua, por lo que conjunto $S_k + \mathcal{U}_{k-1} = \rho_{\mathcal{U}_{k-1}}^{-1}[S_k]$ es no vacío y cerrado de γFIN_k .

Veamos que $S_k + \mathcal{U}_{k-1}$ es subsemigrupo de γFIN_k , sean $\mathcal{V} + \mathcal{U}_{k-1}, \mathcal{W} + \mathcal{U}_{k-1} \in S_k + \mathcal{U}_{k-1}$.

Como $\mathcal{U}_{k-1} \leq \mathcal{U}_{k-2}$, por la definición del orden de ultrafiltros se tiene que $\mathcal{U}_{k-1} = \mathcal{U}_{k-1} + \mathcal{U}_{k-2} = \mathcal{U}_{k-2} + \mathcal{U}_{k-1}$, entonces

$$\gamma T(\mathcal{V} + \mathcal{U}_{k-1} + \mathcal{W}) = \mathcal{U}_{k-1} + \mathcal{U}_{k-2} + \mathcal{U}_{k-1} = \mathcal{U}_{k-1}.$$

Hay que notar que para el caso $k = 2$, el ultrafiltro \mathcal{U}_{k-2} , se puede pensar como el ultrafiltro generado por la constante cero.

Como $S_k + \mathcal{U}_{k-1}$ es compacto, por ser subconjunto cerrado de γFIN_k , por el lema de Ellis 1.3.1, existe un ultrafiltro \mathcal{W} idempotente que está en $S_k + \mathcal{U}_{k-1}$. Sea $\mathcal{V} \in S_k$ tal que $\mathcal{W} = \mathcal{V} + \mathcal{U}_{k-1}$. Ahora definimos $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_{k-1} + \mathcal{V} + \mathcal{U}_{k-1}$, notamos que $\mathcal{U}_k \in \gamma\text{FIN}_k$ y $\gamma T(\mathcal{U}_k) = \mathcal{U}_{k-1}$. Vemos que \mathcal{U}_k es idempotente, ya que

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_k + \mathcal{U}_k &= \mathcal{U}_{k-1} + \mathcal{V} + \mathcal{U}_{k-1} + \mathcal{U}_{k-1} + \mathcal{V} + \mathcal{U}_{k-1} \\ &= \mathcal{U}_{k-1} + \mathcal{W} + \mathcal{W} \\ &= \mathcal{U}_{k-1} + \mathcal{W} \\ &= \mathcal{U}_{k-1} + \mathcal{V} + \mathcal{U}_{k-1} \\ &= \mathcal{U}_k. \end{aligned}$$

También se verifica que $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_{k-1} + \mathcal{U}_k = \mathcal{U}_k + \mathcal{U}_{k-1}$, por lo tanto $\mathcal{U}_k \leq \mathcal{U}_{k-1}$. Con esto se ha mostrado el paso inductivo. \square

Estos lemas nos ayudan a probar la versión combinatoria del Teorema de Gowers, el cual se volvió trascendente en temas de combinatoria.

Teorema 4.1.1 (Gowers). *Para cualquier coloración finita de FIN_k existe una sucesión de bloques B de elementos en FIN_k tal que el semigrupo parcial generado por B es monocromático.*

Demostración. Dado $k \in \mathbb{N}$, consideramos primero una sucesión finita de ultrafiltros $\mathcal{U}_i \in \text{FIN}_i$ con $1 \leq i \leq k$ que satisfacen las condiciones del lema anterior. Dada una coloración, existe una única pieza P que pertenece a \mathcal{U}_k . Ahora vamos a construir recursivamente una sucesión infinita de bloques $\{f_n\}_{n=0}^\infty \subseteq \text{FIN}_k$ y por cada $l \in [0, k]$ una sucesión decreciente $A_0^l \supseteq A_1^l \supseteq \dots \supseteq A_n^l \supseteq \dots$ de elementos de \mathcal{U}_l tales que

- a) $A_0^k = P$,
- b) $f_n \in A_n^k$
- c) $T^{(k-l)}[A_n^k] = A_n^l$,
- d) $\{g \in \text{FIN}_k : T^{(k-i)}(f_n) + T^{(k-j)}(g) \in A_n^{\max\{i,j\}}\} \in \mathcal{U}_k$ para $1 \leq i, j \leq k$.

Para el primer paso recursivo, consideramos $A_0^l = T^{(k-l)}[P]$ con $1 \leq l \leq k$. Dados $i, j \in [1, k]$ y $r = \max\{i, j\}$, por la construcción de los ultrafiltros \mathcal{U}_l se cumple que

$$\mathcal{U}_r = \mathcal{U}_i + \mathcal{U}_j = \gamma T^{(k-i)}(\mathcal{U}_k) + \gamma T^{(k-j)}(\mathcal{U}_k). \quad (4.1-E1)$$

Es decir,

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{U}_r &\iff B \in \gamma T^{(k-i)}(\mathcal{U}_k) + \gamma T^{(k-j)}(\mathcal{U}_k) \\ &\iff \{f : \{g : f + g \in B\} \in \gamma T^{(k-j)}(\mathcal{U}_k)\} \in \gamma T^{(k-i)}(\mathcal{U}_k) \\ &\iff \{f : T^{-(k-j)}[\{g : f + g \in B\}] \in \mathcal{U}_k\} \in \gamma^{(k-i)}(\mathcal{U}_k) \\ &\iff \{f : \{g : f + T^{(k-j)}(g) \in B\} \in \mathcal{U}_k\} \in \gamma T^{(k-i)}(\mathcal{U}_k) \\ &\iff T^{-(k-i)}[\{f : \{g : f + T^{(k-j)}(g) \in B\} \in \mathcal{U}_k\}] \in \mathcal{U}_k \\ &\iff \{f : \{g : T^{(k-i)}(f) + T^{(k-j)}(g) \in B\} \in \mathcal{U}_k\} \in \mathcal{U}_k. \end{aligned}$$

Como $A_0^r \in \mathcal{U}_r$, quiere decir que $\{f : \{g : T^{(k-i)}(f) + T^{(k-j)}(g) \in A_0^r\} \in \mathcal{U}_k\} \in \mathcal{U}_k$. Por lo que el conjunto $C = \{f : \{g : T^{(k-i)}(f) + T^{(k-j)}(g) \in A_0^r\} \in \mathcal{U}_k\}$ es infinito. Como $P = A_0^k \in \mathcal{U}_k$, entonces $P \cap C = P \cap \{f : \{g : T^{(k-i)}(f) + T^{(k-j)}(g) \in A_0^r\} \in \mathcal{U}_k\} \neq \emptyset$. Así que existe al menos un $f_0 \in A_0^k$ tal que

$$\{g : T^{(k-i)}(f_0) + T^{(k-j)}(g) \in A_0^{\max\{i,j\}}\} \in \mathcal{U}_k.$$

Hemos encontrado el primer $f_0 \in \text{FIN}_k$ y el primer conjunto A_0^l ($1 \leq l \leq k$) que satisfacen las condiciones (a),(b),(c) y (d).

Consideremos ahora que hemos encontrado $f_0, \dots, f_n \in \text{FIN}_k$ y $A_0^l \supseteq A_1^l \supseteq \dots \supseteq A_n^l$ elementos de \mathcal{U}_l que cumplen (a),(b),(c) y (d). Para $i, j \in \{1, \dots, k\}$ y $m \leq n$ definimos

$$C_m^{i,j} = \{g \in \text{FIN}_k : T^{(k-i)}(f_m) + T^{(k-j)}(g) \in A_n^{\max\{i,j\}}\}. \quad (4.1-E2)$$

Por la hipótesis de inducción $C_m^{i,j} \in \mathcal{U}_k$ para todo $i, j \in [1, k]$ y $m \leq n$. Sean

$$A_{n+1}^k = A_n^k \cap \left(\bigcap_{1 \leq i, j \leq k, m \leq n} C_m^{i,j} \right), \quad (4.1-E3)$$

y

$$A_{n+1}^l = T^{(k-l)}[A_{n+1}^k], \quad (1 \leq l \leq k). \quad (4.1-E4)$$

Claramente $A_{n+1}^l \in \mathcal{U}_l$. De manera análoga al primer paso inductivo, le ecuación (4.1-E1) y el hecho de que $A_{n+1}^{\max\{i,j\}} \in \mathcal{U}_{\max\{i,j\}}$ implican que

$$A_{n+1}^k \cap \{f \in \text{FIN}_k : \{g \in \text{FIN}_k : T^{(k-i)}(f_{n+1}) + T^{(k-j)}(g) \in A_{n+1}^{\max\{i,j\}}\} \in \mathcal{U}_k\} \in \mathcal{U}_k.$$

más aún, como \mathcal{U}_k es cofinito, se tiene que $\{h \in \text{FIN}_k : \min(\text{supp}(h)) > \max(\text{supp}(f_n))\} \in \mathcal{U}_k$. De todo lo anterior se sigue que podemos encontrar $f_{n+1} \in A_{n+1}^k$ tal que

$$\{g \in \text{FIN}_k : T^{(k-i)}(f_{n+1}) + T^{(k-j)}(g) \in A_{n+1}^{\max\{i,j\}}\} \in \mathcal{U}_k,$$

y $\min(\text{supp}(f_{n+1})) > \max(\text{supp}(f_n))$. Esto finaliza la construcción recursiva.

Mostremos ahora que la sucesión de bloques $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que construimos genera un semigrupo combinatorio que está contenido en P . Afirmamos que, dado $p \in \mathbb{N}$, para cualesquiera $n_1 < \dots < n_p$ números naturales, $l_1, \dots, l_p \in \{1, \dots, k\}$ y $g \in A_{n_p}^{n_p}$ se cumple:

$$T^{(k-l_1)}(f_{n_1}) + T^{(k-l_2)}(f_{n_2}) + \dots + T^{(k-l_{p-1})}(f_{n_{p-1}}) + g \in A_{n_1}^{\max\{l_1, \dots, l_p\}}. \quad (4.1-E5)$$

Mostremos la afirmación por inducción sobre p . Para $p = 1$ es evidente que se cumple, incluso el caso $p = 2$ es directo por la propiedad (d) de la sucesión. Supongamos que la hipótesis de inducción se cumple siempre que formamos combinaciones de tamaño $p > 0$ como en la ecuación (4.1-E5). Consideramos $n_1 < \dots < n_p < n_{p+1}$ números naturales, $l_1, \dots, l_p, l_{p+1} \in \{1, \dots, k\}$ y $g \in A_{n_{p+1}}^{n_{p+1}}$. Sea

$$h = T^{(k-l_2)}(f_{n_2}) + \dots + T^{(k-l_p)}(f_{n_p}) + g.$$

Como h es una combinación de la forma (4.1-E5) de tamaño p , se sigue que $h \in A_{n_2}^{\max\{l_2, \dots, l_{p+1}\}}$.

Sea $l = \max\{l_2, \dots, l_{p+1}\}$, como $A_{n_2}^l = T^{(k-l)}[A_{n_2}^k]$, existe $b \in A_{n_2}^k$ tal que $T^{(k-l)}(b) = h$. Como $n_1 < n_2$, es claro que $n_1 + 1 \leq n_2$. Como la sucesión de conjuntos que se construyó es decreciente, se tiene que $b \in A_{n_2}^k \subseteq A_{n_1+1}^k$. De la ecuación (4.1-E2) se sigue en particular que $b \in C_{n_1}^{l_1, l}$, es decir

$$T^{(k-l_1)}(f_{n_1}) + T^{(k-l)}(b) \in A_{n_1}^{\max\{l_1, l\}}.$$

Con esto termina el paso inductivo. Notemos que cada elemento del semigrupo combinatorio tiene la forma (4.1-E5), haciendo $g = T^{k-l_p}(f_{n_p}) \in A_{n_p}^{n_p}$ y $k \in \{l_1, \dots, l_p\}$. Entonces

$$T^{(k-l_1)}(f_{n_1}) + \dots + T^{(k-l_{p-1})}(f_{n_{p-1}}) + T^{(k-l_p)}(f_{n_p}) \in A_{n_1}^{\max\{l_1, \dots, l_p\}} = A_{n_1}^k \subseteq A_0^k = P. \quad \square$$

Podemos considerar a los elementos de FIN_1 como subconjuntos finitos de \mathbb{N} , con esta identificación, la suma en FIN_1 se convierte en la unión de conjuntos y la operación Tetris no juega ningún papel importante. Considerando esto, es inmediata la siguiente versión del teorema de Hindman:

Corolario 4.1.11 (Hindman). *Para cualquier partición de FIN_1 , que coincide con la familia de todos los subconjuntos no vacíos de \mathbb{N} , existe una sucesión infinita $B = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos finitos de \mathbb{N} tal que la familia de todas las uniones de subfamilias finitas y no vacías de B es monocromática.*

Demostración. Es inmediato del teorema de Gowers para $k = 1$. □

4.2. La esfera positiva de c_0

En la rama de análisis matemático es bien sabido que el espacio

$$c_0 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\},$$

dotado de la norma supremo $\|\cdot\|_{\text{sup}}$, es un espacio de Banach. En esta sección estamos interesados en la esfera positiva de $X \subseteq c_0$, es decir,

$$PS_X = \{x \in X : \|x\|_{\text{sup}} = 1 \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0\}.$$

Al estar trabajando en un espacio normado, contamos también con la métrica natural que surge a partir de la norma. Por esto es importante recordar algunos hechos fundamentales de espacios métricos.

Definición 4.2.1. Sea (X, d) un espacio métrico, dado $\varepsilon > 0$ y $A \subseteq X$ se define

$$V(A, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, A) < \varepsilon\}.$$

Se dice que A es una ε -**red** de X si $X \subseteq V(A, \varepsilon)$.

Observación 4.2.2. Hay que notar que la condición que hay que cumplir para pertenecer a $V(A, \varepsilon)$ se relaciona con minorar un ínfimo, por lo que es importante saber equivalencias de esto. Por la definición de ínfimo se sabe que, dado $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y $c \in \mathbb{R}$,

$$c \leq \inf A, \quad \iff \quad \forall a \in A, c \leq a.$$

Al negar ambos lados se tiene la siguiente equivalencia:

$$c > \inf A, \quad \iff \quad \exists a \in A : c > a.$$

Teniendo esto en cuenta, la condición $d(y, A) = \inf_{a \in A} d(y, a) < \varepsilon$ equivale a pedir que exista $a \in A$ tal que $d(y, a) < \varepsilon$. De esta forma, si A es una ε -red, entonces el espacio X se puede ver como la siguiente unión de bolas abiertas:

$$V(A, \varepsilon) = \{y \in X : \exists a \in A : d(y, a) < \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon).$$

Es por esto que las ε -redes son muy útiles para caracterizar los espacios métricos totalmente acotados.

En lo siguiente nos enfocaremos en construir los elementos que nos permitirán encontrar una δ -red para PS_{c_0} que replique las propiedades del Teorema de Gowers.

Proposición 4.2.3. Dado $\delta \in (0, 1)$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{(1+\delta)^{k-1}} < \frac{\delta}{2}. \quad (4.2-E6)$$

Demostración. Sabemos que $0 < \delta < 1$, luego

$$0 < \frac{1}{(\delta+1)^{m+1}} < \frac{1}{(\delta+1)^m} < \frac{1}{(\delta+1)^{m-1}} < \dots < \frac{1}{\delta+1} < 1.$$

Lo que implica que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(\delta+1)^{m-1}} = 0.$$

Para $\delta > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que se cumple (4.2-E6). \square

Observación 4.2.4. Como se mostró en la demostración anterior,

$$0 < \frac{1}{(1+\delta)^{k-1}} < \dots < \frac{1}{1+\delta} < 1,$$

por lo que $\left\{0, \frac{1}{(1+\delta)^{k-1}}, \frac{1}{(1+\delta)^{k-2}}, \dots, \frac{1}{1+\delta}, 1\right\}$ es una partición no uniforme de $[0, 1]$.

En temas de análisis suele ser más cómodo trabajar con particiones uniformes, en los casos que no ocurre esto es útil definir la **mall**a de una partición. Si $P = \{r_0, r_1, \dots, r_m\}$ es una partición de un intervalo, su mall

$$\|P\| = \max\{|r_{j+1} - r_j| : j = 0, 1, \dots, m-1\}.$$

El siguiente enunciado ejemplifica la utilidad que tiene definir la mall

Proposición 4.2.5. Dados $\delta \in (0, 1)$ y $k \in \mathbb{N}$ que satisfacen (4.2-E6), el conjunto

$$P = \left\{0, \frac{1}{(1+\delta)^{k-1}}, \frac{1}{(1+\delta)^{k-2}}, \dots, \frac{1}{1+\delta}, 1\right\}$$

es una partición de $[0, 1]$ tal que $\|P\| < \delta$.

Demostración. Dado $m \in \{1, \dots, k-2\}$ tenemos que

$$\frac{\delta}{1+\delta} = \left|1 - \frac{1}{1+\delta}\right| = |1+\delta|^m \left|\frac{1}{(1+\delta)^m} - \frac{1}{(1+\delta)^{m+1}}\right| > \left|\frac{1}{(1+\delta)^m} - \frac{1}{(1+\delta)^{m+1}}\right|.$$

De donde se sigue que

$$\|P\| = \max\left\{\frac{\delta}{1+\delta}, \frac{1}{(1+\delta)^{k-1}}\right\}.$$

Como

$$\frac{\delta}{1+\delta} < \delta \quad \text{y} \quad \frac{1}{(1+\delta)^{k-1}} < \frac{\delta}{2},$$

Se sigue la conclusión. \square

Definición 4.2.6. Dados $\delta \in (0, 1)$ y $k \in \mathbb{N}$ que satisfacen (4.2-E6), se define el conjunto

$$\Delta_k = \left\{ \xi : \mathbb{N} \rightarrow \left\{ 0, \frac{1}{(1+\delta)^{k-1}}, \frac{1}{(1+\delta)^{k-2}}, \dots, \frac{1}{1+\delta}, 1 \right\} : \text{supp}(\xi) \text{ es finito y } 1 \in \text{rang}(\xi) \right\},$$

donde $\text{supp}(\xi) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$.

Lema 4.2.7. *Dados $\delta \in (0, 1)$ y $k \in \mathbb{N}$ que satisfacen (4.2-E6), el conjunto Δ_k es una δ -red de PS_{c_0} .*

Demostración. Primero caracterizamos a los elementos de PS_{c_0} . Dada una sucesión $x \in PS_{c_0}$, se sabe que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = |x_n| < 1/2$ para todo $n \geq N$. Como se sabe que $\|x\|_{\text{sup}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = 1$ y ningún valor en $\{x_n : n \geq N\}$ es cota superior de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces el supremo se alcanza para alguno de los demás valores, es decir

$$\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{x_n : n \leq N\}$$

Como el segundo conjunto es finito, el supremo coincide con el máximo, por lo que existe algún $1 \leq m \leq N$ tal que $x_m = 1$. De esta forma se pueden caracterizar a los elementos de PS_{c_0} como sucesiones tales que

- i) $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$,
- ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < \varepsilon$ para $n \geq N$,
- iii) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m = 1$.

Es inmediato que $\Delta_k \subseteq PS_{c_0}$. Veamos ahora que $PS_{c_0} \subseteq V(\Delta_k, \delta)$.

Hay que recordar que el conjunto $P = \left\{ 0, \frac{1}{(1+\delta)^{k-1}}, \frac{1}{(1+\delta)^{k-2}}, \dots, \frac{1}{1+\delta}, 1 \right\}$ genera una partición del intervalo $[0, 1]$ y denotamos la malla de la partición por $\|P\|$. Sea $x \in PS_{c_0}$, consideramos $N \in \mathbb{N}$ que satisface (ii) para $\varepsilon = \frac{1}{(1+\delta)^{k-1}}$. Sea $\xi \in \Delta_k$ definida como

$$\xi_n = \begin{cases} 0, & \text{si } x_n \in [0, \frac{1}{(1+\delta)^{k-1}}), \\ \frac{1}{(1+\delta)^{k-m}}, & \text{si } x_n \in \left[\frac{1}{(1+\delta)^{k-m}}, \frac{1}{(1+\delta)^{k-(m+1)}} \right) \text{ con } m \in \{1, \dots, k-1\}, \\ 1, & x_n = 1. \end{cases}$$

Hay que notar que $1 \in \text{rang}(\xi)$ y $\text{supp}(\xi)$ es finito ya que $\xi_n = 0, \forall n \geq N$. Por la proposición 4.2.5 se sabe que si $n \leq N$, se tiene que

$$|x_n - \xi_n| \leq \|P\| < \delta,$$

y que para $n \geq N$ se cumple

$$|x_n - \xi_n| \leq \frac{1}{(1+\delta)^{k-1}} < \frac{\delta}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se sigue que $\|x - \xi\|_{\text{sup}} = \sup\{|x_n - \xi_n| : n \leq N\} = \max\{|x_n - \xi_n| : n \leq N\} < \delta$. Es inmediato por la observación 4.2.2 que $x \in V(A, \delta)$, como se quería mostrar. \square

Lema 4.2.8. *Dados $\delta \in (0, 1)$ y $k \in \mathbb{N}$ que satisfacen (4.2-E6), el conjunto Δ_k es parcialmente isomorfo a FIN_k como semigrupo.*

Demostración. En este caso, vamos a encontrar una función Ψ que actúa como isomorfismo entre Δ_k y FIN_k cuando se consideran funciones de soportes disjuntos. Se define $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ como

$$\varphi(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(\frac{1}{1+\delta})}, \quad \varphi(0) = +\infty.$$

Es fácil comprobar que φ es decreciente, positiva para valores menores que 1 y negativa para valores mayores. Además

$$\varphi\left((1+\delta)^{-l}\right) = l \text{ para } l \in \mathbb{N}. \quad (4.2-E7)$$

Ahora definimos $\Phi : PS_{c_0} \rightarrow FIN_k$ como

$$\Phi(\xi)(n) = \text{máx}\{k - \lfloor \varphi(\xi(n)) \rfloor, 0\}.$$

De la ecuación (4.2-E7) se sigue que Φ es suprayectiva pero no inyectiva, además

$$\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y),$$

si $x, y \in PS_{c_0}$ y $\text{supp}(x) \cap \text{supp}(y) = \emptyset$. Consideramos entonces la restricción $\Psi = \Phi \upharpoonright_{\Delta_k}$, de este modo $\text{supp}(\Phi(x)) = \text{supp}(x)$, con esto se tiene una biyección entre Δ_k y FIN_k que es homomorfismo cuando se consideran funciones de soporte disjunto. \square

Observación 4.2.9. En el lema anterior se encontró un isomorfismo parcial entre Δ_k y FIN_k , en este caso es suficiente para traducir el teorema de Gowers ya que la herramienta principal son los ultrafiltros cofinitos y, como se ha visto en varias demostraciones, estos siempre permiten encontrar funciones con soportes disjuntos. En resumen, aún si no está definida la operación para todo FIN_k , con los ultrafiltros cofinitos siempre se pueden encontrar elementos que sí se pueden sumar.

Lema 4.2.10. *Sean $\xi \in \Delta_k$ y $\lambda \in [0, 1]$, considerando las funciones definidas en el lema 4.2.8 tenemos que*

$$\Phi(\lambda \cdot \xi) = T^j(\Phi(\xi)), \quad j = \lfloor \varphi(\lambda) \rfloor,$$

donde T es la función tetris y se toma como convenio que $T^j(\xi)(n) = 0$ si $j > k$.

Demostración. Sabemos por la ecuación 4.2-E7 que $\varphi(\xi(n)) = l \in \mathbb{N}$, entonces

$$\Phi(\lambda\xi)(n) = k - \lfloor \varphi(\lambda) + \varphi(\xi(n)) \rfloor = k - \lfloor \varphi(\lambda) + l \rfloor = k - l - \lfloor \varphi(\lambda) \rfloor.$$

La conclusión es inmediata. \square

Observación 4.2.11. Aunque en el lema anterior se demuestra que la función Φ admite todos los valores escalares $\lambda \in [0, 1]$, sólo se necesita tomar los escalares de la forma $\frac{1}{(1+\delta)^l}$ para actuar como la función tetrís. De modo que está bien definido lo siguiente

$$\Psi \left(\frac{1}{(1+\delta)^l} \cdot \xi \right) = T^l(\Psi(\xi)), \quad l \in \mathbb{N}.$$

Esto muestra que el semigrupo combinatorio de una sucesión de bloques $B = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{FIN}_k$ se corresponde con un subconjunto de c_0 de la forma

$$\left\{ \frac{1}{(1+\delta)^{j_0}} \cdot \Psi^{-1}(b_{n_0}) + \cdots + \frac{1}{(1+\delta)^{j_l}} \cdot \Psi^{-1}(b_{n_l}) : (\Psi^{-1}(b_{n_i}))_{i=0}^l \text{ es una subsucesión creciente finita de } B \text{ y } 0 \in \{j_1, \dots, j_l\} \subseteq \{0, 1, \dots, k\} \right\}. \quad (4.2-E8)$$

Corolario 4.2.12. *Para cualquier $\delta \in (0, 1)$ existe una δ -red Δ en PS_{c_0} con la propiedad de que cualquier partición finita de Δ existe un subespacio infinito de bloques X de c_0 tal que PS_X está incluido en una de las piezas de la partición.*

Demostración. Sea Δ la δ -red encontrada como en el lema 4.2.7. Se sigue del lema 4.2.8 que Δ es parcialmente isomorfo a FIN_k (la condición de homomorfismo es válida sólo para funciones con soportes disjuntos). Una partición de Δ induce una partición en FIN_k por medio de la biyección Ψ del lema 4.2.8, se sigue del teorema de Gowers (4.1.1) que existen P , un elemento de la partición de FIN_k , y $B = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{FIN}_k$ una sucesión infinita de bloques tales que $TFU(B) \subseteq P$.

Sea $X = \ell(\{\Psi^{-1}(b_n) : n \in \mathbb{N}\})$, como el conjunto $(\Psi^{-1}(b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de bloques en c_0 , es evidente que cualquier combinación lineal tiene una única representación, de esto se sigue que X es un subespacio infinito de c_0 . De la observación 4.2.11 se sigue que $\Psi^{-1}(TFU(B)) \subseteq \Delta$ es de la forma (4.2-E8). Cualquier elemento de PS_X es de la forma

$$\lambda_{j_0} \cdot \Psi^{-1}(b_{n_0}) + \cdots + \lambda_{j_l} \cdot \Psi^{-1}(b_{n_l}),$$

donde existe al menos un $\alpha \in \{j_0, \dots, j_l\}$ y un $\beta \in \{n_0, \dots, n_l\}$ tales que $\lambda_\alpha = 1$ y $1 \in \text{rang}(\Psi^{-1}(b_\beta))$, de la proposición 4.2.5, se sigue que $\Psi^{-1}(TFU(B))$ es una δ -red de PS_X . Entonces $PS_X \subseteq \Psi^{-1}(TFU(B)) \subseteq \Psi^{-1}(P)$, por lo que $\Psi^{-1}(P)$ es la pieza de la partición que se buscaba. \square

4.3. Funciones de Lipschitz definidas en c_0

En esta sección final se presenta una versión “aproximativa” del Teorema de Gowers, que será útil para extender los resultados de la esfera positiva de c_0 a toda la esfera, estos resultados nos permitirán dar una conclusión muy interesante sobre todas las funciones de Lipschitz definidas en c_0 .

Definición 4.3.1. Dado $k \in \mathbb{N}$, se define FIN_k^\pm como el conjunto de todas las funciones de soporte finito

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \{-k, -(k-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, k-1, k\}$$

tales que $-k$ o k están en $\text{rang}(f)$.

Con la suma definida punto a punto se verifica fácilmente que $(\text{FIN}_k^\pm, +)$ es un semigrupo. En este conjunto se tienen inversos aditivos, por lo que para cualquier conjunto $B \subseteq \text{FIN}_k^\pm$ se puede definir

$$-B = \{-f, f \in B\}.$$

En este contexto se puede extender la operación tetris $T : \text{FIN}_k^\pm \rightarrow \text{FIN}_{k-1}^\pm$ definida de la siguiente manera

$$T(f)(n) = \begin{cases} f(n) - 1, & \text{si } f(n) > 0, \\ 0, & \text{si } f(n) = 0, \\ f(n) + 1, & \text{si } f(n) < 0. \end{cases}$$

Una sucesión de bloques de elementos en FIN_k^\pm se define del mismo modo que en la definición 4.1.4. Un subsemigrupo combinatorio de FIN_k^\pm generado por una sucesión de bloques $B = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de funciones de la forma

$$\epsilon_0 T^{(j_0)}(b_{n_0}) + \epsilon_1 T^{(j_1)}(b_{n_1}) + \dots + \epsilon_l T^{(j_l)}(b_{n_l}),$$

donde $\epsilon_i = \pm 1$ para $0 \leq i \leq l$, $n_0 < \dots < n_l$ es una sucesión finita de índices del conjunto B y $0 \in \{j_1, \dots, j_l\} \subseteq \{0, \dots, k-1\}$. En este capítulo también ocuparemos ultrafiltros cofinitos.

Definición 4.3.2. Dado $A \subseteq \text{FIN}_k^\pm$, denotamos

$$(A)_\varepsilon = \{q \in \text{FIN}_k^\pm : \exists p \in A, \|p - q\|_{\text{sup}} \leq \varepsilon\}.$$

Decimos que un ultrafiltro cofinito $\mathcal{U} \in \gamma \text{FIN}_k^\pm$ es **subsímétrico** si $-(A)_1 \in \mathcal{U}$ para cada $A \in \mathcal{U}$.

Observación 4.3.3. Hay que notar que una condición equivalente de pertenecer al conjunto $-(B)_1$ es la siguiente:

$$f \in -(B)_1 \iff d_{\text{sup}}(-f, B) \leq 1,$$

donde d_{sup} es la métrica inducida por la norma supremo. Con el uso de la distancia a un conjunto se evita el uso de un cuantificador, lo que hace más sencilla la condición.

Como en la sección 4.1, se puede probar de manera análoga que la operación de FIN_k^\pm define la operación en el espacio de ultrafiltros cofinitos γFIN_k^\pm ($k \geq 1$) y lo convierte en un semigrupo compacto. Además, existe una extensión de la función tetrís

$$\gamma T : \gamma\text{FIN}_k^\pm \rightarrow \text{FIN}_{k-1}^\pm,$$

que resulta ser un homomorfismo continuo. Sea S_k^\pm la colección de todos los ultrafiltros subsimétricos cofinitos sobre FIN_k^\pm . El siguiente lema es consecuencia directa de la definición del S_k^\pm y la definición de la topología de γFIN_k^\pm .

Lema 4.3.4. S_k^\pm es un subsemigrupo cerrado de γFIN_k^\pm .

Demostración. La demostración de que S_k^\pm es cerrado con la topología de Stone es la misma que en 4.1.6. Veamos que este conjunto es semigrupo. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in S_k^\pm$ y $A \in \mathcal{U} + \mathcal{V}$.

Queremos demostrar que $-(A)_1 \in \mathcal{U} + \mathcal{V}$, por la observación 4.3.3 es equivalente a que

$$\{f \in \gamma\text{FIN}_k^\pm : \{g \in \gamma\text{FIN}_k^\pm : d_{\text{sup}}(-(f+g), A) \leq 1\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}. \quad (4.3\text{-E9})$$

Utilizando la notación 2.3.3, denotamos

$$\mathcal{C} = \{f \in \gamma\text{FIN}_k^\pm : A/f \in \mathcal{V}\}.$$

Sabemos que $A \in \mathcal{U} + \mathcal{V}$ si y sólo si $\mathcal{C} \in \mathcal{U}$. Como \mathcal{U} es subsimétrico, se tiene que $-(\mathcal{C})_1 \in \mathcal{U}$. Sea $p \in -(\mathcal{C})_1$, por ser \mathcal{U} ultrafiltro cofinito se puede encontrar $p' \in \mathcal{C} \cap \{h \in \text{FIN}_k^\pm : \text{mín sup}(h) > \text{máx sup}(p)\}$ tal que $d_{\text{sup}}(-p, p') \leq 1$. Cabe recalcar que se utilizó la propiedad de ser cofinito del ultrafiltro para que la adición sea más sencilla, pues las funciones ahora tienen soportes disjuntos.

Como $p' \in \mathcal{C}$, entonces $A/p' = \{g \in \gamma\text{FIN}_k^\pm : p' + g \in A\} \in \mathcal{V}$. Como \mathcal{V} es cofinito y subsimétrico, existe $q \in -(A/p')_1 \cap \{h \in \text{FIN}_k^\pm : \text{mín sup}(h) > \text{máx sup}(p')\}$ tal que $d_{\text{sup}}(-p, p') \leq 1$. Como $A/p' \in \mathcal{V}$ y \mathcal{V} es cofinito, existe $q' \in (A/p') \cap \{h \in \text{FIN}_k^\pm : \text{mín sup}(h) > \text{máx sup}(q)\}$. En resumen, encontramos $p, q, p', q' \in \text{FIN}_k^\pm$ tales que

$$\text{supp}(p) < \text{supp}(p') < \text{supp}(q) < \text{supp}(q') \quad (4.3\text{-E10a})$$

$$d_{\text{sup}}(-p, p') \leq 1 \quad (4.3\text{-E10b})$$

$$d_{\text{sup}}(-q, q') \leq 1 \quad (4.3\text{-E10c})$$

$$p' + q' \in A \quad (4.3\text{-E10d})$$

De la condición (4.3-E10a) se sigue que las funciones tienen soportes disjuntos. Esto, junto con (4.3-E10b) y (4.3-E10c) implican que p' y q' valen cero, salvo en una cantidad finita de puntos en los que valen ± 1 , con esto se tiene que $d_{\text{sup}}(-p - q, p' + q') \leq 1$. Recordando la condición (4.3-E10d), notamos que hemos mostrado

$$\begin{aligned} &-(A/p')_1 \cap \{h \in \text{FIN}_k^\pm : \text{mín sup}(h) > \text{máx sup}(p')\} \\ &\subseteq \{g \in \gamma\text{FIN}_k^\pm : d_{\text{sup}}(-(p' + g), A) \leq 1\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{g \in \gamma\text{FIN}_k^\pm : d_{\text{sup}}(-(p' + g), A) \leq 1\} \in \mathcal{V}$. Lo que implica que

$$-(\mathcal{C})_1 \subseteq \{f \in \gamma\text{FIN}_k^\pm : \{g \in \gamma\text{FIN}_k^\pm : d_{\text{sup}}(-(f + g), A) \leq 1\} \in \mathcal{V}\},$$

hemos mostrado que se cumple (4.3-E9), lo que concluye la demostración. \square

Lema 4.3.5. $S_k^\pm \neq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sean $\mathcal{V} \in \gamma\text{FIN}_k^\pm$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & \gamma T^{(k-1)}(\mathcal{V}) - \gamma T^{(k-1)}(\mathcal{V}) + \gamma T^{(k-2)}(\mathcal{V}) - \gamma T^{(k-2)}(\mathcal{V}) + \\ & \cdots + \gamma T(\mathcal{V}) - \gamma T(\mathcal{V}) + \mathcal{V} - \mathcal{V} + \gamma T(\mathcal{V}) - \gamma T(\mathcal{V}) + \\ & \cdots + \gamma T^{(k-2)}(\mathcal{V}) - \gamma T^{(k-2)}(\mathcal{V}) + \gamma T^{(k-1)}(\mathcal{V}) - \gamma T^{(k-1)}(\mathcal{V}). \end{aligned}$$

Se puede verificar que \mathcal{U} es subsimétrico. Probamos el caso $k = 2$ para evitar que la notación sea demasiado pesada.

Consideramos sin pérdida de generalidad que las funciones elegidas tienen soportes disjuntos. Sea $A \in \gamma T(\mathcal{U}) - \gamma T(\mathcal{U}) + \mathcal{U} - \mathcal{U} + \gamma T(\mathcal{U}) - \gamma T(\mathcal{U})$ y se define

$$B = \{x : \{y : \{z : \{w : \{a : \{b : T(x) - T(y) + z - w + T(a) - T(b) \in A\} \in \mathcal{U} \cdots\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}.$$

Fijemos $x \in B$ y sea $C_1 = \{y : \{z : \{w : \{a : \{b : T(x) - T(y) + z - w + T(a) - T(b) \in A\} \in \mathcal{U} \cdots\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Similarmente, $C_2 = \{z : \{w : \{a : \{b : T(x) - T(y) + z - w + T(a) - T(b) \in A\} \in \mathcal{U} \cdots\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$ y se definen C_3, C_4 hasta obtener $C_5 = \{b : T(x) - T(y) + z - w + T(a) - T(b) \in A\}$. Con esto, definimos $D = \{T(y) - T(z) + w - a + T(b) - T(c) : y \in C_1, z \in C_2, w \in C_3, a \in C_4, b \in C_5, c \in \text{FIN}_k^\pm\}$. Notamos que en esta construcción C_1 depende de la elección de x , C_2 depende de elegir x y y , esto ocurre sucesivamente para los demás C_i . Con esta construcción afirmamos que

- i) $D \in \gamma T(\mathcal{U}) - \gamma T(\mathcal{U}) + \mathcal{U} - \mathcal{U} + \gamma T(\mathcal{U}) - \gamma T(\mathcal{U})$,
- ii) $D \subseteq -(A)_1$.

Para mostrar *i*) hay que notar que $\{y : \{z : \{w : \{a : \{b : \{c : T(y) - T(z) + w - a + T(b) - T(c) \in D\} \in \mathcal{U} \cdots\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$ contiene a C_1 . Tomando $y \in C_1$ se elige después $z \in C_2$ y de manera sucesiva se elijen $w \in C_3, a \in C_4, b \in C_5, c \in \text{FIN}_k^\pm$. Por la definición de D se tiene que

$$T(y) - T(z) + w - a + T(b) - T(c) \in D \iff T(x) - T(y) + z - w + T(a) - T(b) \in A, \quad (4.3-E11)$$

para cualquier $c \in \text{FIN}_k^\pm$. Se sigue que $\{b : \{c : T(y) - T(z) + w - a + T(b) - T(c) \in D\} \in \mathcal{U}\} \supseteq C_5$, por lo que $\{a : \{b : \{c : T(y) - T(z) + w - a + T(b) - T(c) \in D\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}\} \supseteq C_4$, siguiendo este razonamiento se obtiene que $\{y : \{z : \{w : \{a : \{b : T(y) - T(z) + w - a + T(b) - T(c) \in D\} \in \mathcal{U} \cdots\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}\} \supseteq C_1$.

Para demostrar *ii*) notamos que los elementos de D son de la forma $T(y) - T(z) + w - a + T(b) - T(c)$ en donde y, z, w, a, b y c son tales que $T(x) - T(y) + z - w + T(a) - T(b) \in A$, por lo tanto $-T(x) + T(y) - z + w - T(a) + T(b) \in -A$. Notamos que, como todas las funciones distintas tienen soportes disjuntos, $d(T(y) - T(z) + w - a + T(b) - T(c), -T(x) + T(y) - z + w - T(a) + T(b))$ depende únicamente de lo siguiente:

- La distancia de $d(-T(z), -z)$, que es a lo más 1,
- la distancia de $d(-a, -T(a))$, que es a lo más 1,
- el hecho de que $-T(x) \in \text{FIN}_1^\pm$, por lo que $d(-T(x), 0) \leq 1$.

Se concluye que $T(y) - T(z) + w - a + T(b) - T(c) \in -(A)_1$. \square

Lema 4.3.6. $\gamma T(\mathcal{U}) \in S_{k-1}^\pm$ para todo $\mathcal{U} \in S_k^\pm$.

Demostración. Primero notamos que T es lineal e isométrica con respecto a la norma supremo. Veamos que $\gamma T(\mathcal{U})$ es ultrafiltro subsimétrico. Sea $A \in \gamma T(\mathcal{U})$, sabemos que $T^{-1}[A] \in \mathcal{U}$, por lo tanto $-(T^{-1}[A])_1 \in \mathcal{U}$. Veamos que

$$-(T^{-1}[A])_1 \subseteq T^{-1}[-(A)_1]. \quad (4.3-E12)$$

Sea $f \in -(T^{-1}[A])_1$, por la observación 4.3.3, sabemos que $d_{\text{sup}}(-f, T^{-1}[A]) \leq 1$, entonces existe $g \in \text{FIN}_k^\pm$ tal que $d_{\text{sup}}(-f, g) \leq 1$ y $T(g) \in A$. Por la propiedad de isometría se tiene que $d_{\text{sup}}(-T(f), T(g)) \leq 1$, por lo que $T(f) \in -(A)_1$. Con esto mostramos (4.3-E12), por lo tanto $-(A)_1 \in \gamma T(\mathcal{U})$. \square

De esta forma, para cada $k \geq 1$ existe una función tetrís que actúa sobre FIN_k^\pm . Igual que en la sección 4.1, se puede considerar una extensión que abarque todos los FIN_k^\pm con $k \geq 1$ y su extensión continua γT .

Lema 4.3.7. Existe una sucesión $\mathcal{U}_j \in S_j^\pm$ ($1 \leq j \leq k$) tal que para todo $1 \leq i \leq j \leq k$:

- i)* $\mathcal{U}_i + \mathcal{U}_i = \mathcal{U}_i$,
- ii)* $\mathcal{U}_i + \mathcal{U}_j = \mathcal{U}_j + \mathcal{U}_i = \mathcal{U}_j$ (i.e. $\mathcal{U}_i \geq \mathcal{U}_j$),
- iii)* $\gamma T^{(j-i)}(\mathcal{U}_j) = \mathcal{U}_i$.

Demostración. Sea $R_i^\pm = T^{(k-i)}[S_k^\pm]$ ($1 \leq i \leq k$). Por el lema 4.3.4, sabemos que S_k^\pm es compacto, por lo tanto R_i^\pm es subsemigrupo compacto de S_i^\pm y $T^{(j-i)} : R_j^\pm \rightarrow R_i^\pm$ es suprayectiva para $1 \leq i \leq j \leq k$. Construiremos una sucesión de ultrafiltros $\mathcal{U}_j \in R_j^\pm$ ($1 \leq i \leq k$) que satisfaga (1) – (3). Sea \mathcal{U}_1 un ultrafiltro idempotente arbitrario sobre en R_1^\pm . Supongamos que se han construido los ultrafiltros $\mathcal{U}_i \in R_i^\pm$ con ($1 \leq i < j$) que satisfacen (1) – (3). Sea

$$P_j^\pm = \{x \in R_j^\pm : T(x) \in \mathcal{U}_{j-1}\}.$$

Entonces P_j^\pm es un subsemigrupo cerrado no vacío de R_j^\pm . Igual que en la prueba del lema 4.1.10, se verifica que $P_j^\pm + \mathcal{U}_{j-1}$ es un subsemigrupo cerrado de R_j^\pm , por lo que se puede elegir un ultrafiltro idempotente \mathcal{W} en $P_j^\pm + \mathcal{U}_{j-1}$. Sea $\mathcal{V} \in P_j^\pm$ tal que $\mathcal{W} = \mathcal{V} + \mathcal{U}_{j-1}$. Sea

$$\mathcal{U}_j = \mathcal{U}_{j-1} + \mathcal{V} + \mathcal{U}_{j-1}.$$

De manera análoga al lema 4.1.10, se demuestra que $\mathcal{U}_j \in R_j^\pm$ satisface (1) – (3). \square

El resultado es la siguiente versión del Teorema de Gowers:

Teorema 4.3.1 (Gowers). *Para cualquier partición finita de FIN_k^\pm , existe una pieza P de la partición tal que $(P)_1$ contiene un semigrupo combinatorio de FIN_k^\pm generado por una sucesión infinita de bloques.*

Demostración. Sea \mathcal{U}_j ($1 \leq j \leq k$) la sucesión de ultrafiltros dada por el lema 4.3.7. Sea P una pieza de la partición tal que $P \in \mathcal{U}_k$. Como \mathcal{U}_k es subsimétrico, sabemos que $-(P)_1 \in \mathcal{U}_k$ y $P \subseteq (P)_1$. Entonces $(P)_1 \cap -(P)_1$ es un elemento simétrico de \mathcal{U}_k , es decir $-((P)_1 \cap -(P)_1) = (P)_1 \cap -(P)_1 \in \mathcal{U}_k$. Definiremos una sucesión de bloques $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ y una sucesión decreciente $\{A_n^l\}_{n=0}^\infty$ ($1 \leq l \leq k$), tales que

- (1) $A_0^k = (P)_1 \cap -(P)_1$, $A_n^l = T^{(k-l)}[A_n^k]$,
- (2) $A_n^l = -A_n^l \in \mathcal{U}_l$,
- (3) $\pm f_n \in A_n^k$ y $\pm T^{(k-l)}(f_n) \in A_n^l$,
- (4) $\{y \in FIN_j^\pm : \pm T^{(k-i)}(f_n) \pm y \in A_n^{\max\{i,j\}}\} \in \mathcal{U}_j$ para $1 \leq i, j \leq k$.

Considerando (1) como definición, inmediatamente se cumple que $-A_0^l = A_0^l$. El primer elemento, $f_0 \in A_0^k$ se selecciona de la misma forma que en el teorema de Gowers original 4.1.1 y el signo \pm se debe a la simetría de los A_n^l . Consideremos ahora que hemos encontrado $f_0, \dots, f_n \in FIN_k^\pm$ y $A_0^l \supseteq A_1^l \supseteq \dots \supseteq A_n^l$ ($1 \leq l \leq k$) elementos de \mathcal{U}_l que cumplen (1)–(4). Para $i, j \in \{1, \dots, k\}$ y $m \leq n$ se definen los conjuntos A_{n+1}^l ($1 \leq l \leq k$) del mismo modo que en las ecuaciones (4.1-E2), (4.1-E3) y (4.1-E4). Debido a que hemos construido sucesiones que satisfacen (1) – (4), se puede demostrar para cualquier $p \in \mathbb{N}$ que

$$\epsilon_0 T^{(k-l_0)}(f_{n_0}) + \dots + \epsilon_p T^{(k-l_{p-1})}(f_{n_{p-1}}) + \epsilon_p g \in A_{n_0}^{\max\{l_0, \dots, l_p\}},$$

para cualquier elección de $n_0 < \dots < n_p$ en \mathbb{N} , $l_0, \dots, l_p \in \{1, \dots, k\}$, $\epsilon_0, \dots, \epsilon_p \in \{-1, 1\}$, y $g \in A_{n_p}^{l_p}$. Esto se demuestra del mismo modo que la ecuación (4.1-E5). Con esto termina la demostración. \square

Ahora, similarmente a la sección anterior, relacionaremos este resultado combinatorio con la esfera de c_0 :

Sea $0 < \delta < 1$ tal que $(1 + \delta)^{(1-k)} < \frac{\delta}{2}$ y sea Δ_k^\pm la colección de todas las funciones

$$p : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, -(1 + \delta)^{-1}, \dots, -(1 + \delta)^{(1-k)}, 0, (1 + \delta)^{(1-k)}, \dots, (1 + \delta)^{-1}, 1\},$$

que tienen soporte finito y -1 o 1 están en su rango. Notamos que, análogamente a la sección anterior, Δ_k^\pm es una δ -red para la esfera S_{c_0} . Para relacionar la versión última versión del Teorema de Gowers con la esfera de c_0 modificamos ligeramente las funciones utilizadas en la proposición 4.2.8.

Definimos $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $\Phi : S_{c_0} \rightarrow \text{FIN}_k^\pm$ como

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\log|x|}{\log(1 + \delta)^{-1}} \quad , \quad \varphi(0) = +\infty, \\ \Phi(\xi)(n) &= \text{sign}(\xi(n)) \cdot \max\{k - \lfloor \varphi(\xi(n)) \rfloor, 0\}. \end{aligned}$$

Note que $\varphi(\pm(1 + \delta)^{-l}) = l$ para cualquier $l \in \mathbb{N}$, extendiendo las propiedades que tenía la función φ definida en la sección pasada y

$$\Phi(-x) = -\Phi(x) \quad ; \quad \Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y),$$

cuando se toman $x, y \in S_{c_0}$ donde $\text{supp}(x) \cap \text{supp}(y) = \emptyset$. Con las definiciones que tomamos se sigue la siguiente proposición:

Proposición 4.3.8. *Sea $\Psi : \Delta_k^\pm \rightarrow \text{FIN}_k^\pm$ definida como $\Psi = \Phi \upharpoonright_{\Delta_k^\pm}$, entonces*

- i) Ψ es un isomorfismo parcial entre Δ_k^\pm y FIN_k^\pm , la condición de homomorfismo se cumple para funciones con soportes disjuntos,*
- ii) Para cualesquiera $\xi \in \Delta_k^\pm$ y $\lambda \in [-1, 1]$ se cumple*

$$\Phi(\lambda \cdot \xi) = T^j(\Phi(\xi)), \quad j = \lfloor \varphi(\lambda) \rfloor$$

Donde T es la función tetris definida en FIN_k^\pm y se toma como convenio que $T^j(\xi)(n) = 0$ si $j > k$.

La proposición anterior es una generalización natural de la proposición 4.2.8 y el lema 4.2.10 pero esta versión del teorema de Gowers da una conclusión más aproximativa, por lo que se necesita el siguiente lema:

Lema 4.3.9. *Sean $\Delta_k^\pm, \text{FIN}_k^\pm$ y Ψ definidos como en la proposición 4.3.8. Si $Q \subseteq \text{FIN}_k^\pm$, entonces $\Psi^{-1}((Q)_1) \subseteq (\Psi^{-1}(Q))_\delta$.*

Demostración. Notamos primero que la correspondencia explícita entre los valores de las funciones de Δ_k^\pm y FIN_k^\pm es la siguiente:

$$\begin{aligned}\xi(n) = 0 &\iff \Psi(\xi)(n) = 0, \\ \xi(n) = \pm \frac{1}{(1+\delta)^{k-l}} &\iff \Psi(\xi)(n) = \pm l, \quad l \in \{1, \dots, k\}.\end{aligned}$$

De modo que si $P = \{-1, -(1+\delta)^{-1}, \dots, -(1+\delta)^{(1-k)}, 0, (1+\delta)^{(1-k)}, \dots, (1+\delta)^{-1}, 1\}$ y se toman $\xi, \eta \in \Delta_k^\pm$ tales que $|\xi(m) - \eta(m)| \leq 1$, entonces $|\Psi(\xi)(m) - \Psi(\eta)(m)| \leq \|P\| < \delta$. Así que tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}\xi \in \Psi^{-1}((Q)_1) &\iff d_{\text{sup}}(\Psi(\xi), Q) \leq 1 \\ &\iff \exists f \in Q : \|\Psi(\xi) - f\|_{\text{sup}} \leq 1 \\ &\iff \exists f \in Q : |\Psi(\xi)(n) - f(n)| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \\ &\iff \exists f \in Q : |\xi(n) - (\Psi^{-1}f)(n)| \leq \delta, \forall n \in \mathbb{N}, \\ &\iff \exists f \in Q : \|\xi - (\Psi^{-1}f)\|_{\text{sup}} \leq \delta, \\ &\iff \xi \in (\Psi^{-1}(Q))_\delta.\end{aligned}$$

□

Corolario 4.3.10. *Para cualquier partición de Δ_k^\pm , existe X un subespacio de c_0 de dimensión infinita y una pieza P de la partición tal que $S_X \subseteq (P)_\delta$.*

Demostración. Dada una partición de Δ_k^\pm , el isomorfismo parcial Ψ induce una partición en FIN_k^\pm . Similar al corolario 4.2.12, existen Q un elemento de la partición de FIN_k^\pm y $B = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{FIN}_k^\pm$ una sucesión de bloques tales que $\text{TFU}(B) \subseteq (Q)_1$. Sean $X = \ell(\{\Psi^{-1}(b_n) : n \in \mathbb{N}\})$ y $P = \Psi^{-1}(Q)$, se muestra sin mucha dificultad que $\Psi^{-1}(\text{TFU}(B))$ es una δ -red de S_X , del lema 4.3.9, se sigue que

$$S_X \subseteq \Psi^{-1}(\text{TFU}(B)) \subseteq \Psi^{-1}((Q)_1) \subseteq (P)_\delta.$$

□

La conclusión de este trabajo se presenta en el siguiente lema. Hay que notar que el trabajo realizado nos permite controlar la variación de cualquier función de Lipschitz en S_X para un subespacio de bloques infinito.

Corolario 4.3.11. *Para cualquier función de Lipschitz $f : S_{c_0} \rightarrow \mathbb{R}$ y cualquier $\varepsilon > 0$ existe X un subespacio de c_0 de dimensión infinita tal que $\text{osc}(f \upharpoonright_{S_X}) \leq \varepsilon$.*

Demostración. Sea L la constante de Lipschitz de f . Sin pérdida de generalidad $\varepsilon \in (0, 1)$, tomamos $\delta = \varepsilon/4L$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{(1+\delta)^{k-1}} < \delta/2$. Sabemos que S_{c_0} es compacto, por

lo que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f(S_{c_0}) \subseteq [a, b]$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces la colección de intervalos $I_j = [a + \frac{b-a}{n}(j-1), a + \frac{b-a}{n}j]$ con $1 \leq j \leq n$ es una partición de $[a, b]$ tal que $\text{diam}(I_j) \leq \varepsilon/2$. Entonces la colección $\{f^{-1}(I_j)\}_{j=1}^n$ se puede completar para formar una partición de Δ_k^\pm . Por el corolario anterior existe un subespacio de bloques X tal que $S_X \subseteq (f^{-1}(I_{j_0}))_\delta$ para algún $j_0 \in \{1, \dots, n\}$. Por último, verificamos que cualquier función varía a los más ε en S_X . Sean $x, y \in S_X$, por lo anterior sabemos que existen $z, w \in f^{-1}(I_{j_0})$ tales que $\|x - z\|_{\text{sup}} \leq \delta$ y $\|w - y\|_{\text{sup}} \leq \delta$. Entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(w)| + |f(w) - f(y)| \leq L\|x - z\|_{\text{sup}} + \frac{\varepsilon}{2} + L\|w - y\|_{\text{sup}} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\text{osc}(f \upharpoonright_{S_X}) = \sup_{x, y \in S_X} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. □

La conclusión de nuestro último lema es que todas las funciones de Lipschitz definidas en S_{c_0} son de oscilación estable, un hecho que por sí mismo es bastante interesante. En el contexto del problema de la distorsión esta es otra forma de concluir que c_0 no es un espacio distorsionable, un hecho que fue mostrado antes por R.C. James en [9], pero la ventaja del trabajo de Gowers en su momento, fue llegar a la misma conclusión con herramientas combinatorias.

Apéndice A

Topología general

Sabemos que en ramas como el análisis funcional es muy útil trabajar en espacios de Hausdorff, no es sorpresa ya que ofrecen muchas propiedades que rescatan la intuición de los espacios métricos. Para nuestros propósitos serán más útiles estos espacios cuando tienen la propiedad de ser compactos, en este apéndice enumeramos varios conceptos y resultados indispensables de la topología general para que los lectores con menos experiencia en topología tengan más intuición.

Definición A.0.1. Una **topología** sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

- \emptyset y X están en τ .
- La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ .
- La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ .

A la pareja (X, τ) se le conoce como **espacio topológico**. A los elementos de τ se les llama **conjuntos abiertos** de X . Se dice que un $B \subseteq X$ es un **conjunto cerrado** de X si $X \setminus B \in \tau$.

Como consecuencia directa de las definiciones y las leyes de De Morgan se sigue directamente la siguiente proposición.

Proposición A.0.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces:*

- *Los conjuntos \emptyset y X son cerrados de X .*
- *La unión de una cantidad finita de conjuntos cerrados de X es un conjunto cerrado de X .*
- *La intersección arbitraria de conjuntos cerrados de X es un conjunto cerrado de X .*

Observación. La razón para decir “conjunto cerrado de” es enfatizar cual es nuestro espacio topológico, esto es crucial cuando se trabaja con subespacios de un espacio topológico, pero puede ser omitido cuando no cause confusiones.

Al trabajar en espacios métricos es evidente que los conjuntos abiertos están muy relacionados con medir distancias, esta definición permite que los abiertos se comporten de la manera más parecida posible para espacios generales. El siguiente ejemplo enfatiza que un espacio puede tener estructura de espacio topológico sin ser parecido a un espacio euclídeo:

Ejemplo A.0.3. Sea $X = \{a, b, c\}$ un conjunto de tres elementos. La figura A.1 contiene ejemplos de algunas topologías con las que se puede dotar X :

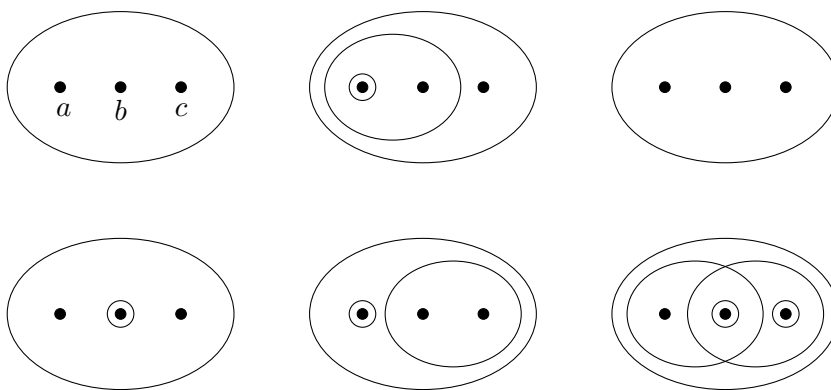


Figura A.1: Ejemplos visuales de topologías, extraído del libro de Munkres [10].

Esto no significa que cualquier colección de subconjuntos de X es una topología, dos ejemplos de colecciones que no forman topologías son los siguientes:

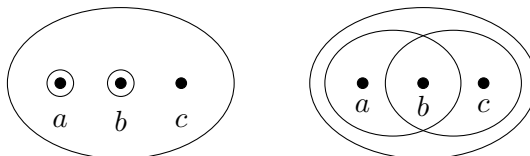


Figura A.2: Extraído del libro de Munkres [10].

Para cualquier conjunto, hay dos topologías con las que siempre se le puede dotar. Dado un conjunto X , a la topología $\tau = \mathcal{P}(X)$ se le conoce como **topología discreta** y cuando $\tau = \{\emptyset, X\}$ se conoce como **topología indiscreta**.

En este trabajo se utilizan espacios compactos, por lo que vale la pena enunciar su definición y algunas propiedades.

Definición A.0.4. Sea (X, τ) un espacio topológico.

- Se dice que una colección $U \subseteq \mathcal{P}(X)$ de abiertos de X es una **cubierta abierta** de X si $\cup U = X$.
- Dada una cubierta abierta U de X , se dice que $V \subseteq U$ es subcubierta abierta si $\cup V = X$. Si, además, V es un conjunto finito, se dice que es una **cubierta abierta finita** de X .
- Se dice que X es compacto si toda cubierta abierta tiene una subcubierta abierta finita.

Otra forma de caracterizar a los espacios compactos es en términos de conjuntos cerrados.

Proposición A.0.5. Sea (X, τ) espacio topológico. Entonces X es compacto, si y sólo si para cualquier familia \mathcal{F} de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita se cumple $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

En ocasiones existen subconjuntos de la topología con los que es suficiente trabajar para obtener todas las propiedades topológicas.

Definición A.0.6. Sea (X, τ) espacio topológico y \mathcal{B} un subconjunto de τ . Decimos que \mathcal{B} es una base de τ si para cada $x \in X$ y para cada $U \in \tau$, que contiene a x , existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq U$.

Teorema A.0.1. Sea X un conjunto y \mathcal{B} una subfamilia de $\mathcal{P}(X)$ tal que $\cup \mathcal{B} = X$. Entonces existe una topología τ de X tal que \mathcal{B} es una base de τ si y sólo si para cualesquiera $U, V \in \mathcal{B}$ y $x \in U \cap V$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$.

La definición de continuidad en espacios topológicos es fundamental en este trabajo, por lo que vale la pena enunciarla.

Definición A.0.7. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos. Decimos que $f : X \rightarrow Y$ es una función continua si para cualquier $U \in \tau_Y$ se cumple que $f^{-1}[U] \in \tau_X$.

Una de las ventajas de contar con una base en un espacio topológico es la siguiente:

Demostración. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y \mathcal{B} una base de Y . Entonces $f : X \rightarrow Y$ es una función continua si y sólo si para cualquier $V \in \mathcal{B}$ se cumple que $f^{-1}[V] \in \tau_X$. \square

Podría parecer que no hay ventajas importantes en la proposición anterior pero en muchos casos será más fácil verificar la condición de continuidad únicamente para los elementos de una base.

Definición A.0.8. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que X es **espacio de Hausdorff** si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existen dos abiertos disjuntos $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$ y $y \in V$.

Este es uno de los axiomas de separabilidad que se estudian en topología general y es, probablemente, el más importante para las personas que se dedican al análisis funcional. A continuación presentamos algunas propiedades sencillas de los espacios de Hausdorff:

Proposición A.0.9. *Sea (X, τ) espacio de Hausdorff, entonces los singuletes son cerrados en X .*

Proposición A.0.10. *Sea (X, τ) espacio de Hausdorff. Si $A \subseteq X$ es compacto, entonces es cerrado en X .*

Proposición A.0.11. *Sea (X, τ) espacio de Hausdorff compacto. Si $A \subseteq X$ es cerrado, entonces es compacto.*

El siguiente es otro axioma de separabilidad y en este texto sólo es importante porque caracteriza a qué espacios se les puede encontrar una compactación de Čech-Stone.

Definición A.0.12. Se dice que un espacio de Hausdorff X es completamente regular (o de Tychonoff) si para cada punto $x \in X$ y cada subconjunto cerrado $C \subseteq X$, que no contiene a x , existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f[C] = \{0\}$.

Por último, enunciamos dos resultados que serán útiles en el texto. En particular, el último es un resultado muy útil para caracterizar funciones en problemas de análisis funcional.

Proposición A.0.13. *Sea Y un subconjunto denso de un espacio topológico (X, τ) , para cualquier D subconjunto abierto de X se cumple que $cl(Y \cap D) = cl(D)$*

Teorema A.0.2. *Sean X, Y espacios de Hausdorff y $D \subseteq X$ un subespacio denso. Si $f, g : X \rightarrow Y$ son funciones continuas y $f = g$ en D , entonces $f = g$ en X .*

Bibliografía

- [1] Dugunji, J. (1978): *Topology*. Allyn and Bacon Series In Advances Mathematics.
- [2] Fernández-Bretón, D.J. *Using Ultrafilters to Prove Ramsey-type Theorems*. The American Mathematical Monthly **129** (2021), 116–131. [doi:10.1080/00029890.2022.2004848](https://doi.org/10.1080/00029890.2022.2004848).
- [3] Gowers, W.T. *An infinite Ramsey theorem and some Banach-space dichotomies*. Annals of Mathematics **156** (1993), 797–833, [doi:10.2307/3597282](https://doi.org/10.2307/3597282).
- [4] Gowers, W.T. *A Solution to Banach's Hyperplane Problem*. Bulletin of the London Mathematical Society **26** (1994), 523–530, [doi:10.1112/blms/26.6.523](https://doi.org/10.1112/blms/26.6.523).
- [5] Gowers, W.T. *A Solution to the Schroeder-Bernstein Problem for Banach Spaces*. Bulletin of the London Mathematical Society **28** (1996), 297–304. [doi:10.1112/blms/28.3.297](https://doi.org/10.1112/blms/28.3.297).
- [6] Gowers, W.T. *Lipschitz Functions on Classical Spaces*. Europ. J. Combinatorics **13** (1992), 141–151, [doi:10.1016/0195-6698\(92\)90020-Z](https://doi.org/10.1016/0195-6698(92)90020-Z).
- [7] Gowers, W.T; B. Maurey. *The Unconditional Basic Sequence Problem*. J. Amer. Math. Soc **6** (2002), 851–874, [doi:10.2307/2152743](https://doi.org/10.2307/2152743).
- [8] Hindman, N; Strauss, D. (2012): *Algebra in the Stone-Cech Compactification: Theory and Applications*, Berlin, Boston: De Gruyter. [doi:10.1515/9783110258356](https://doi.org/10.1515/9783110258356).
- [9] James, R.C. *Uniformly non-square Banach spaces*. Ann. Math **80** (1964), 542–550. [doi:10.2307/1970663](https://doi.org/10.2307/1970663).
- [10] Munkres, J.R. (2002): *Topología*. Prentice Hall. 2a edición.
- [11] Odell, E; Schlumprecht, T. *The distortion of Hilbert space*. Geometric and Functional Analysis **3** (1993), 201–207. [doi:10.1007/BF01896023](https://doi.org/10.1007/BF01896023).
- [12] Odell, E; Schlumprecht, T. *The distortion problem*. Acta Math **173** (1994), 259–281. [doi:10.1007/BF02398436](https://doi.org/10.1007/BF02398436).

- [13] Odell, E; Schlumprecht, T. (2003): Distortion and Asymptotic Structure. Handbook of the Geometry of Banach spaces, Vol. 2. [doi:10.1016/S1874-5849\(03\)80038-4](https://doi.org/10.1016/S1874-5849(03)80038-4).
- [14] Todorcevic, S. (2010): Introduction to Ramsey Spaces. Annals of Mathematics Studies 174. Princeton University Press.