Comparando la dificultad de resultados combinatorios mediante la lógica matemática

Boise Extravanza in Set theory

~ Junio.

David Fernández Bretón

djfernandez@im.unam.mx
https://homepage.univie.ac.at/david.fernandez-breton/espanol.html

Instituto de Matemáticas UNAM,
Escuela Superior de Física y Matemáticas IPN,
Escuela Superior de Cómputo IPN.

Interacciones en la Frontera 2021

2 Teoremas de tipo Ramsey

0 Los resultados:

A: Teorema de Ramsey (1930)

$\forall n\ \exists N$ tal que: $\forall c: E(K_N) \longrightarrow \{0,1\}$

$\exists$ n vértices $v_1, \dots, v_n$ tales que

$[v_1, \dots, v_n]$ es monocromática

→ Versión infinita: $\forall\ c: K_{\aleph_0} \longrightarrow \{0,1\}$

hay vértices $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ tales que

$[v_1, \dots, v_n]$ es monocromática

B: Folkman-Rado-Sanders: $\forall n\ \exists N$ tal que:

$$\forall c : \{1, \dots, N\} \longrightarrow \{0,1\},$$ hay $x_1, \dots, x_n$ tales que

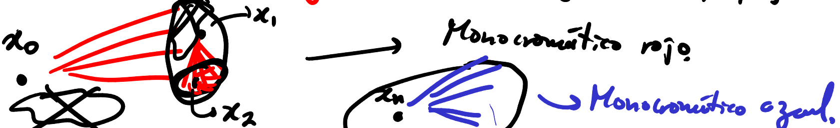
$$FS(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n, x_1+x_2, x_1+x_3, \dots, x_1+x_2+x_3, \dots; \dots, x_1+\dots+x_n\}$$

es monocromático.

Teorema de Hindman: $\forall c : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$, hay $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ tales que $FS(x_1, \dots,)$ es monocromático.

Demostración de Ramsey

Sea $c : K_{\aleph_0} \longrightarrow \{0,1\}$



Demostración de Hindman: Más complicada.

¿En qué sentido es el teorema de Hindman "más complicado" que el teorema de Ramsey?

① Teoría de la Recursión / Teoría de la computabilidad.

Defn: X es **recursivo** (computable, calculable) [en Y] si existe un algoritmo con oráculo Y que: dado n, calcula en tiempo finito si $n \in X$ ó $n \notin X$

$X \leq_T Y$

Ejemplos: Números pares

Números primos.

No todo conjunto es recursivo.

c/oráculo Y

$H = \{ \langle p, n \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid$ el programa $\#p$ termina en tiempo finito con input $n \}$

y "el brinco de Turing"

H no es recursivo. Si lo fuera, escribo un programa

$$n \longmapsto \begin{cases} 1; & \langle n, n \rangle \notin H \\ \text{loop infinito} & \langle n, n \rangle \in H \end{cases}$$

Recursivo $\equiv$ $\leq_T \emptyset$; $H = \emptyset'$

$\leq_T$ es un "orden parcial" módulo $X \equiv_T Y$ si $X \leq_T Y$, $Y \leq_T X$

¡Muy complicado!

Teorema 1 (Jockusch, 1972):

- Hay una coloración recursiva [en Y]

$$c: E(K_{\mathbb{N}}) \longrightarrow \{0,1\}$$

tal que: si $X \subseteq \mathbb{N}$ es infinito y $[X]$ es monocromática, entonces $X \not\leq_T \emptyset'$ [$X \not\leq_T Y'$]

- $\forall\, c: E(K_{\mathbb{N}}) \longrightarrow \{0,1\}$ recursiva [en Y] hay $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito, con $[X]$ monocromática tal que

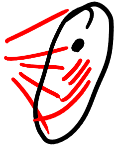
$$X \leq_T \emptyset'' \qquad X \leq_T Y''$$

Teorema: (Blass, Hirst, Simpson, 1987):

- Hay $c: \mathbb{N} \to \{0,1\}$ recursiva [en Y] tal que: si $X \subseteq \mathbb{N}$ inf., con $FS(X)$ monocromático entonces $\emptyset' \leq_T X$ $\quad Y' \leq_T X$.

- $\forall c: \mathbb{N} \to \{0,1\}$ recursiva [en Y] hay $X \subseteq \mathbb{N}$ inf. con $FS(X)$ monocromático tal que
$$X \leq_T \emptyset^{(\omega+1)} \qquad X \leq_T Y^{(\omega+1)}$$

② Teoría de Conjuntos sin Elección.

- 

Para demostrar $\left\{ \begin{array}{l} RT \\ HT \end{array} \right\}$ se necesita elección.

(en grupos abelianos)

$HT \equiv \forall X$ inf. $\forall c : \underbrace{[X]^{<\omega}}_{\text{Subc. finitos de } X} \to \{0,1\}$ $\exists\, Y$ infinito con $FS(Y)$ es mono-cromático.

equipado con Δ

$\therefore$ RT, HT son "formas débiles de AE".

Formas débiles de AE:

AE

Elección Dependiente

Elección Numerable

F_{in}=D-Fin

F.B.
2020-21

HT

Andreas Blass
1977

RT

Forma82

Lema de König $(AE(\aleph_0, <\aleph_0))$

$\emptyset$

Ideal Primo

Principio del Orden