INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

AXIOMA DE DETERMINACIÓN

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

PRESENTA
JOSÉ ALBERTO GUZMÁN VEGA

DIRECTOR DE TESIS:
DAVID JOSÉ FERNÁNDEZ BRETÓN

CIUDAD DE MÉXICO, 20 DE NOVIEMBRE DE 2024

Agradecimientos

A mi familia:
Quisiera expresar mi más profundo agradecimiento a mis hermanas y a mis padres, quienes han sido mi pilar durante todo este proceso y lo seguirán siendo toda mi vida. Su amor, apoyo y presencia son lo que me ha dado la fuerza para siempre seguir adelante. A ustedes, les quisiera decir más de lo que las palabras y el lenguaje pueden expresar. Gracias por estar siempre ahí.

A mi director de tesis:
Agradezco sinceramente a mi director de tesis, el doctor David José Fernández Bretón, por su valiosa disposición, orientación y paciencia a lo largo de este arduo trabajo, sus conocimientos y sus consejos han sido esenciales para la realización de esta tesis. Gracias por motivarme con su ejemplo a ser mejor.

A mi institución y a todos los que la conforman:
Finalmente me gustaría dar las gracias a la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, por formar parte de mi desarrollo como alumno y persona. A mis profesores por reforzar mi curiosidad, pasión y rigor en el área de las matemáticas. Y a mis compañeros, por todas las memorias y momentos juntos.

"**Aus dem paradies,**
das Cantor uns geschaffen
soll uns niemand vertreiben können."

David Hilbert

"**Del paraíso,**
que Cantor ha creado
nadie podrá expulsarnos."

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
FO-ESFM-TIT-08

DICTAMEN DE REVISIÓN DE TESIS

CDMX., a 13 de Noviembre de 2024

Los miembros del Jurado después de la revisión y lectura exhaustiva del contenido, estructura, intención, ubicación de los textos observaciones y seguimiento de recomendaciones hechas a la Tesis titulada:

Axioma de determinación

Desarrollada por el(los) Pasante(s):

No.	Boleta Pasante	Nombre completo
1	2019330206	José Alberto Guzman Vega
2		

Y como Asesor(es):

Asesor	Interno	Externo	Nombre completo:
1	(X)	( )	David José Fernández Bretón
2	( )	( )	

DICTAMEN

Hemos determinado Aprobar el documento de Tesis anterior, firmando de conformidad de que nuestras opiniones y recomendaciones vertidas en forma individual fueron atendidas por el Pasante.

Integrantes del Jurado

PRESIDENTE,
Dra. Flor de María Correa Romero
Miembro del Jurado

SECRETARIO,
Dr. Eliseo Sarmiento Rosales
Miembro del Jurado

VOCAL,
Dr. David José Fernández Bretón
Miembro del Jurado

VOCAL,
Dr. Egor Maximenko
Miembro del Jurado

VOCAL,
Dr. Miguel Ángel Valencia Bucio
Miembro del Jurado

CARTA CESIÓN DE DERECHOS AL IPN

Ciudad de México a 20 de Noviembre de 2024

El que suscribe:

C. José Alberto Guzman Vega con número de boleta 2019330206.

Egresado del Programa Académico: Licenciatura en Física y Matemáticas

que se imparte en la Escuela Superior de Física y Matemáticas, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de tesis titulado:

Axioma de determinación.

El cual fue desarrollado bajo la dirección del Dr. David José Fernández Bretón.

Por lo anterior es mi interés manifestar que **SI** cedo los derechos del trabajo antes mencionado, al Instituto Politécnico Nacional, ello con el propósito de que lo ponga a disposición de la comunidad politécnica que requiera consultarlo con fines académicos y de investigación. Es importante aclarar que los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Dicho permiso puede ser solicitado a la siguiente dirección de correo electrónico: jguzmanv1501@alumno.ipn.mx. Si el permiso se otorga, se deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Atentamente:

José Alberto Guzman Vega

Folio
ESFM.SAC.T/318/2024

Asunto
Autorización de impresión

Ciudad de México 20 de noviembre de 2024

C. José Alberto Guzmán Vega
Pasante de Licenciatura en Física y Matemáticas
PRESENTE

Sirva este medio para informarle que derivado de que ha concluido exitosamente el desarrollo de su trabajo, bajo la asesoría del **Dr. David José Fernández Bretón,** como su asesor de tesis, tengo a bien autorizar la versión final del trabajo de tesis profesional desarrollado por usted, denominado: **"Axioma de determinación".**

Es importante **integrar** en su trabajo, después de los agradecimientos, la carta de cesión de derechos del IPN, cuyo formato podrán descargar en la siguiente dirección electrónica:

https://www.esfm.ipn.mx/estudiantes/titulacion.html

Después de integrar la cesión de derechos, deberás añadir *este oficio de autorización de impresión*.

Posteriormente se deberá entregar a esta subdirección, la versión final digitalizada en formato PDF.

De manera adicional deberá mostrar en original para cotejo los documentos siguientes:

1. Acta de nacimiento,
2. Certificado de estudios,
3. Carta de Pasante,
4. Carta de Liberación de Servicio Social,
5. Clave única de registro (CURP) ampliada en tamaño carta.

Además, traer seis fotografías tamaño ovalo credencial b/n papel mate auto-adherible y comprobante de pago de acta de examen profesional.

El horario de recepción de documentación son los días lunes a viernes, en un horario de 11:00 a 14:00 h y de 16:00 a 19:00 h.

Finalmente, deberá hacer conocimiento de su fecha de realización de examen profesional, no debiendo ser esta menor a una semana posterior a la fecha de entrega y la cual deberá acordar previamente con su asesor(es) y sinodales.

Sin otro particular, reciba un saludo cordial.

ATENTAMENTE
"La Técnica al Servicio de la Patria"

SEP
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA
I P N

M. en C. Erick Lee Guzmán
Subdirector Académico

ELG/mjc

Índice general

Resumen

Esta tesis investiga los fundamentos de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), centrándose en los roles del Axioma de Elección (AC) y el Axioma de Determinación (AD) dentro de este marco. ZF sirve como una base sólida para la matemática moderna, sin embargo, la inclusión de AC introduce complejidades significativas, permitiendo la construcción de pruebas no constructivas y facilitando diversos resultados clásicos. En contraste, la adopción de AD genera un paisaje rico de resultados alternativos, alineándose a menudo con perspectivas intuicionistas.

A través de una exploración sistemática de modelos de ZF que incorporan AC ó AD, esta tesis examina las interacciones entre estos axiomas, con especial interés en cómo su aceptación ó rechazo influye en la teoría de juegos y la teoría de la medida.

Al profundizar en estos modelos, se aclara la filosofía de la teoría de conjuntos actual. Así, la interacción entre elección y determinación no solo es una preocupación técnica, sino que también es un catalizador para discusiones más amplias sobre los fundamentos de la matemática. Este trabajo, en última instancia, contribuye a nuestra comprensión de cómo ZF, junto con AC y AD, moldea el panorama de la verdad matemática y las indagaciones filosóficas que inspira.

Palabras clave: teoría de conjuntos, ZF, elección, determinación, modelos, juegos, medida.

Abstract

This thesis investigates the foundational aspects of Zermelo-Fraenkel set theory (ZF), focusing on the roles of the Axiom of Choice (AC) and the Axiom of Determinacy (AD) within this framework. ZF serves as a robust foundation for much of modern mathematics, nevertheless the inclusion of AC introduces significant complexities, mainly by enabling the construction of non-constructive proofs and facilitating various mathematical results. In contrast, the adoption of AD generates a rich landscape of alternative results, often aligning with intuitionistic perspectives.

Through a systematic exploration of ZF models that incorporate either AC or AD, this thesis examines the interactions between these axioms, with particular interest in how their acceptance or rejection influences game theory and measure theory.

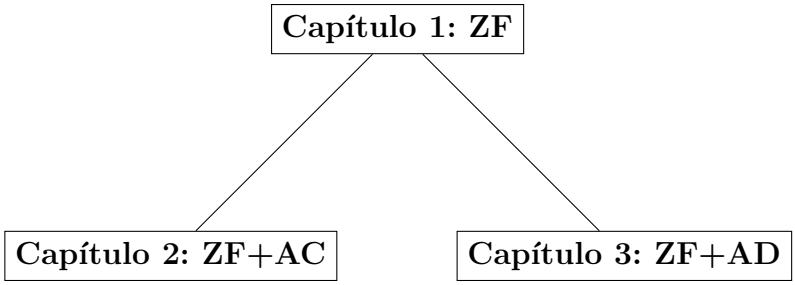
By delving into these models, the thesis elucidates the philosophy of current set theory. Thus, the interplay between choice and determinacy serves not only as a technical concern but also as a catalyst for broader discussions on the foundations of mathematics. This work ultimately contributes to our understanding of how ZF, along with AC and AD, shapes the landscape of mathematical truth and the philosophical inquiries it inspires.

Keywords: set theory, ZF, choice, determinacy, models, games, measure.

Introducción.

Nuestro marco histórico comienza, como la teoría de conjuntos misma, con Georg Cantor, quien, durante su periodo de investigación de 1874 a 1884, es argumentable que comenzó la teoría de conjuntos utilizando dos principios, extensionalidad y compresión irrestricta. Este sistema, al formalizarse dentro de la lógica, resultó inconsistente, hecho demostrado por Bertand Russell en su paradoja planteada en el año de 1901. Consecuentemente, estos principios se fueron refinando, en un constante juego de la soga cuya intención fue evitar la aparición de contradicciones y construir conjuntos de una manera intuitiva.
Parte fundamental de este proceso de reconstrucción fue Ernst Zermelo quien en 1908 axiomatizó por primera vez la teoría de conjuntos. 14 años después, durante 1922, Abraham Fraenkel y Thoralf Skölem ampliaron y mejoraron los axiomas de Zermelo, resolviendo algunas deficiencias. Luego, como una adición a esta axiomatización, en 1925, Von Neumann adjunta su axioma de fundación, finalizando la base de la teoría ZF.
En los márgenes del desarrollo de esta teoría ocurría una historia similar: era el año de 1883 cuando Cantor ideó el principio del buen orden; esta noción, a causa de su potencia, necesitaba un sustento formal más riguroso. Con el fin de probar este principio, en 1904, Zermelo formuló el axioma de elección y demostró que éste es esencial para el buen orden. En 1935, Max Zorn, en un esfuerzo por proporcionar una herramienta más accesible y con el mismo objetivo de demostrar el buen orden, enunció el principio del máximo, que rápidamente se tornó un recurso central en muchas demostraciones. Posteriormente, en 1940, John Tukey renombró el principio del máximo como el lema de Zorn, en reconocimiento a su importancia dentro de los resultados que él mismo desarrolló, como el lema de Tukey. Todos estos resultados parecieran seguir una clara jerarquía; sin embargo, como se ha demostrado desde sus formulaciones, son equivalentes entre sí, y a muchos otros, por mencionar uno, la existencia de bases de espacios vectoriales, como demostrado por Andreas Blass en 1984.
Paralelamente al desarrollo de elección, dentro de la teoría ZF, en la decada de 1950, los matemáticos David Gale y Frank Stewart comenzaron a estudiar juegos infinitos. Estudios que extendieron Jan Mycielski y Hugo Steinhaus, quienes propusieron, en 1962, al axioma de determinación como una alternativa a elección en este contexto. Inicialmente considerado una curiosidad, este axioma se consolidó en las áreas de teoría descriptiva de conjuntos y teoría de cardinales grandes, debido a los trabajos de 1970 de Robert Solovay.

Este trabajo, como su marco histórico, se encuentra dividido en tres partes, como un árbol, con un tronco común y dos ramas, paralelas pero interconectadas.
En el primer capítulo sentaremos las bases con las que trabajaremos a lo largo del texto, los fundamentos de la teoría ZF, su axiomatización y algunos conceptos básicos derivados.
En el segundo discutiremos las consecuencias del axioma de elección en este contexto, sus equivalencias e implicaciones, haciendo énfasis particular en las patologías que surgen.
En el tercero contrastaremos lo anterior con los resultados de asumir determinación, resolviendo las patologías de elección.



Capítulo 1

ZF

Para entender a las matemáticas primero debemos entender el lenguaje en que se expresan:

La lógica de primer orden es un sistema formal que se utiliza para representar y razonar sobre relaciones entre objetos en un dominio específico, esta se constituye por:

- La sintaxis consiste de un alfabeto, términos y reglas de construcción de fórmulas, permitiéndonos cuantificar y describir relaciones entre objetos.
  - El alfabeto se compone de símbolos; lógicos (a1)-(a4) y no lógicos (a5)-(a7):
    - (a1) Los conectores lógicos, que conectan y forman nuevas proposiciones lógicas; la negación ($\neg$), la conjunción ($\wedge$), la disyunción ($\vee$), la implicación ($\Rightarrow$), etcétera. Sería suficiente contar con la conjunción opuesta ($\overline{\wedge}$), ya que, por completitud funcional, nos permite construir a los demás.
    - (a2) Los cuantificadores, que hacen declaraciones generales sobre los objetos; el cuantificador universal ($\forall$) es indicador de que una propiedad o relación se cumple para todos los objetos en el dominio de discurso, por ejemplo, $\forall x P(x)$ se interpreta como "para todo x, $P(x)$ es verdadero", por otro lado, el cuantificador existencial ($\exists$) indica que existe al menos un objeto en el dominio para el cual la propiedad o relación se verifica, por ejemplo, $\exists x P(x)$ significa "existe un x tal que $P(x)$ es verdadero". Similarmente, con los conectores, basta un cuantificador, pues $\exists x P(x) \equiv \neg(\forall x \neg P(x))$.
    - (a3) La igualdad ($=$) como símbolo primitivo de la lógica, cuyo significado es, si se cumple la igualdad entre dos objetos del dominio, son el mismo objeto.
    - (a4) Los símbolos de variables ($x, y, z, \cdots$) se refieren a objetos en el dominio.
    - (a5) Los símbolos de constantes ($a, b, c, \cdots$) aluden a objetos fijos en el dominio.
    - (a6) Los símbolos de funciones ($f, g, h, \ldots$) representan funciones en el dominio, cada función tiene un número de argumentos finito (aridad).
    - (a7) Los símbolos de predicados ($P, Q, R, \ldots$) plasman relaciones o propiedades entre objetos, evaluando su verdad, cada predicado tiene una aridad.

- Los términos son las expresiones que representan objetos, pueden ser:

  (t1) Variables (x, y, z).

  (t2) Constantes (a, b, c).

  (t3) Funciones valuadas en términos previamente construidos $(f(t_1, t_2, \ldots, t_n))$.

- Una fórmula es una cadena de símbolos formada finitamente de (f1)-(f5), en particular diremos que una fórmula es atómica si es de la forma (f1), (f2):

  (f1) Si t_1 y t_2 son términos, entonces $t_1 = t_2$ es una fórmula.

  (f2) Si $t_1, t_2, \cdots, t_n$ son términos y R es una relación no lógica de aridad n, entonces $Rt_1 \cdots t_n$ es una fórmula.

  (f3) Si φ es una fórmula previamente construida, entonces $\neg\varphi$ es una fórmula.

  (f4) Si φ y ψ ya son fórmulas, entonces $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ y $(\varphi \Rightarrow \psi)$ son fórmulas.

  (f5) Si φ es una fórmula previa, entonces $(\forall x\varphi)$ y $(\exists x\varphi)$ son fórmulas.

◦ La semántica explica cómo asignamos significados a los símbolos y a las fórmulas, se define mediante modelos (o estructuras):

- El dominio de discurso (D) es una clase no vacía de objetos.

- Una interpretación asigna significados específicos:

  (i1) A cada constante un objeto particular en D.

  (i2) A cada función n-aria una asignación de D^n en D.

  (i3) A cada predicado n-ario una subclase de D^n.

  Una fórmula se considera verdadera en un modelo si, dada una interpretación, la fórmula se evalúa como verdadera.

◦ La inferencia se refiere al proceso de derivar nuevas declaraciones (o teoremas) a partir de premisas dadas utilizando las siguientes reglas:

- Modus Ponens:
  Si P y $P \Rightarrow Q$ son verdaderos, entonces Q es verdadero.

- Instanciación Universal:
  Si $\forall x P(x)$ es verdadero, entonces $P(a)$ es verdadero para cualquier objeto a.

- Generalización Existencial:
  Si $P(a)$ es verdadero para algún objeto a, entonces $\exists x P(x)$ es verdadero.

1.1. Fundamentos axiomáticos

Tomaremos como base fundamental de nuestra teoría, ZF, en honor a Zermelo y Fraenkel, la **lógica de primer orden**, la **pertenencia** ($\in$) como símbolo primitivo del lenguaje y los objetos de discurso son los **conjuntos**[1].

Observación: Al ser la igualdad ($=$) y la pertenencia ($\in$) los únicos símbolos primitivos, lás unicas fórmulas atómicas son de la forma $x = y$ y $x \in y$, donde x y y son términos, consecuentemente, todas las fórmulas de nuestra teoría ZF son compuestas de estas, ya sea con conectores lógicos o cuantificadores.

Proposición (Existencia de un conjunto)**:** En ZF existe al menos un conjunto.

Demostración: En la lógica de primer orden, el dominio de discurso es no vacío, así afirmamos algo existe, además en la semántica de ZF solamente hay conjuntos, por ende en este contexto, sabemos un conjunto existe. □

Axioma de extensionalidad (AE)
Dos conjuntos son iguales (son el mismo conjunto) si tienen los mismos elementos:

$$(\forall x)(\forall y)[(\forall z)(z \in x \iff z \in y) \implies (x = y)].$$

Subconjunto: Sean x, y conjuntos, diremos x es **subconjunto** de y, denotado $x \subseteq y$, si:

$$(\forall z)(z \in x \implies z \in y).$$

Observación: Notemos que $(\forall x)(x \subseteq x)$, con esta noción podemos reescribir **AE** como:

$$(\forall x)(\forall y)([(x \subseteq y) \wedge (x \supseteq y)] \implies [x = y]).$$

Subconjunto propio: Sean x, y conjuntos, diremos que x es **subconjunto propio** de y, denotado $x \subset y$, si:

$$(x \subseteq y) \wedge (x \neq y).$$

Esquema axiomático de reemplazo (EAR)
Éste afirma que la imagen de un conjunto bajo toda función definible cae en un conjunto. Sea f una fórmula en el lenguaje de ZF con dos variables libres (denotadas aquí por x, y), entonces:

$$(\forall x)[(\exists y) f(x, y) \implies (\exists! y) f(x, y)] \implies (\forall X)(\exists Y)(\forall y)([y \in Y] \iff (\exists x \in X)[f(x, y)]).$$

Teorema (Esquema de especificación)**:**
Sea f una fórmula cualquiera en el lenguaje de ZF con una variable libre x, entonces:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)([z \in y] \iff (z \in x) \wedge [f(z)]).$$

Construyendo el subconjunto:

$$\{z \in x \mid f(z)\} \subseteq x.$$

Demostración: Sea f una fórmula cualquiera con variable libre x, considere la fórmula $g(x, y) := f(x) \wedge (x = y)$, $\forall x$ existe a lo más un y tal que $[g(x, y)]$, en particular $y = x$, así por **EAR**:

$$\begin{aligned}(\forall x)(\exists Y)(\forall z) \qquad [z \in Y] &\iff (\exists w \in x)[g(w, z)] \\ &\iff (\exists w \in x)[f(w) \wedge (w = z)] \\ &\iff (z \in x) \wedge [f(z)].\end{aligned}$$ □

Teorema (Existencia del conjunto vacío)**:** Existe un único conjunto sin elementos, denotado por $\varnothing$.

Demostración: Sea x un conjunto arbitrario, construyamos por especificación:

$$\varnothing := \{z \in x \mid z \neq z\} \subseteq x.$$

Por la definición de igualdad ningún conjunto es distinto de sí mismo, así:

$$(\forall z)(z \notin \varnothing).$$

Además por vacuidad en el axioma de extensionalidad se sigue su unicidad. □

Axioma de unión (AU)
Para cualquier conjunto w hay un conjunto x que contiene exactamente a los miembros de los miembros de w:

$$(\forall w)(\exists x)(\forall y)[(y \in x) \iff (\exists z \in w)(y \in z)].$$

A este conjunto x lo denotamos por $\bigcup_{z \in w} z$.

Axioma del conjunto potencia (AP)
Para cualquier conjunto x hay un conjunto y que contiene exactamente a sus subconjuntos:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)[(z \in y) \iff (z \subseteq x)].$$

A este conjunto y lo denotamos por $\mathcal{P}(x)$.

Observación: Podemos notar que $(\forall x)[\varnothing, x \in \mathcal{P}(x)]$.

Teorema (del singulete)**:** Para todo conjunto x hay un conjunto con único elemento x.

Demostración: Dado x, por **AP** es posible considerar $\mathcal{P}(x)$ como conjunto, con $x \in \mathcal{P}(x)$, además la fórmula $f(z) := (z = x)$ claramente tiene a z como única variable libre, así por esquema de especificación nos es posible construir:

$$\{z \in \mathcal{P}(x) \mid z = x\} = \{x\}. \qquad \square$$

Observación: $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ y $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Teorema (del par)**:** Para cualesquiera dos conjuntos w y x existe el conjunto y cuyos únicos miembros son w y x:

$$(\forall w)(\forall x)(\exists y)(\forall z)\{(z \in y) \iff [(z = w) \vee (z = x)]\}.$$

A este conjunto lo denotamos por $\{w, x\}$.

Demostración: Por existencia del conjunto vacío y **AP** sabemos que $\mathcal{P}(\varnothing)$ y $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$ son conjuntos, definamos ahora la fórmula con variables libres u y v como $f(u, v) := [(u = \varnothing \wedge v = w) \vee (u = \{\varnothing\} \wedge v = x)]$, se cumplen los requisitos de **EAR**, en particular si $u = \varnothing$ tenemos $v = w$ y si $u = \{\varnothing\}$ tenemos $v = x$, y recurriendo a **EAR**:

$$\begin{aligned}
(\forall u)(\exists V)(\forall z) \quad [z \in V] \quad &\iff \quad (\exists t \in u)[f(t, z)] \\
&\iff \quad (\exists t \in u)[(t = \varnothing \wedge z = w) \vee (t = \{\varnothing\} \wedge z = x)] \\
&\iff \quad (\varnothing \in u \wedge z = w) \vee (\{\varnothing\} \in u \wedge z = x).
\end{aligned}$$

Así al restringir nuestro dominio $u := \mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ tenemos que:

$$(\exists V)(\forall z) \quad [z \in V] \quad \iff \quad (z = w) \vee (z = x).$$

Siendo V el conjunto deseado, concluyendo así esta prueba. $\square$

Axioma de fundación (AF)
Todo conjunto no vacío x contiene un miembro y tal que x y y son conjuntos disjuntos:

$$(\forall x)[(x \neq \varnothing) \implies (\exists y \in x)(\forall z \in x)(z \notin y)].$$

Axioma de infinitud (AI)
Existe un conjunto infinito:

$$(\exists x)[(\varnothing \in x) \wedge (\forall y \in x)([y \cup \{y\}] \in x)].$$

Estos axiomas son la base formal usual para la construcción de las matemáticas, desde la construcción de la aritmética de Peano $(\mathbb{N}, +, \times)$ hasta el análisis funcional, entre muchas otras.

1.2. Relaciones y teoría de grupos

Par ordenado: Sean X, Y conjuntos, definimos el **par ordenado** $(X, Y) := \{\{X\}, \{X, Y\}\}$.

Producto cartesiano: Sean X, Y conjuntos, definimos el **producto cartesiano**, mediante especificación, como $X \times Y := \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y)) \mid \exists x \in X, y \in Y \sqcap z = (x, y)\}$.

Relación binaria: Sean X y Y conjuntos.
Diremos R es una **relación binaria** de X a Y si y sólo si $R \subseteq X \times Y$.
El hecho de que $(x, y) \in R$ lo denotamos por xRy, lo cual se lee como "x se relaciona con y".
En caso de que $X = Y$ diremos simplemente que R es una **relación binaria** en X.

Orden: Sea X un conjunto. Una relación binaria $\preccurlyeq$ en X es un **orden** si es:
Reflexiva:

$$\forall x \in X \qquad x \preccurlyeq x.$$

Antisimétrica:

$$\forall x, y \in X \qquad (x \preccurlyeq y \ \wedge \ y \preccurlyeq x \qquad \Longrightarrow \qquad x = y).$$

Transitiva:

$$\forall x, y, z \in X \qquad (x \preccurlyeq y \ \wedge \ y \preccurlyeq z \qquad \Longrightarrow \qquad x \preccurlyeq z).$$

Orden total: Sea X un conjunto con un orden $\preccurlyeq$, diremos $\preccurlyeq$ es un **orden total** si:

$$\forall x, y \in X \qquad x \preccurlyeq y \ \vee \ y \preccurlyeq x.$$

En tal caso, diremos que X es una **cadena**.

Conjunto superiormente acotado: Sea X un conjunto con un orden $\preccurlyeq$, diremos que $Y \subseteq X$ es **superiormente acotado** si:

$$\exists x \in X \qquad \forall y \in Y \qquad y \preccurlyeq x.$$

A todo elemento x con esta propiedad lo llamaremos una **cota superior** para Y.

Conjunto con maximal: Sea X un conjunto con un orden $\preccurlyeq$, X es con **maximal** si:

$$\exists x \in X \qquad \forall y \in X \qquad (x \preccurlyeq y \qquad \Longrightarrow \qquad x = y).$$

A todo elemento x con esta propiedad lo llamaremos un **maximal** de X.

Buen orden: Sea X un conjunto con un orden $\preccurlyeq$, $\preccurlyeq$ será un **buen orden** si:

$$\forall Y \in \mathcal{P}(X)\backslash\{\varnothing\} \qquad \exists y \in Y \qquad \forall x \in Y \qquad y \preccurlyeq x.$$

Al único elemento y con esta propiedad lo llamaremos el **mínimo** de Y, denotado mín(Y).

Observación: Todo buen orden es un orden total.

Conjunto con máximo: Sea X un conjunto con un orden $\preccurlyeq$, X es con **máximo** si:

$$\exists z \in X \qquad \forall x \in X \qquad x \preccurlyeq z.$$

Al único elemento z con esta propiedad lo llamaremos el **máximo** de Y, denotado máx(Y).

Relación de equivalencia: Sea X un conjunto, diremos que una relación binaria R en X es de **equivalencia** si es:
Reflexiva:

$$\forall x \in X \qquad xRx.$$

Simétrica:

$$\forall x, y \in X \qquad (xRy \implies yRx).$$

Transitiva:

$$\forall x, y, z \in X \qquad (xRy \ \wedge \ yRz \implies xRz).$$

Clase de equivalencia: Sea X un conjunto y R una relación de equivalencia en X. Definimos (por especificación) la clase de equivalencia de $x \in X$, denotada $[x]_R$, como:

$$[x]_R := \{y \in X \ : \ yRx\}.$$

Observación: De la reflexividad de R se sigue que $x \in [x]_R$.

Conjunto cociente: Sea X un conjunto y R una relación de equivalencia en X. Definimos (por especificación) el conjunto cociente como:

$$X/R := \{y \in \mathcal{P}(X) \ : \ (\exists x \in X)(y = [x]_R)\} = \{[x]_R \ : \ x \in X\}.$$

Partición: Sea X un conjunto, diremos que $P \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una partición de X si y sólo si:
La colección P no contiene al conjunto vacío:

$$\varnothing \notin P.$$

La unión de los conjuntos de P es igual a X:

$$\bigcup_{q \in P} q = X.$$

Los elementos de P son disjuntos a pares:

$$(\forall q, r \in P)[(q \neq r) \implies (q \cap r = \varnothing)].$$

Observación: Notemos que el conjunto vacío es la única partición del conjunto vacío, y que cualquier partición de un conjunto no vacío es no vacía.

Teorema (fundamental de las relaciones de equivalencia)**:** Sean X un conjunto y R una relación de equivalencia en X, entonces X/R forma una partición de X.

Demostración:
La colección P no contiene al conjunto vacío:

$$\forall y \in X/R \qquad (\exists x \in X)(y = [x]_R) \implies x \in y \implies y \neq \varnothing \implies \varnothing \notin X/R.$$

La unión de las clases de equivalencia es igual a X, nuevamente por la reflexividad de R:

$$\begin{aligned} \forall x \in X \qquad xRx \qquad &\implies \qquad x \in [x]_R \subseteq X \\ &\implies \qquad X = \bigcup_{x \in P} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in P} [x]_R \subseteq X. \end{aligned}$$

Las clases de equivalencia son disjuntas a pares, consideremos $p, q \in X/R$, por definición $\exists x, y \in X$ tales que $p = [x]_R$ y $q = [y]_R$, supongamos:

$$\begin{aligned} p \cap q = [x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing \qquad &\iff \qquad \exists z \in [x]_R \cap [y]_R \\ &\implies \qquad zRx \ \wedge \ zRy. \end{aligned}$$

Por la reflexividad de R,

$$\implies \qquad xRz \ \wedge \ zRy.$$

Recurriendo a la transitividad de R,

$$\implies \qquad xRy.$$

Luego:

$$\forall a \in [x]_R \iff aRx \implies aRx \ \wedge \ xRy \implies aRy \iff a \in [y]_R \implies [x]_R \subseteq [y]_R.$$

Mediante un razonamiento similar probamos que

$$[x]_R \supseteq [y]_R,$$

de forma que

$$[x]_R = [y]_R.$$

Así, por contrapositiva

$$([x]_R \neq [y]_R) \implies ([x]_R \cap [y]_R = \varnothing),$$

lo cual reescribimos como

$$\forall p, q \in X/R \quad (p \neq q) \implies (p \cap q = \varnothing). \qquad \square$$

Función: Sean X, Y conjuntos y f relación binaria de X a Y, f será una **función**, denotado $f : X \to Y$, si:

$$\forall x \in X \qquad \exists! y \in Y \qquad (x, y) \in f.$$

Comúnmente a este elemento y se le denota por $f(x)$.

Restricción de una función: Sean X, Y conjuntos, $f : X \to Y$, y $W \subseteq X$, definimos la **restricción de** f **en** W, como la función $f|_W : W \to Y$ tal que:

$$\forall x \in W \qquad f|_W(x) = f(x).$$

Operación binaria interna: Sea G conjunto no vacío, una **operación binaria interna** sobre G es cualquier función $f : G \times G \to G$, por cuestiones de notación $f(g, h) =: g * h$.

Grupo:[2] Sea G un conjunto no vacío y $*$ una operación binaria interna en G, diremos que la dupla $(G, *)$ es un **grupo** si se cumplen las siguientes propiedades:
La operación $*$ es asociativa:

$$\forall g, h, i \in G \qquad (g * h) * i = g * (h * i).$$

Existe un elemento neutro:

$$\exists e \in G \qquad \forall g \in G \qquad e * g = g * e = g.$$

Todo elemento tiene un inverso:

$$\forall g \in G \qquad \exists g^{-1} \in G \qquad g * g^{-1} = e.$$

Subgrupo: Sea $(G, *)$ un grupo y $H \subseteq G$, diremos que H es **subgrupo** de G ($H < G$) si $(H, *|_{H\times H})$ tiene estructura de grupo.

Subgrupo generado: Sea $(G, *)$ **grupo** y $S \subseteq G$, el **subgrupo generado** por S, $\langle S \rangle$, se define como:

$$\langle S \rangle := \bigcap_{\substack{H \supseteq S \\ H < G}} H.$$

Este resulta ser el subgrupo más pequeño que contiene a S, aún más, se puede caracterizar:

$$\langle \varnothing \rangle = \{e\},$$
$$S \neq \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad \langle S \rangle = \{x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n} |\ n \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1, \cdots, n\}\ x_i \in S, \epsilon_i \in \{-1, 1\}\}.$$

Acción de grupo: Sea X conjunto y $(G, *)$ grupo, diremos que la función $\alpha : X \times G \to X$ es una **acción de grupo** si cumple:

$$\forall x \in X \qquad \forall g, h \in G \qquad \alpha(\alpha(x, g), h) = \alpha(x, g * h),$$
$$\forall x \in X \qquad \alpha(x, e) = x.$$

Diremos una acción de grupo es **libre** si:

$$\forall x \in X \qquad \forall g \in G \qquad (\alpha(x, g) = x \quad \Longrightarrow \quad g = e).$$

Órbita: Sea X un conjunto, $(G, *)$ un grupo y $\alpha : G \times X \to X$ una acción de grupo, definimos entonces la **órbita** de $x \in X$:

$$\mathbf{Orb}(x) := \{y \in X \mid \exists g \in G \sqcap y = \alpha(x, g)\}.$$

Teorema: Sea X un conjunto, $(G, *)$ un grupo y $\alpha : X \times G \to X$ una acción de grupo, el conjunto de órbitas inducen una partición de X.

Demostración:
Por el teorema fundamental de las relaciones de equivalencia basta demostrar que la relación binaria definida mediante:

$$xRy \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \mathbf{Orb}(y),$$

es de equivalencia y sus clases son las órbitas, así el conjunto de órbitas particiona a X.
Reflexividad:

$$\begin{aligned} \forall x \in X \qquad \alpha(x, e) = x \quad &\Longrightarrow \\ \exists g := e \in G \sqcap x = \alpha(x, g) \quad &\Longrightarrow \\ x \in \mathbf{Orb}(x). & \end{aligned}$$

Simetría:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in X \qquad x \in \mathbf{Orb}(y) \quad &\Longrightarrow \\ \exists g \in G \sqcap x = \alpha(y, g) \quad &\Longrightarrow \\ \alpha(x, g^{-1}) = \alpha(\alpha(y, g), g^{-1}) = \alpha(y, g * g^{-1}) = \alpha(y, e) = y \quad &\Longrightarrow \\ \exists h := g^{-1} \in G \sqcap y = \alpha(x, h) \quad &\Longrightarrow \\ y \in \mathbf{Orb}(x). & \end{aligned}$$

Transitividad:

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in X \qquad x \in \mathbf{Orb}(y), y \in \mathbf{Orb}(z) \quad &\Longrightarrow \\ \exists g \in G \sqcap x = \alpha(y, g), \exists h \in G \sqcap y = \alpha(z, h) \quad &\Longrightarrow \\ \alpha(z, h * g) = \alpha(\alpha(z, h), g) = \alpha(y, g) = x \quad &\Longrightarrow \\ \exists i := (h * g) \in G \sqcap x = \alpha(i, z) \quad &\Longrightarrow \\ x \in \mathbf{Orb}(z). & \end{aligned}$$

Además:

$$[x]_R = \{y \in X : yRx\} = \{y \in X : y \in \mathbf{Orb}(x)\} = \mathbf{Orb}(x). \qquad \square$$

Distancia euclidiana:[3] La **distancia euclidiana** es la función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Isometría:[3] Una función $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ será una **isometría** si preserva distancias:

$$\forall, y \in \mathbb{R}^n \qquad d(x, y) = d(\phi(x), \phi(y)).$$

Conjunto descomponible:[3] Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es **descomponible** en m conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_m \subseteq \mathbb{R}^n$ si y sólo si existen isometrías $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tales que:

$$\bigcup_{i=1}^{m} \phi_i(A_i) = S,$$

$$\forall j \neq k \qquad \phi_j(A_j) \cap \phi_k(A_k) = \varnothing.$$

A tal unión se le conoce como una **descomposición**.

Equidescomponibilidad: Dos conjuntos $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice son **equidescomponibles** si y sólo si existe un conjunto:

$$E := \{A_1, A_2, \cdots, A_m\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Tal que S y T son descomponibles en los m elementos de E.

Ahora, retrocedamos un paso y desarrollemos una intuición de la equidescomponibilidad, por definición tenemos una lista de figuras (los elementos de la equidescomposición) y una lista de acciones (las isometrías), como lo son reflexiones, rotaciones y traslaciones, de tal manera que podemos formar dos nuevas figuras (los conjuntos equidescomponibles) pegando de distintas formas las mismas figuras iniciales, como armando con un Tangram.

Teorema: La equidescomponibilidad es preservada bajo subconjuntos.
Sean $P, Q \subseteq \mathbb{R}^n$ equidescomponibles, sea $S \subseteq P$, entonces existe $T \subseteq Q$ tal que S y T son equidescomponibles.

Demostración:
Sea $A_1, \cdots, A_m$ descomposición de P y Q, e isometrías $\mu_1, \nu_1, \cdots, \mu_m, \nu_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$P = \bigcup_{i=1}^{m} \mu_i(A_i), \qquad Q = \bigcup_{i=1}^{m} \nu_i(A_i).$$

Al considerar $B_i := \mu_i^{-1}(S \cap \mu_i(A_i)) \subseteq A_i$ tenemos que:

$$\bigcup_{i=1}^{m} \mu_i(B_i) = \bigcup_{i=1}^{m} \mu_i(\mu_i^{-1}(S \cap \mu_i(A_i))) = \bigcup_{i=1}^{m} S \cap \mu_i(A_i) = S \cap \bigcup_{i=1}^{m} \mu_i(A_i) = S \cap P = S.$$

Teniendo así una descomposición de S, aún más, debido a que $B_i \subseteq A_i$:

$$T := \bigcup_{i=1}^{m} \nu(B_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \nu(A_i) = Q.$$

Dando así la equidescomposición de S y T. ▫

Teorema: La equidescomponibilidad es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración:
Reflexividad: Para demostrar es reflexiva basta notar que la identidad es una isometría.
Simetría: No hay un orden a la relación de ser equidescomponible, se sigue la simetría.
Transitividad: Sean $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ donde A y B son equidescomponibles y B y C también. Sea $X_1, \cdots, X_m$ descomposición de A y B, junto isometrías $\mu_1, \nu_1, \cdots, \mu_m, \nu_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} \mu_i(X_i), \qquad B = \bigcup_{i=1}^{m} \nu_i(X_i).$$

Similarmente, $Y_1, \cdots, Y_p$ descomposición de B, C, e isometrías $\xi_1, \tau_1, \cdots, \xi_p, \tau_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$B = \bigcup_{i=1}^{p} \xi_i(Y_i), \qquad C = \bigcup_{i=1}^{p} \tau_i(Y_i).$$

Al considerar $Z_{i,j} := \nu_i(X_i) \cap \xi_j(Y_j)$, con $i, j \in \mathbb{N}$ $(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant p)$ tenemos:

$$\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{p}(\mu_i \circ \nu_i^{-1})(\nu_i(X_i) \cap \xi_j(Y_j)) = \bigcup_{i=1}^{m}(\mu_i \circ \nu_i^{-1} \circ \nu_i)(X_i) = A,$$
$$\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{p}(\tau_j \circ \xi_j^{-1})(\nu_i(X_i) \cap \xi_j(Y_j)) = \bigcup_{j=1}^{p}(\tau_j \circ \xi_j^{-1} \circ \xi_i)(Y_j) = C.$$

Por lo que los $Z_{i,j}$ junto a las isometrías $\mu_i \circ \nu_i^{-1}$ y $\tau_j \circ \xi_j^{-1}$ equidescomponen a A y C. ▫

Teorema: La equidescomponibilidad es preservada bajo uniones 1-1.
Sean $\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$ y $\{T_1, T_2, \cdots, T_m\}$ conjuntos de conjuntos en $\mathbb{R}^n$ tales que para cada $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, S_j y T_j sean equidescomponibles, entonces los conjuntos $S := \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ y $T := \bigcup_{i=1}^{m} T_i$ también lo son.

Demostración:
Por hipotésis tenemos que podemos descomponer simultáneamente a S_j y T_j:

$$\forall j \in \{1, \cdots, m\} \quad \exists A_{j,1}, \cdots, A_{j,k_j} \subseteq \mathbb{R}^n \quad \exists \phi_{j,1}, \cdots, \phi_{j,k_j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad S_j = \bigcup_{l=1}^{k_j} \phi_{j,l}(A_{j,l}),$$
$$\exists \theta_{j,1}, \cdots, \theta_{j,k_j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad T_j = \bigcup_{l=1}^{k_j} \theta_{j,l}(A_{j,l}).$$

Entonces:

$$S = \bigcup_{j=1}^{m} S_j = \bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{l=1}^{k_j} \phi_{j,l}(A_{j,l}), \qquad T = \bigcup_{j=1}^{m} T_j = \bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{l=1}^{k_j} \theta_{j,l}(A_{j,l}).$$

Dando así la equidescomposición de S y T. ▫

1.3. Topologías, juegos y estrategias

En el marco de este escrito consideraremos las siguientes definiciones:

Topología: Sea X un conjunto, y $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, diremos que τ es una **topología** de X si: El conjunto X es elemento de esta colección:

$$X \in \tau.$$

La colección es cerrada bajo uniones arbitrarias:

$$\forall \sigma \subseteq \tau \qquad \bigcup_{A \in \sigma} A \in \tau.$$

La colección es cerrada bajo intersecciones a pares (y por ende bajo intersecciones finitas):

$$\forall A_1, A_2 \in \tau \qquad A_1 \cap A_2 \in \tau.$$

En tal caso diremos que la dupla (X, τ) es un **espacio topológico**

Observación: En la mayoría de la bibliografía se pide $\varnothing \in \tau$, aquí no lo haremos, pues:

$$\varnothing \subseteq \tau \qquad \bigcup_{A \in \varnothing} A = \varnothing \in \tau.$$

Abierto: Sea (X, τ) un espacio topológico, diremos que $A \subseteq X$ es **abierto** si $A \in \tau$.

Cerrado: Sea (X, τ) un espacio topológico, diremos que $C \subseteq X$ es **cerrado** si $X \backslash C \in \tau$.

Borel: Sea (X, τ) un espacio topológico, diremos que $B \subseteq X$ es **Borel** si pertenece a la cerradura bajo las operaciones de unión e intersección contables y complemento (respecto a X) de la colección de abiertos, o equivalentemente, de cerrados.

Base topológica: Sea X conjunto, y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{B}$ será una **base topológica** de X si: $\mathcal{B}$ cubre a X, es decir, todo elemento del conjunto X es elemento de algún miembro de $\mathcal{B}$:

$$\forall x \in X \qquad \exists B \in \mathcal{B} \sqcap x \in B \subseteq X.$$

Y:

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \qquad \forall x \in B_1 \cap B_2 \qquad \exists B_3 \in \mathcal{B} \sqcap x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Básico: Sea X conjunto, y $\mathcal{B}$ base topológica de X, diremos $W \subseteq X$ es **básico** si $W \in \mathcal{B}$.

Teorema: Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces τ es una base topológica. ▫

Demostración: Por definición de topología $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, además τ cubre a X pues $X \in \tau$, y la propiedad restante se obtiene de la cerradura bajo intersección a pares.

Teorema (Topología generada por una base)**:** Sea X conjunto y $\mathcal{B}$ base topológica de X, entonces $\tau(\mathcal{B}) := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \forall x \in A : \ \exists B \in \mathcal{B} \sqcap x \in B \subseteq A\}$ es una topología de X, a la cual llamaremos la topología generada por $\mathcal{B}$.

Demostración:
El conjunto X es elemento de esta colección, notemos que por definición de base:

$$\forall x \in X \qquad \exists B \in \mathcal{B} \sqcap x \in B \subseteq X \ \Rightarrow$$
$$X \in \tau(\mathcal{B}).$$

La colección es cerrada bajo uniones arbitrarias:

$$\forall \sigma \subseteq \tau(\mathcal{B}),\ \forall x \in \bigcup_{A\in\sigma} A \qquad \exists A \in \sigma \subseteq \tau(\mathcal{B}) \sqcap x \in A \ \Rightarrow$$
$$\exists B \in \mathcal{B} \sqcap x \in B \subseteq A \subseteq \bigcup_{A\in\sigma} A \ \Rightarrow$$
$$\bigcup_{A\in\sigma} A \in \tau(\mathcal{B}).$$

La colección es cerrada bajo intersecciones a pares (y por ende bajo intersecciones finitas):

$$\begin{aligned}
\forall A_1, A_2 \in \tau(\mathcal{B}),\ \forall x \in A_1 \cap A_2 \qquad & [x \in A_1 \in \tau(\mathcal{B})] \wedge [x \in A_2 \in \tau(\mathcal{B})] \ \Rightarrow \\
& [\exists B_1 \in \mathcal{B} \sqcap x \in B_1 \subseteq A_1] \wedge [\exists B_2 \in \mathcal{B} \sqcap x \in B_2 \subseteq A_2] \ \Rightarrow \\
& B_1, B_2 \in \mathcal{B} \sqcap x \in B_1 \cap B_2 \subseteq A_1 \cap A_2 \ \Rightarrow \\
& \exists B_3 \in \mathcal{B} \sqcap x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq A_1 \cap A_2 \ \Rightarrow \\
& A_1 \cap A_2 \in \tau(\mathcal{B}). \qquad \square
\end{aligned}$$

Corolario: Sea X conjunto y $\mathcal{B}$ base topológica de X, la topología generada por $\mathcal{B}$ puede ser caracterizada como:

$$\tau(\mathcal{B}) = \Big\{ \bigcup_{B\in\beta} B \mid \beta \subseteq \mathcal{B} \Big\}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
A \in \Big\{ \bigcup_{B\in\beta} B \mid \beta \subseteq \mathcal{B} \Big\} \quad & \Longrightarrow \quad \exists \beta \subseteq \mathcal{B} \sqcap A = \bigcup_{B\in\beta} B \\
& \Longrightarrow \quad (\forall x \in A)\ (\exists B \in \beta \subseteq \mathcal{B} \sqcap x \in B \subseteq A) \\
& \Longrightarrow \quad A \in \tau(\mathcal{B}).
\end{aligned}$$

Y:

$$\begin{aligned}
A \in \tau(\mathcal{B}) \quad & \Longrightarrow \quad (\forall x \in A)\ (\exists B_x \in \mathcal{B} \sqcap x \in B_x \subseteq A) \\
\beta := \{B_x \mid x \in A\} \subseteq \mathcal{B} \quad & \Longrightarrow \quad (\forall x \in A)\ (\exists B_x \in \beta \sqcap x \in B_x) \wedge (\forall B_x \in \beta)(B_x \subseteq A) \\
& \Longrightarrow \quad A = \bigcup_{x\in A} B_x \in \Big\{ \bigcup_{B_x\in\beta} B_x \mid \beta \subseteq \mathcal{B} \Big\}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Corolario: Sea X un conjunto y $\mathcal{B}$ una base topológica de X, entonces $\mathcal{B} \subseteq \tau(\mathcal{B})$.

Demostración: $\forall B' \in \mathcal{B}$ podemos definir $\beta := \{B'\} \subseteq \mathcal{B}$, así $B' = \bigcup_{B\in\beta} B \in \tau(\mathcal{B})$. □

Teorema: Sea X conjunto y $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases topológicas en X, luego:

$$\tau(\mathcal{B}_1) \subseteq \tau(\mathcal{B}_2) \iff (\forall B_1 \in \mathcal{B}_1)\ (\forall x \in B_1)\ (\exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \sqcap x \in B_2 \subseteq B_1).$$

Demostración:

⇒) Supongamos:

$$\tau(\mathcal{B}_1) \subseteq \tau(\mathcal{B}_2) \implies$$

Por el corolario anterior:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 \subseteq \tau(\mathcal{B}_1) \subseteq \tau(\mathcal{B}_2) &\implies \\ (\forall B_1 \in \mathcal{B}_1)(B_1 \in \tau(\mathcal{B}_2)) &\implies \end{aligned}$$

Recurriendo a la definición de topología generada por $\mathcal{B}_2$ obtenemos la propiedad:

$$(\forall B_1 \in \tau(\mathcal{B}_1))(\forall x \in B_1)(\exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \sqcap x \in B_2 \subseteq B_1)$$

⇐) Para esta implicación partimos de que:

$$(\forall B_1 \in \mathcal{B}_1)\ (\forall x \in B_1)\ (\exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \sqcap x \in B_2 \subseteq B_1).$$

Por definición de la topología generada por $\mathcal{B}_1$:

$$(\forall U \in \tau(\mathcal{B}_1))(\forall x \in U)(\exists B_1 \in \mathcal{B}_1 \sqcap x \in B_1 \subseteq U) \implies$$

Recurriendo a nuestra hipótesis, pues $B_1 \in \mathcal{B}_1$ y $x \in B_1$:

$$\begin{aligned} (\forall U \in \tau(\mathcal{B}_1))(\forall x \in U)(\exists B_1 \in \mathcal{B}_1 \sqcap x \in B_1 \subseteq U)(\exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \sqcap x \in B_2 \subseteq B_1 \subseteq U) &\implies \\ (\forall U \in \tau(\mathcal{B}_1))(\forall x \in U)(\exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \sqcap x \in B_2 \subseteq U) &\implies \end{aligned}$$

Lo cual es nuevamente la definición de topología generada, sólo que ahora, por $\mathcal{B}_2$:

$$\begin{aligned} (\forall U \in \tau(\mathcal{B}_1))(U \in \tau(\mathcal{B}_2)) &\implies \\ \tau(\mathcal{B}_1) \subseteq \tau(\mathcal{B}_2). & \quad \square \end{aligned}$$

Subbase topológica: Sea X conjunto y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{S}$ es **subbase topológica** de X si: $\mathcal{S}$ cubre a X, es decir, todo elemento del conjunto X es elemento de algún miembro de $\mathcal{S}$:

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X; \qquad \text{lo cual es equivalente a} \qquad \forall x \in X \; \exists S \in \mathcal{S} \sqcap x \in S \subseteq X.$$

Subbásico: Sea X conjunto, $\mathcal{S}$ subbase topológica de X, $W \subseteq X$ es **subbásico** si $W \in \mathcal{S}$.

Teorema (Base generada por una subbase)**:** Sea X conjunto y $\mathcal{S}$ subbase topológica de X, luego $\mathcal{B}(\mathcal{S}) := \{B \in \mathcal{P}(X) \mid \exists S_1, \cdots, S_n \in \mathcal{S} \sqcap B = \bigcap_{i=1}^{n} S_i\}$ es base topológica de X, a la cual llamaremos la base generada por $\mathcal{S}$.

Demostración: Claramente $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{S})$, basta tomar $S \in \mathcal{S}$ y considerar $S = \bigcap_{i=1}^{1} S$, en consecuencia por definición de subbase:

$$\forall x \in X \qquad \exists S \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{S}) \sqcap x \in S \subseteq X.$$

Además, por construcción notemos que $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ es cerrado bajo intersecciones a pares:

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{S}) \qquad \begin{array}{l} \exists S_1, \cdots, S_{n_1} \in \mathcal{S} \sqcap B_1 = \bigcap_{i=1}^{n_1} S_i, \\ \exists S'_1, \cdots, S'_{n_2} \in \mathcal{S} \sqcap B_2 = \bigcap_{i=1}^{n_2} S'_i. \end{array}$$

En consecuencia de este hecho:

$$\exists S_1, \cdots, S_{n_1}, S_{n_1+1} := S'_1, \cdots, S_{n_1+n_2} := S'_{n_2} \in \mathcal{S} \sqcap B_1 \cap B_2 = \bigcap_{i=1}^{n_1+n_2} S_i,$$

Por lo que:

$$B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{S}).$$

Así se cumple inmediatamente la propiedad:

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{S}) \quad \forall x \in B_1 \cap B_2 \quad \exists B_3 := B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{S}) \sqcap x \in B_3 = B_1 \cap B_2 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Verificándose que $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ es una base topológica de X. ▫

Corolario: Sea X un conjunto y $\mathcal{S}$ una subbase topológica de X, entonces $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{S})$.

Demostración: $\forall S' \in \mathcal{S}$ podemos definir $S_1 := S'$, así $\exists S_1$ tal que $S' = \bigcap_{i=1}^{1} S_i \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$. En consecuencia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{S}) \subseteq \tau(\mathcal{B}(\mathcal{S}))$, así todo subbásico es básico y por ende abierto. ▫

Topología discreta: Sea X un conjunto, definimos:

$$\tau_D := \mathcal{P}(X).$$

Claramente esta es una topología, y la llamaremos la **topología discreta** de X.

Imagen inversa: Sean X y Y un par de conjuntos y $f : X \to Y$, entonces definiremos a la **imagen inversa del conjunto** $Z \subseteq Y$ **bajo** f, como:

$$f^{-1}(Z) := \{x \in X \mid f(x) \in Z\}.$$

Producto cartesiano: Sea $\mathcal{F} = \{X_i\}_{i\in I}$ una familia indexada de conjuntos no vacíos, con I un conjunto arbitrario de índices, definiremos el producto carteasiano de $\mathcal{F}$ como:

$$\prod_{i\in I} X_i := \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \;\middle|\; \forall i \in I :\ f(i) \in X_i \right\}.$$

Observación: Entenderemos por familia de conjuntos a un conjunto de conjuntos.

Proyección: Sea $\mathcal{F} = \{X_i\}_{i\in I}$ una familia indexada arbitraria de conjuntos no vacíos, dado $j \in I$, definiremos la **j-ésima proyección**:

$$\begin{aligned} p_j : \prod_{i\in I} X_i &\to X_j \\ x &\mapsto x(j) \end{aligned}$$

Topología producto: Sea $\mathcal{F} = \{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia indexada de espacios topológicos, donde I es un conjunto arbitrario de índices. Consideremos a la familia $\mathcal{F}_X = \{X_i\}_{i\in I}$, para posteriormente construir su producto cartesiano $X_P := \Pi_{i\in I} X_i$. El siguiente paso en la construcción será dotar a éste de una topología, para esto consideraremos la subbase:

$$\mathcal{S} := \{p_j^{-1}(A_j) \mid j \in I, A_j \in \tau_j\} \subseteq \mathcal{P}(X_P).$$

Para verificar que esta es una subbase de X_P basta el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned} (\forall j \in I)\ X_j \in \tau_j \quad &\Rightarrow \quad (\forall j \in I)\ X_P = p_j^{-1}(X_j) \in \mathcal{S} \\ &\Rightarrow \quad (\forall x \in X_P)\ \exists S := X_P \in \mathcal{S} \sqcap x \in S = X_p \subseteq X_P. \end{aligned}$$

Por otro lado notemos la siguiente caracterización:

$$(\forall j \in I)(\forall A_j \in \tau_j) \qquad p_j^{-1}(A_j) := \prod_{i\in I} W_j(i), \quad W_j(i) := \begin{cases} X_i & i \neq j \\ A_j & i = j \end{cases}$$

De esta forma al generar la base:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathcal{S}) &:= \{S_1 \cap \cdots \cap S_n \mid \forall m \in \{1, \cdots, n\} S_m \in \mathcal{S}\} \\ &= \{p_{j_1}^{-1}(A_{j_1}) \cap \cdots \cap p_{j_n}^{-1}(A_{j_n}) \mid \forall m \in \{1, \cdots, n\},\ j_m \in I,\ A_{j_m} \in \tau_{j_m}\} \\ &= \left\{ \prod_{i\in I} V_i \mid [(\forall i \in I) V_i \in \tau_i] \wedge [(\forall^{\wedge}\ i \in I) V_i = X_i] \right\}. \end{aligned}$$

Nos es posible dotar a X_p de la que llamaremos la **topología producto** $\tau_P := \tau(\mathcal{B}(\mathcal{S}))$. En ese mismo sentido, a la dupla (X_P, τ_P) le llamaremos el **espacio producto** de $\mathcal{F}$.

El espacio de Baire:[4] Iniciemos definiendo con índices $\forall n \in \mathbb{N}:\ X_n := \mathbb{N},\ \tau_n := \tau_D$, de manera que podamos construir la familia de espacios topológicos $\mathcal{F} = \{(X_n, \tau_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, y definiremos al **espacio de Baire** como el espacio producto de $\mathcal{F}$, consecuentemente:

$$\begin{aligned}\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n :&= \left\{ f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}:\ f(n) \in X_n \right\} \\ &= \left\{ f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}:\ f(n) \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}:\ f(n) \in \mathbb{N} \} \\ &= \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \} \\ &= \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.\end{aligned}$$

Así **el espacio de Baire** es el conjunto de sucesiones de números naturales dotado de la topología producto de una cantidad contable de copias de $\mathbb{N}$ con la topología discreta, notemos que $\mathbb{N}$ es equipotente a $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, luego $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $(\mathbb{Q} \cap [0,1])^{\mathbb{N}}$ también lo son, de forma que visualizaremos:

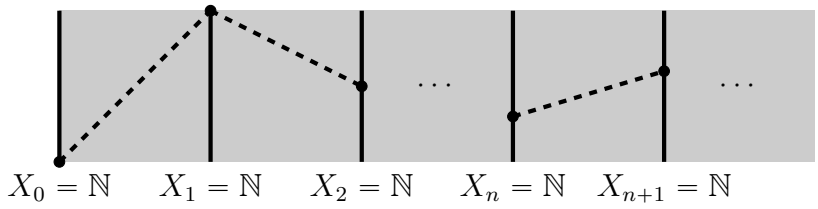


Figura 1.1: Visualización del espacio de Baire y uno de sus elementos.

Ahora intentemos visualizar a los básicos, realizando las sustituciones adecuadas sabemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathcal{S}) &= \left\{ \bigcap_{k=1,\cdots,n} p_{j_k}^{-1}(A_{j_k}) \mid n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, \cdots, m\},\ j_k \in \mathbb{N},\ A_{j_k} \subseteq \mathbb{N} \right\} \\ &= \left\{ \prod_{n\in\mathbb{N}} V_n \sqcap\ [(\forall n \in \mathbb{N}) V_n \subseteq \mathbb{N}]\ \wedge\ [(\forall\!\!\!\!\!\!\cdot\ n \in \mathbb{N}) V_n = \mathbb{N}] \right\}.\end{aligned}$$

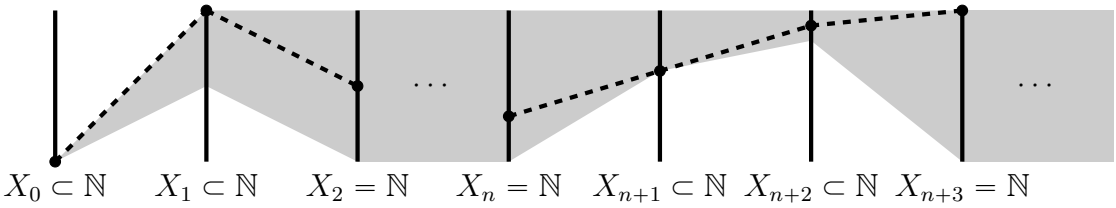


Figura 1.2: Un básico del espacio de Baire (área sombreada) y uno de sus elementos.

Estos básicos no resultan tan intuitivos, así propondremos una subbase más conveniente:

$$\mathcal{S}' := \left\{ p_j^{-1}(\{a_j\}) \mid j \in \mathbb{N},\ a_j \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathcal{S}.$$

Lo cual a su vez resulta en una base más conveniente:

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}') := \left\{ \bigcap_{k=1}^{m} p_{j_k}^{-1}(\{a_{j_k}\}) \mid m \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, \cdots, m\},\ j_k \in \mathbb{N},\ a_{j_k} \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{S}).$$

Verifiquemos que ambas bases generen la misma topología, por la contención anterior:

$$(\forall B_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{S}'))\quad (\forall x \in B_1)\quad (\exists B_2 := B_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{S}') \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{S}) \sqcap x \in B_2 \subseteq B_1).$$

Lo cual por un resultado anterior implica que:

$$\tau(\mathcal{B}(\mathcal{S}')) \subseteq \tau(\mathcal{B}(\mathcal{S})).$$

Basta así probar la contención contraria, sean:

$$B_2 = \bigcap_{k=1}^{m} p_{j_k}^{-1}(A_{j_k}) \in \mathcal{B}(\mathcal{S}) \qquad x \in B_2 \qquad B_1 := \bigcap_{k=1}^{m} p_{j_k}^{-1}(\{x(j_k)\}) \in \mathcal{B}(\mathcal{S}').$$

Por definición de imagen inversa:

$$\forall y \in B_1 \qquad y(j_k) = x(j_k) \in A_{j_k} \Rightarrow y \in B_2.$$

Así, en particular:

$$x \in B_1 \subseteq B_2.$$
$$\tau(\mathcal{B}(\mathcal{S}')) \supseteq \tau(\mathcal{B}(\mathcal{S})).$$

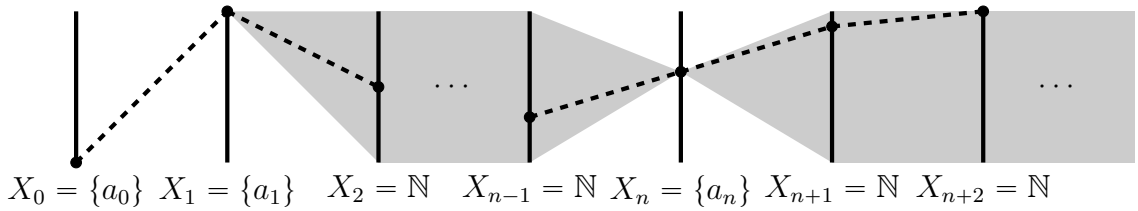


Figura 1.3: Visualización de un cilindro del espacio de Baire y uno de sus elementos.

En este caso los básicos son productos de $\mathbb{N}$ salvo una cantidad finita de entradas, en las cuales es un singulete, a estos básicos los llamaremos también **conjuntos cilindro.**

Otra alternativa que resultará útil en el futuro será:

$$\mathcal{B}'' := \left\{ \bigcap_{k=1}^{m} p_k^{-1}(\{a_k\}) \mid m \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, \cdots, m\},\ a_k \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{S}).$$

Verifiquemos rápidamente que es una base:

$$\forall x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \qquad \exists B := p_1^{-1}(\{x(1)\}) \in \mathcal{B} \sqcap x \in B'' \subseteq X$$

$$\begin{matrix} B_1 = \bigcap_{k=1}^{m} p_k^{-1}(\{a_k\}) \in \mathcal{B}'' \\ B_2 = \bigcap_{k=1}^{m'} p_k^{-1}(\{a'_k\}) \in \mathcal{B}'' \end{matrix} \quad \forall x \in B_1 \cap B_2 \quad \exists B := \bigcap_{k=1}^{\substack{\max \\ \{m,m'\}}} p_k^{-1}(\{a_k\}) \in \mathcal{B}'' \sqcap x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$$

Similarmente a la página anterior, verifiquemos que genera la misma topología:

$$(\forall B_1 \in \mathcal{B}'') \qquad (\forall x \in B_1) \qquad (\exists B_2 := B_1 \in \mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{S}) \sqcap x \in B_2 \subseteq B_1)$$
$$\tau(\mathcal{B}'') \subseteq \tau(\mathcal{B}(\mathcal{S}))$$

Basta así probar la contención contraria, sean:

$$B_2 = \bigcap_{k=1}^{m} p_{j_k}^{-1}(A_{j_k}) \in \mathcal{B}(\mathcal{S}) \qquad x \in B_2 \qquad B_1 := \bigcap_{l=1}^{\substack{\max \\ \{j_1, \cdots, j_m\}}} p_l^{-1}(\{x(l)\}) \in \mathcal{B}(\mathcal{S}').$$

Por definición de imagen inversa:

$$\forall y \in B_1 \qquad l = j_k :\ y(l) = x(l) \in A_l \Rightarrow y \in B_2,$$

así, en particular:

$$x \in B_1 \subseteq B_2$$
$$\tau(\mathcal{B}'') \supseteq \tau(\mathcal{B}(\mathcal{S}))$$

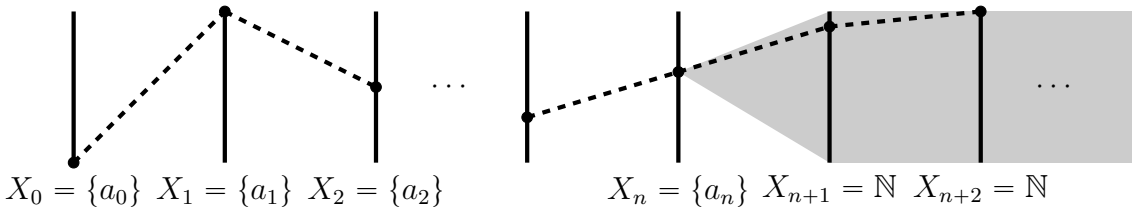


Figura 1.4: Visualización de un cono del espacio de Baire y uno de sus elementos.

En esta ocasión vemos que los básicos son segmentos hasta un punto en el que se ramifican, así a estos básicos los llamaremos **conos**.

Juego de Gale-Stewart:[5] Considere el conjunto de sucesiones naturales $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, entonces podemos definir el juego de Gale-Stewart asociado al conjunto A como el juego infinito con información perfecta de dos jugadores alternados, donde eligen un natural, esto se puede visualizar como:

1. El jugador 1 escoge un natural n_0.
2. El jugador 2 ve la jugada anterior y escoge un natural n_1.
3. El jugador 1 ve la jugada anterior y escoge un natural n_2.
4. Continuamos este proceso alternando jugadores.

Al "acabar" el juego, los jugadores habrán formado una sucesión $\mathbf{n} = \langle n_0, n_1, \dots \rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, donde el jugador 1 gana si $\mathbf{n} \in A$ y el jugador 2 gana en caso contrario, es decir, si $\mathbf{n} \notin A$. Denotamos a este juego por G_A.

Juego de Gale-Stewart abierto/Borel/cerrado: Diremos un juego de Gale-Stewart es **abierto/Borel/cerrado** si su conjunto asociado es abierto/Borel/cerrado (resp.) en el espacio de Baire.

Estrategias: Una estrategia para el Jugador 1 es una función:

$$\sigma : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{2k} \to \mathbb{N}.$$

Similarmente una estrategia para el Jugador 2 es una función:

$$\rho : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{2k+1} \to \mathbb{N}.$$

Notemos que esta definición la hemos construido independientemente de un juego.

Estrategias ganadoras para G_A: Consideremos $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y su juego correspondiente, diremos que la estrategia σ para el Jugador 1 es **ganadora** si:

$$\forall \rho : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{2k+1} \to \mathbb{N} \qquad \langle \sigma(\varnothing), \rho(\sigma(\varnothing)), \sigma(\langle \sigma(\varnothing), \rho(\sigma(\varnothing))\rangle), \cdots \rangle \in A.$$

Si bien esta definición es aparentemente compleja, la idea detrás es bastante sencilla, lo que se nos dice es que independientemente de los movimientos que haga el Jugador 2, el Jugador 1 gana si sigue esta estrategia.
De manera similar diremos que la estrategia ρ para el Jugador 2 es **ganadora** si:

$$\forall \sigma : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{2k} \to \mathbb{N} \qquad \langle \sigma(\varnothing), \rho(\sigma(\varnothing)), \sigma(\langle \sigma(\varnothing), \rho(\sigma(\varnothing))\rangle), \cdots \rangle \notin A.$$

Análogamente al caso anterior, esto implica que para cualquier movida del Jugador 1, el Jugador 2 gana al aplicar esta estrategia.
Diremos que un juego es **determinado** si algún jugador posee una estrategia ganadora.

Teorema: Existe un juego de Gale-Stewart determinado.

Demostración: Considere el conjunto:

$$A := \{\langle a_0, a_1, \cdots \rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid a_0 = 0\}.$$

Basta así tomar una estrategia (para J1) tal que:

$$\sigma(\varnothing) = 0.$$

Esta resulta ganadora, pues independientemente de cualquier movimiento:

$$\langle \sigma(\varnothing), \rho(\sigma(\varnothing)), \cdots \rangle = \langle 0, \rho(\sigma(\varnothing)), \cdots \rangle \in A. \qquad \square$$

Observación: Sea $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ un conjunto abierto en el espacio de Baire y $a \in A$, entonces existe un básico (segmento inicial) $\mathcal{B} \subseteq A$ tal que $a \in \mathcal{B}$, así en el juego G_A, para toda secuencia ganadora de 1 hubo un punto finito del juego donde aseguró el gane.

Teorema (Determinación de juegos abiertos)**:** Sea $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ un conjunto abierto (en el espacio de Baire), entonces su juego de Gale-Stewart asociado está determinado.

Demostración: Supongamos que el jugador 1 no tiene una estrategia ganadora para G_A, así no hay un primer movimiento $a_0 \in \mathbb{N}$ que le asegure la victoria, en otras palabras:

$$\forall a_0 \in \mathbb{N} \quad \exists \rho(a_0) \in \mathbb{N} \quad \sqcap \quad \{a_0\} \times \{\rho(a_0)\} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \nsubseteq A.$$

Supongamos así que J1 juega un a_0' cualquiera, y que J2 juega su $\rho(a_0')$ correspondiente. Consideremos ahora el conjunto:

$$A_{\langle a_0',\, \rho(a_0')\rangle} := \Big\{\langle b_0,\ b_1, \cdots \rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \;\Big|\; \langle a'0,\ \rho(a_0'),\ b_0,\ b_1,\ \cdots \rangle \in A\Big\}.$$

J1 no tiene estrategía ganadora para $G_{A_{\langle a_0',\, \rho(a_0')\rangle}}$, para ningún a_0', pues de lo contrario, elegiría el mínimo a_0' para el que si la tenga y obtendría una estrategía ganadora para G_A Además, toda jugada ganadora para 1 en $G_{A_{\langle a_0',\, \rho(a_0')\rangle}}$ tiene que ocurrir en una etapa finita, si esto no sucediera habría una jugada ganadora en G_A que no sucede en una etapa finita, contradiciendo nuestra observación. Luego no hay un primer movimiento a_2 (en $G_{A_{\langle a_0',\, \rho(a_0')\rangle}}$) que le dé el gane:

$$\forall a_2 \in \mathbb{N} \quad \exists \rho(a_0, \rho(a_0'), a_2) \in \mathbb{N} \quad \sqcap \quad \{a_2\} \times \{\rho(a_0, \rho(a_0'), a_2)\} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \nsubseteq A_{\langle a'0,\, \rho(a_0')\rangle}.$$

Supongamos que J1 juega un a_2' cualquiera, y que J2 juega su $\rho(a_0, \rho(a_0'), a_2)$. Construyamos de forma similar a nuestro paso anterior el conjunto:

$$A_{\langle a_0',\, \rho(a_0'),\, a_2',\, \rho(a_0, \rho(a_0'), a_2)\rangle} :=$$
$$\Big\{\langle b_0,\ b_1, \cdots \rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \;\Big|\; \langle a'0,\ \rho(a_0'),\ a_2',\ \rho(a_0, \rho(a_0'), a_2),\ b_0,\ b_1,\ \cdots \rangle \in A\Big\}.$$

Por la misma lógica que antes se ve J1 no tiene estrategía ganadora en su juego asociado y que si J1 ganara lo haría en una etapa finita, continuamos así este proceso inductivamente, dándonos una estrategia ganadora para J2, pues le niega ganar a J1 en una etapa finita. $\square$

El siguiente resultado no tendrá demostración formal, resaltando sus ideas principales, esto por la complejidad y longitud de la demostración, y no se empleará más adelante.

Teorema (Determinación de juegos de Borel[6],[7])**:** Sea $B \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ un conjunto Borel (en el espacio de Baire), entonces su juego de Gale-Stewart asociado está determinado.

Bosquejo: La idea central de esta prueba es que al tratar con conjuntos de Borel basta encontrar una propiedad conservada bajo complementos y uniones numerables y demostrar que ésta se cumple para el caso base de conjuntos cerrados.
En primera instancia es natural proponer el estar determinado como tal propiedad, sin embargo, en caso de existir un juego no determinado con conjunto asociado A, basta considerar los conjuntos $A_0 := A \cup \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} | a_0 = 0\}$ y $A_1 := A \cup \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} | a_0 \neq 0\}$, notar que sus juegos asociados están determinados, y razonar que por leyes de De Morgan:

$$A = A_0 \cap A_1 = (A_0^c \cup A_1^c)^c.$$

Para concluir que la determinación no se conserva al operar bajo complemento y unión, así habrá que proponer alguna propiedad más fuerte y verificar que esta se conserve. Como primer acercamiento Martin define a lo que llama elevar un juego, cuyas ideas son, mapear un juego a otro más simple (por ejemplo, uno de Borel a uno abierto y cerrado), y las estrategías ganadoras en el juego simple llevan a estrategías ganadoras en el original, Luego, Martin define a lo que llama una cubierta de un árbol, y una k-cubierta, subyacientemente elevando juegos, en uniones adecuadas (tanto finitas como numerables). Como propiedad resultante, Martin propone el concepto de ser un conjunto desenredado, el cual consiste en que haya una cubierta que eleve su juego a uno abierto y cerrado, para luego probar que todo juego asociado a un conjunto desenredado es determinado. La demostración finaliza con un caso base, al probar que los cerrados son desenredados, e inductivamente, pues desenredarse se conserva bajo complementos y uniones numerables, luego los Borel se desenredan y por ende son determinados.
La demostración la puede consultar el lector en [6]. □

Capítulo 2

ZF+AC: Resultados y Patologías

En este capítulo exploraremos algunos resultados, tanto intuitivos como contraintuitivos, consecuentes a asumir el axioma de elección (AC) dentro de la teoría de Zermelo-Fraenkel con el fin de apreciar la utilidad de sus alternativas más débiles junto con su contraparte, antes de todo esto empecemos definiendo el axioma:

Axioma de elección (AC)[8]**:**
Para toda colección F de conjuntos no vacíos disjuntos a pares, existe un conjunto E que contiene exactamente un elemento de cada conjunto de F:

$$\forall F \pitchfork ([\varnothing \notin F] \wedge [\forall A \in F, \forall B \in F \backslash \{A\} : \ A \cap B = \varnothing]) \quad \exists E \pitchfork (\forall A \in F \ \ |E \cap A| = 1).$$

A este conjunto E lo llamaremos **conjunto de elección** o **selector**.

Esta formulación del axioma de elección será la que usaremos a lo largo del capítulo, habiendo dicho esto vale la pena ver algunas de sus equivalencias.

2.1. Equivalencias

Existencia de una función de elección (FE):
Para cualquier colección F de conjuntos no vacíos, existe una **función de elección** e definida en F, es decir, una función que mapea cada conjunto de F a uno de sus elementos.

$$\forall F[\varnothing \notin F] \quad \exists e : F \to \bigcup F \pitchfork (\forall A \in F \ \ e(A) \in A).$$

Lema de Zorn (LZ):
Sea $X \neq \varnothing$ un conjunto con orden $\preccurlyeq$. Si toda cadena Y de X es acotada superiormente, entonces X es con maximal.

Teorema del buen orden de Zermelo (BO):
Todo conjunto X admite un buen orden, es decir, tal que $\forall Y \subseteq X, Y \neq \varnothing$, existe mín$(Y)$.

Habiendo enunciado estos, parece necesario hablar del contexto histórico detrás de ellos, este empieza, como muchos conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos, con Cantor, quien en 1883 ideó el principio del buen orden como uno "fundamental del pensamiento", en otras palabras, lo consideraba básico para la construcción de la teoría de conjuntos, un axioma; esto resultó controvertido en su momento, pues su formulación no es evidente. Una persona que era parte de esta corriente de pensamiento fue Ernst Zermelo, formulando el axioma de elección para demostrar el principio del buen orden en 1904, en un intento de mostrarlo como la implicación de un enunciado aún más primitivo. Por otro lado y tiempo después, en el año 1935, Zorn enunció el "Principio del Máximo", nombre que le dió en un artículo publicado por la American Mathematical Society, nombre que sería reemplazado por el de Lema de Zorn, por uno de sus contemporáneos, John Tukey, pues funge como lema de un resultado suyo (el lema de Teichmüller-Tukey, el cual mencionaremos más adelante, pues resulta ser equivalente al axioma de elección). La siguiente cita resume la postura filosófica común de los matemáticos de la época:

"**El axioma de elección es obviamente verdadero,**
el principio del buen orden obviamente falso,
y quién sabe del lema de Zorn."

Jerry Bona

Teorema: Los siguientes enunciados son equivalentes[9]:

1. Axioma de elección.
2. Existencia de una función de elección para toda colección de conjuntos no vacíos.
3. Lema de Zorn.
4. Teorema del buen orden de Zermelo.

Demostración:

1⇒2. Consideremos una colección A de conjuntos no vacíos. Para cada $a \in A$ definamos:

$$X_a := \{(a, x) | x \in a\} \qquad \alpha := \{X_a | a \in A\}.$$

Puesto que todo elemento de A es no vacío, todo $X_a \in \alpha$ también es no vacío. Ahora consideremos $Y, Z \in \alpha$, tales que $Y \neq Z$, dejemos que:

$$Y = \{(b, y) | y \in b\} \qquad Z = \{(c, z) | z \in c\}.$$

Para algunos $b, c \in A$, notemos que:

$$Y \neq Z \qquad \Longrightarrow \qquad b \neq c \qquad \Longrightarrow \qquad Y \cap Z = \varnothing.$$

De esta manera α cumple los requisitos del axioma de elección, en consecuencia existe un conjunto E que elige un par $(a, x) \in X_a$ para todo $X_a \in \alpha$, así construimos $f(a)$ como el único elemento $x \in a$ tal que $(a, x) \in E$. Al definir la función $f := E$, esta resulta de elección.

2⇒3. Sea $X \neq \varnothing$, ordenado por $\preccurlyeq$, tal que toda cadena C de X es acotada superiormente. Procederemos por contradicción, supondremos que X no es con maximal; por hipótesis, $\mathcal{P}(X)\backslash\{\varnothing\}$ tiene una función de elección e, definamos $x_0 := e(X)$, y si C es una cadena consideraremos el conjunto de cotas superiores estrictas de C:

$$\mathrm{Upp}(C) := \{u \in X\backslash C : \forall y \in C, x \prec u\}.$$

Por nuestro enunciado inicial, al ser C una cadena tiene al menos una cota superior u, supongamos que C no tiene máximo, por lo tanto, $u \notin C$, y aún más $u \in \mathrm{Upp}(C)$, ahora, supondremos que existe máx(C), puesto que X no tiene maximal, existe $v \in X$ tal que máx$(C) \prec v$, luego $\forall x \in C : x \preccurlyeq$ máx$(C) \prec v$, y así $v \in \mathrm{Upp}(C)$, probando que $\mathrm{Upp}(C) \neq \varnothing$, para cualquier cadena C, definamos $g(C) := e(\mathrm{Upp}(C))$, para nuestros fines diremos un subconjunto bien ordenado B de X es **conforme** si:

$$I \subset B \sqcap (\forall b \in B)\ (\forall i \in I)\ (b \preccurlyeq i \Rightarrow b \in I) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{r} \text{mín}(B) = x_0, \\ \text{mín}(B\backslash I) = g(I). \end{array}$$

Al antecedente de la segunda propiedad se le dice que I es **segmento inicial** de B. Mostraremos que si $B, B' \subseteq X$ son conformes, entonces $B \subseteq B'$ o $B' \subseteq B$ supongamos lo opuesto, así tanto $B\backslash B' \subset B$ como $B'\backslash B \subset B'$ son no vacíos, y puesto que B y B' son bien ordenados definimos $z :=$ mín$(B\backslash B')$, $z' :=$ mín$(B'\backslash B)$, como $z \neq z'$ no puede que $z \preccurlyeq z' \wedge z' \preccurlyeq z$, sin perder generalidad asumimos $z' \not\preccurlyeq z$, sea $C := \{x \in B | x \prec z\}$, puesto que $z =$ mín$(B\backslash B')$ se sigue que $C \subseteq B'$, además $C \subset B$, sean $b \in B, c \in C$ tales que $b \preccurlyeq c$ entonces $b \preccurlyeq c \prec z$, luego $b \in C$, y debido a la segunda condición de conformidad es claro que $z =$ mín$(B\backslash C) = g(C)$. Si $C = B'$, entonces $B' \subset B$ terminando nuestra labor, supongamos que $C \neq B'$, si $\exists c \in C$ tal que $z' \preccurlyeq c$ por transitividad $z' \preccurlyeq c \prec z$ lo cual contradice que $z' \not\preccurlyeq z$, así, como B' es bien ordenado, y por ende una cadena, tenemos que $\forall c \in C :\ c \prec z'$, por definición $\forall b' \in B'\backslash B : z' \preccurlyeq b'$, luego si $b' \prec z'$ para $b' \in B'$ tenemos que $b' \in B$, así $C \subset B'$. Sean $b' \in B', c \in C$ tales que $b' \preccurlyeq c$ entonces $b' \preccurlyeq c \prec z'$, luego $b' \in B$, además $b' \preccurlyeq c \prec z$, luego $b \in C$, de modo que C también es segmento inicial de B, y por conformidad $z = g(C) =$ mín$(B'\backslash C) \in B', \#c$.
Una consecuencia de que para dos conformes uno contenga al otro es que la unión de conformes es conforme, sea $\mathcal{A}$ el conjunto de conformes, definamos $A := \bigcup_{a \in \mathcal{A}} a \in \mathcal{A}$, sin embargo tenemos que $A \cup \{g(A)\}$ es conforme, así $g(A) \in A$, obteniendo una contradicción, mostrando que X tiene maximal.

3⇒4. Asumiremos X es no vacío pues el conjunto vacío es trivialmente bien ordenado. Como ya hemos dicho anteriormente un **segmento inicial** I de una cadena C es una subcadena tal que si para $c \in C$ e $i \in I$ ocurre que $c \preccurlyeq i$ entonces $c \in I$. Consideremos pares $(Y, \preccurlyeq_Y)$, consistentes de $Y \subseteq X$ y un buen orden $\preccurlyeq_Y$ en Y. Definimos un orden parcial en el conjunto de estos pares de acuerdo a $(Y, \preccurlyeq_Y) \preccurlyeq (Y', \preccurlyeq_{Y'})$ siempre y cuando $Y \subseteq Y'$, $\preccurlyeq_Y = \preccurlyeq_{Y'}$ al restringirse en Y y Y sea segmento inicial de Y' (en $\preccurlyeq_{Y'}$). Ahora puesto que el conjunto X no es vacío, el conjunto ordenado tampoco lo es, un elemento de éste es $(\{x\}, \{(x, x)\})$, con $x \in X$. Aún más, si C es una cadena de este conjunto ordenado, podemos definir $\overline{Y} := \bigcup_{(Y, \preccurlyeq_Y) \in C} Y$ y $x \preccurlyeq_{\overline{Y}} y$ siempre y cuando $x \preccurlyeq_Y y$ para algún $(Y, \preccurlyeq_Y) \in C$, probaremos que $\preccurlyeq_{\overline{Y}}$ es un buen orden en $\overline{Y}$. En efecto, sean $S \in \mathcal{P}(\overline{Y}) \backslash \{\varnothing\}$ y $(Y, \preccurlyeq_Y) \in C$ un par cualquiera en la cadena que verifique que $S \cap Y \neq \varnothing$, definamos $u := \text{mín}_{\preccurlyeq_Y}(S \cap Y)$, donde el mínimo es respecto al buen orden $\preccurlyeq_Y$, luego u es un mínimo para S respecto a $\preccurlyeq_{\overline{Y}}$, pues tenemos que para $s \in S$ arbitrario, o en primer instancia $s \in Y$, en cuyo caso $u \preccurlyeq_{\overline{Y}} s$ se sigue por definición de $u \preccurlyeq_Y s$, ó $s \notin Y$, por otro lado, $s \in \overline{Y} = \bigcup_{(Y', \preccurlyeq_{Y'}) \in C} Y'$, luego $s \in Y'$ para algún $(Y', \preccurlyeq_{Y'}) \in C$, recordemos que C es cadena y $(Y, \preccurlyeq_Y), (Y', \preccurlyeq_{Y'}) \in C$, se relacionan, así $Y \subset Y'$, $(\forall s \in Y')(\forall u \in Y)(s \notin Y \Rightarrow s \not\preccurlyeq_{Y'} u)$, pues Y es segmento inicial de Y', y $u \preccurlyeq_{Y'} s$, y, por el mismo razonamiento que antes, $u \preccurlyeq_{\overline{Y}} s$, así $(\overline{Y}, \preccurlyeq_{\overline{Y}})$ es cota superior de C. Por lema de Zorn nuestro conjunto ordenado es con maximal, $(Z, \preccurlyeq_Z)$. Si $Z \neq X$, sea $x \in X \backslash Z$, entonces podemos extender $(Z, \preccurlyeq_Z)$ a un conjunto $Z \cup \{x\}$ definiendo x como mayor que todo elemento de Z, contradiciendo la maximalidad, así $Z = X$, es decir, X puede ser bien ordenado.

4⇒1. Sea X colección de conjuntos no vacíos disjuntos, definamos ahora el conjunto $Y := \bigcup_{z \in X} z$ con su buen orden $\preccurlyeq$, puesto que $z \in X \subseteq \mathcal{P}(Y) \backslash \{\varnothing\}$, existe mín$(z)$, así es posible definir un selector en X por $E := \{\text{mín}(z) \in z | z \in X\}$. □

2.1.1. Otras equivalencias

Los siguientes son también enunciados equivalentes, bajo ZF, al axioma de elección[10].

Teorema de Tarski[11]:
Para cualquier conjunto infinito F, hay una biyección entre F y $F \times F$.

Tricotomía de la cardinalidad:
Dados dos conjuntos cualesquiera, entonces ó ambos tienen la misma cardinalidad ó uno tiene cardinalidad mayor que la del otro, equivalentemente, si son no vacíos, entonces uno tiene una sobreyección al otro.

El producto cartesiano de cualquier familia de conjuntos no vacíos es no vacío.

Lema de Tukey:
Sea $X \neq \varnothing$ de carácter finito, es decir:

$$\begin{array}{lllll} \forall y \in X & \forall z_1, z_2, \cdots, z_n \in Y & \Longrightarrow & \{z_1, z_2, \cdots, z_n\} \in X. & \\ & z_1, z_2, \cdots, z_n \in Y & & \{z_1, z_2, \cdots, z_n\} \in X & \Longrightarrow \quad y \in X. \end{array}$$

Entonces X tiene un maximal respecto al orden $\subseteq$.

Teorema de la existencia de bases de espacios vectoriales[12]**:**
Sea V un K-espacio vectorial, entonces existe al menos una base de Hamel $\mathcal{B}$ de V, equivalentemente, los espacios vectoriales son módulos libres.

Teorema de Krull:
Todo anillo unitario (salvo el anillo trivial) contiene un ideal maximal, equivalentemente, en todo anillo unitario no trivial, todo ideal puede extenderse a un ideal maximal.

Teorema de la estructura de grupo:
Sea $X \neq \varnothing$, entonces existe una operación binaria interna $* : X \times X \to X$ tal que dota a $(X, *)$ de una estructura de grupo.

Todo grupo abeliano libre es proyectivo.

Criterio de Baer: Todo grupo abeliano divisible es inyectivo.

Teorema del punto extremo de formas lineales reales:
La bola unitaria cerrada del dual de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado tiene punto extremo.

El producto cartesiano arbitrario de espacios topológicos conexos es conexo.

Teorema de Tychonoff:
El producto cartesiano de toda familia de espacios topológicos compactos es compacto.

Notemos que algunas equivalencias son pilares de ciertas ramas de las matemáticas, así pareciera un trabajo colosal y fútil imaginar un mundo sin el axioma de elección, habiendo dicho esto, no todo está perdido, pues la solución se encuentra en los detalles, la fortaleza del axioma de elección es que nos garantiza siempre existencia de algún objeto, así siempre y cuando podamos construir tal objeto hemos logrado la misma meta, aliviando en gran parte nuestras preocupaciones, ahora veamos un ejemplo simple: Si bien en ZF no podemos demostrar que todo espacio vectorial tiene una base de Hamel, podemos demostrar una versión débil restringiéndonos a espacios de dimensión finita, aún más, en los espacios vectoriales de dimensión infinita "principales" (por ejemplo $\mathcal{L}^p$) se tiene una base explícitamente construida.

2.2. Implicaciones

2.2.1. Posibles equivalencias

Los siguientes enunciados son implicaciones importantes del axioma elección en la historia de la teoría de conjuntos cuya equivalencia a AC sigue abierta. El principio de partición, formulado antes que AC, fue citado por Zermelo como un argumento a favor del axioma, en 1906 Russel declaró que eran equivalentes, sin embargo que partición implique elección es hasta la fecha el problema sin resolver más antiguo de la teoría de conjuntos, y los demás enunciados han mostrado ser igual de complicados. En todo modelo conocido (énfasis en conocido) de ZF donde AC falla estas formulaciones también lo hacen, pero no se sabe si pueden probarse sin elección.

Principio de partición:
Si hay una sobreyección de A a B, entonces hay una inyección de B a A, equivalentemente, toda partición P de un conjunto C es menor o igual en tamaño a C.

Teorema dual de Cantor–Schröder–Bernstein:
Si hay una sobreyección de A a B y otra de B a A, entonces A y B son equinumerables, es decir, existe una biyección entre ellos.

Principio de partición débil:
Si hay una inyección y una sobreyección de A a B, entonces A y B son equinumerables, equivalentemente, una partición P de un conjunto C no puede ser más grande que C. Basta este enunciado para la existencia de un conjunto no medible.

Cada una de las tres implicaciones anteriores es implicada por su predecesora[13], pero, se desconoce si se puede probar cualquier equivalencia.

No existe una sucesión decreciente infinita de cardinales.

Teorema de inmersión de Hahn:
Todo grupo abeliano linealmente ordenado admite una inmersión como subgrupo ordenado del grupo aditivo $\mathbb{R}^{\Omega}$ dotado de un orden lexicográfico.

2.2.2. Versiones débiles

Los siguientes enunciados son consecuencias del axioma de elección, bajo la teoría ZF, que actualmente sabemos que no lo implican, es decir, son estrictamente más débiles.

Axioma de elección dependiente (DC):
Sea X un conjunto y R una relación total en X $(\forall a \in X\ \exists b \in X :\ aRb)$, entonces:

$$\exists[(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to X] \sqcap (\forall n \in \mathbb{N})(x_n R x_{n+1}).$$

Axioma de elección contable (CC):
Toda colección contable de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.

2.2.3. Patologías

Estas son de las implicaciones más contraintuitivas e incovenientes de la teoría ZFC, y consecuentemente forman parte central en la discusión acerca de si el axioma de elección debería ser tomado como uno de los pilares de la matemática moderna, razón suficiente para separarlas de y discutirlas en mayor detalle que las demás versiones débiles.

2.2.3.1 La paradoja de Hausdorff

El conjunto de las rotaciones 3D, $\mathbb{SO}(3)$: La definición formal de este conjunto será:

$$\mathbb{SO}(3) := \{A \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1, AA^t = \mathbb{I}_3\}.$$

Éste se llama así pues cada rotacion en 3D corresponde a un único elemento de $\mathbb{SO}(3)$.

Lema: $\mathbb{SO}(3)$ dotado con la operación de multiplicación matricial forma un grupo.

Demostración:
La multiplicación es una operación binaria interna:
Sean $A, B \in \mathbb{SO}(3)$, entonces:

$$\begin{aligned} A, B \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) &\implies AB \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}). \\ \det(A) = \det(B) = 1 &\implies \det(AB) = \det(A)\det(B) = 1. \\ AA^t = \mathbb{I}_3, BB^t = \mathbb{I}_3 &\implies AB(AB)^t = ABB^tA^t = A\mathbb{I}_3A^t = AA^t = \mathbb{I}_3. \end{aligned}$$

Así concluimos que, en efecto, $AB \in \mathbb{SO}(3)$.
Asociatividad:
Sean $A, B, C \in \mathbb{SO}(3)$, por asociatividad del producto de matrices se cumple ésta.
Existencia de un elemento neutro:
Sabemos que:

$$\forall A \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad A\mathbb{I}_3 = \mathbb{I}_3A = A.$$

Así bastaría verificar que $\mathbb{I}_3 \in \mathbb{SO}(3)$, por definición:

$$\mathbb{I}_3 \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}),\ \det(\mathbb{I}_3) = 1,\ \mathbb{I}_3\mathbb{I}_3^t = \mathbb{I}_3\mathbb{I}_3 = \mathbb{I}_3 \implies \mathbb{I}_3 \in \mathbb{SO}(3).$$

Existencia del elemento inverso:
Sea $A \in \mathbb{SO}(3)$, entonces:

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) &\implies A^t \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}). \\ \det(A) = 1 &\implies \det(A^t) = \det(A) = 1. \\ AA^t = \mathbb{I}_3 &\implies A^t(A^t)^t = (A^tA)^t = \mathbb{I}_3^t = \mathbb{I}_3. \end{aligned}$$

En consecuencia $A^t \in \mathbb{SO}(3)$ y como $AA^t = \mathbb{I}_3$, se sigue que A^t es el inverso de A. □

Lema: Dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ y un vector unitario $\hat{u} \in \mathbb{R}^3$, que define al eje de rotación sobre el cual gira el vector $\vec{v}$ en un ángulo θ según la regla de la mano derecha, entonces el vector rotado $\vec{v}_{rot} \in \mathbb{R}^3$ está dado por la fórmula de rotación de Rodrigues:

$$\vec{v}_{\text{rot}} = \cos(\theta)\vec{v} + \text{sen}(\theta)(\hat{u} \times \vec{v}) + (1 - \cos(\theta))(\vec{v} \cdot \hat{u})\hat{u}.$$

Demostración: Descompongamos a $\vec{v}$ en un vector paralelo y otro perpendicular a $\hat{k}$:

$$\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}.$$

Donde, en términos del producto punto (que es un producto interno):

$$\vec{v}_{||} = (\vec{v} \cdot \hat{u})\hat{u}, \qquad \vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{||}.$$

Notemos que la componente paralela al eje no se ve afectada por la rotación:

$$\vec{v}_{||,\text{rot}} = \vec{v}_{||}.$$

La componente perpendicular, en cambio, si lo hace, pero preservando su magnitud:

$$\vec{v}_{\perp,\text{rot}} = \cos(\theta)\vec{v}_{\perp} + \text{sen}(\theta)(\hat{u} \times \vec{v}_{\perp}),$$

así por distributividad del producto cruz sobre la suma y como $\hat{l} \times \vec{v}_{||} = 0$, al ser paralelos:

$$= \cos(\theta)(\vec{v} - \vec{v}_{||}) + \text{sen}(\theta)(\hat{u} \times \vec{v}).$$

De forma que el vector rotado está dado por:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{\text{rot}} &= \vec{v}_{||,\text{rot}} + \vec{v}_{\perp,\text{rot}} \\
&= \vec{v}_{||} + \cos(\theta)(\vec{v} - \vec{v}_{||}) + \text{sen}(\theta)(\hat{u} \times \vec{v}) \\
&= \cos(\theta)\vec{v} + \text{sen}(\theta)(\hat{u} \times \vec{v}) + (1 - \cos(\theta))\vec{v}_{||} \\
&= \cos(\theta)\vec{v} + \text{sen}(\theta)(\hat{u} \times \vec{v}) + (1 - \cos(\theta))(\vec{v} \cdot \hat{u})\hat{u}.
\end{aligned}$$

Concluyendo nuestra prueba. □

Observación: Alternativamente, podemos reescribir la fórmula de Rodrigues como sigue:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{\text{rot}} &= \vec{v}_{||,\text{rot}} + \vec{v}_{\perp,\text{rot}} \\
&= \vec{v}_{||} + \cos(\theta)\vec{v}_{\perp} + \text{sen}(\theta)(\hat{u} \times \vec{v}) \\
&= \vec{v} - \vec{v}_{\perp} + \cos(\theta)\vec{v}_{\perp} + \text{sen}(\theta)(\hat{u} \times \vec{v}) \\
&= \vec{v} + \text{sen}(\theta)(\hat{u} \times \vec{v}) + (\cos(\theta) - 1)\vec{v}_{\perp},
\end{aligned}$$

pudiendo sustituir en términos del producto cruz $\vec{v}_{\perp} = -\hat{u} \times (\hat{u} \times \vec{v})$:

$$= \vec{v} + \text{sen}(\theta)(\hat{u} \times \vec{v}) + (1 - \cos(\theta))\hat{u} \times (\hat{u} \times \vec{v}).$$

Corolario: Dada la correspondencia entre el eje de rotación y el vector unitario $\hat{u} \in \mathbb{R}^3$ que pasa por este, la matriz de rotación de θ radianes según la regla de la mano derecha sobre el eje $\hat{u}$ está dada por:

$$R_{\hat{u}}(\theta) = \mathbb{I}_3 + \sin(\theta)U_\times + (1 - \cos(\theta))U_\times^2.$$

Donde:

$$U_\times := \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Es la matriz que denota al producto cruz matricial para $\hat{u}$: $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3, U_\times \vec{v} = \hat{u} \times \vec{v}$.

Demostración: De la fórmula de Rodrigues alterna sabemos que dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_{\text{rot}} = \vec{v} + \text{sen}(\theta)(\hat{u} \times \vec{v}) + (1 - \cos(\theta))\hat{u} \times (\hat{u} \times \vec{v}),$$

recurriendo a la propiedad del producto cruz que define a $U_\times$:

$$\begin{aligned} &= \mathbb{I}_3\vec{v} + \sin(\theta)U_\times\vec{v} + (1 - \cos(\theta))U_\times^2\vec{v} \\ &= (\mathbb{I}_3 + \sin(\theta)U_\times + (1 - \cos(\theta))U_\times^2)\vec{v} \\ &= R_{\hat{u}}(\theta)\vec{v}. \end{aligned}$$

Finalizando de esta manera nuestra demostración. □

Observación: En términos de los componentes de $\hat{u}$ y el ángulo θ:

$$R_{\hat{u}}(\theta) = \begin{bmatrix} \text{c}(\theta) + u_x^2(1 - \text{c}(\theta)) & u_xu_y(1 - \text{c}(\theta)) - u_z\text{s}(\theta) & u_xu_z(1 - \text{c}(\theta)) + u_y\text{s}(\theta) \\ u_xu_y(1 - \text{c}(\theta)) + u_z\text{s}(\theta) & \text{c}(\theta) + u_y^2(1 - \text{c}(x)) & u_yu_z(1 - \text{c}(\theta)) - u_x\text{s}(\theta) \\ u_xu_z(1 - \text{c}(\theta)) - u_y\text{s}(\theta) & u_yu_z(1 - \text{c}(\theta)) + u_x\text{s}(\theta) & \text{c}(\theta) + u_z^2(1 - \text{c}(\theta)) \end{bmatrix}.$$

Donde por cuestiones de espacio denotamos $\text{c}(\theta) =: \cos(\theta)$ y, similarmente, $\text{s}(\theta) =: \text{sen}(\theta)$. De manera que las rotaciones alrededor de los ejes $\hat{x}$ y $\hat{y}$ son:

$$R_{\hat{x}}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

$$R_{\hat{y}}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Aún más, toda rotación en el eje $\hat{z}$ puede obtenerse mediante rotaciones en los ejes $\hat{x}, \hat{y}$:

$$R_{\hat{z}}(\theta) = R_{\hat{x}}(\pi/2)R_{\hat{y}}(\theta)R_{\hat{x}}(-\pi/2).$$

Teorema (La paradoja de Hausdorff[14])**:** Hay una descomposición disjunta de la esfera $\mathbb{S}^2$ en cuatro conjuntos A, B, C, D tales que $A, B, C, B \cup C$ son congruentes y D es contable.

Demostración:
Partamos considerando dos vectores unitarios, los cuales forman un ángulo δ entre sí, tal que $\cos(2\delta)$ sea trascendente, sin pérdida de generalidad (salvo rotación) asumiremos:

$$\hat{d} := \begin{bmatrix} \cos(\delta) \\ \sin(\delta) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi := R_{\hat{d}}(\pi) = \begin{bmatrix} \cos(2\delta) & \operatorname{sen}(2\delta) & 0 \\ \operatorname{sen}(2\delta) & -\cos(2\delta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \qquad \Phi^2 = \mathbb{I}_3.$$

Notemos que Φ es un elemento de orden 2, cuya entrada $(1,1)$ es trascendente.

$$\hat{x} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \Psi := R_{\hat{x}}(2\pi/3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \qquad \Psi^2 = R_{\hat{x}}(4\pi/3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \qquad \Psi^3 = \mathbb{I}_3.$$

En cambio Ψ es un elemento de orden 3 con todas sus entradas algebraicas. Construyamos ahora a $R := \langle\{\Phi, \Psi\}\rangle \subset \mathbb{SO}(3)$ como el grupo generado por Φ y Ψ, entonces $\forall r \in R \backslash \{\mathbb{I}_3, \Phi, \Psi, \Psi^2\}$ existen $n \in \mathbb{N}^+, m_1, \cdots, m_i, \cdots, m_n \in \{1, 2\}$ tales que:

$$r = \prod_{i=1}^{n} \Phi\Psi^{m_i} \ \vee \ r = \Psi^{m_1}\Big(\prod_{i=2}^{n} \Phi\Psi^{m_i}\Big)\Phi \ \vee \ r = \Psi^{m_1}\prod_{i=2}^{n} \Phi\Psi^{m_i} \ \vee \ r = \Big(\prod_{i=1}^{n} \Phi\Psi^{m_i}\Big)\Phi.$$

En el caso en que podemos escribir a la identidad en la primera forma, $\mathbb{I}_3 = \prod_{i=1}^{n} \Phi\Psi^{m_i}$:

$$\Longrightarrow \qquad \mathbb{I}_3 = \Phi\mathbb{I}_3\Phi = \Phi^2\Psi^{m_1}\Big(\prod_{i=2}^{n} \Phi\Psi^{m_i}\Big)\Phi = \Psi^{m_1}\Big(\prod_{i=2}^{n} \Phi\Psi^{m_i}\Big)\Phi$$

Transformándola en la segunda forma, similarmente en caso de que expresemos $\mathbb{I}_3$ en ésta:

$$\Longrightarrow \qquad \mathbb{I}_3 = \Psi^{m_1}\mathbb{I}_3\Psi^{2m_1} = \Psi^{2m_1}\Big(\prod_{i=2}^{n} \Phi\Psi^{m_i}\Big)\Phi\Psi^{2m_1} = \Psi^{m_1'}\Big(\prod_{i=2}^{n'} \Phi\Psi^{m_i}\Big)$$

Obteniendo así la tercera forma, veamos si es posible llevar esta a la cuarta:

$$\Longrightarrow \qquad \mathbb{I}_3 = \Phi\mathbb{I}_3\Phi = \Phi\Psi^{m_1'}\Big(\prod_{i=2}^{n'} \Phi\Psi^{m_i}\Big)\Phi = \Big(\prod_{i=1}^{n'} \Phi\Psi^{m_i}\Big)\Phi.$$

Notamos que todos los casos se pueden transformar en el cuarto, así basta refutar que $\mathbb{I}_3$ se pueda escribir de la cuarta forma, con este fin calculemos algunos elementos de R:

$$\Phi\Psi = \begin{bmatrix} \cos(2\delta) & -1/2\ \sin(2\delta) & -\sqrt{3}/2\ \sin(2\delta) \\ \sin(2\delta) & 1/2\ \cos(2\delta) & \sqrt{3}/2\ \cos(2\delta) \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$
$$\Phi\Psi^2 = \begin{bmatrix} \cos(2\delta) & -1/2\ \sin(2\delta) & \sqrt{3}/2\ \sin(2\delta) \\ \sin(2\delta) & 1/2\ \cos(2\delta) & -\sqrt{3}/2\ \cos(2\delta) \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Claramente éstos difieren de la identidad, por sus elementos en la diagonal principal, por consecuencia notemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi\Psi = \begin{bmatrix} \cos(2\delta) & -1/2\ \sin(2\delta) & -\sqrt{3}/2\ \sin(2\delta) \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi\Psi^2 = \begin{bmatrix} \cos(2\delta) & -1/2\ \sin(2\delta) & \sqrt{3}/2\ \sin(2\delta) \end{bmatrix}.$$

Así ambos son de la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \prod_{i=1}^{n=1} \Phi\Psi^{m_i} = \begin{bmatrix} p_1(\cos(2\delta)) & p_2(\cos(2\delta))\sin(2\delta) & p_3(\cos(2\delta))\sin(2\delta) \end{bmatrix}.$$

Donde $m_1 \in \{1, 2\}, p_1, p_2, p_3 \in \overline{\mathbb{Q}}[\cos(2\delta)]\backslash\{0(\cos(2\delta))\}$ y $\overline{\mathbb{Q}}$ es la cerradura algebraíca de $\mathbb{Q}$, así p_1, p_2 y p_3 pueden considerarse polinomios no cero con entradas algebraícas en $\cos(2\delta)$. Supondremos como hipótesis de inducción que se mantiene esta forma para los n-productos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \prod_{i=1}^{n} \Phi\Psi^{m_i} = \begin{bmatrix} p_1(\cos(2\delta)) & p_2(\cos(2\delta))\sin(2\delta) & p_3(\cos(2\delta))\sin(2\delta) \end{bmatrix}.$$

Para $n+1$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \prod_{i=1}^{n+1} \Phi\Psi^{m_i} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Big(\prod_{i=1}^{n} \Phi\Psi^{m_i} \Big) \Phi\Psi^{m_n} \\ &= \begin{bmatrix} p_1(\cos(2\delta)) & p_2(\cos(2\delta))\sin(2\delta) & p_3(\cos(2\delta))\sin(2\delta) \end{bmatrix} \Phi\Psi^{m_n}, \end{aligned}$$

para el caso $m_n = 1$:

$$= \begin{bmatrix} \cos(2\delta)p_1 - (1-\cos^2(2\delta))p_2 \\ 1/2(-p_1 + \cos(2\delta)p_2 - \sqrt{3}p_3)\sin(2\delta)) \\ 1/2(-\sqrt{3}p_1 + \sqrt{3}\cos(2\delta)p_2 + p_3)\sin(2\delta)) \end{bmatrix}^t.$$

Mientras que para $m_n = 2$ sucede una sitación similar (con algunos signos contrarios). Estos polinomios tienen entradas algebraicas (respecto al $\cos(2\delta)$) por cerradura algebraica y en consecuencia no pueden anularse, pues de lo contrario $\cos(2\delta)$ sería una de sus raíces, lo cual contradice nuestra hipótesis de que es trascendente.

Consecuentemente tenemos que:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\Big(\prod_{i=1}^{n}\Phi\Psi^{m_i}\Big)\Phi = \begin{bmatrix}p_1(\cos(2\delta)) & p_2(\cos(2\delta))\sin(2\delta) & p_3(\cos(2\delta))\sin(2\delta)\end{bmatrix}\Phi$$
$$= \begin{bmatrix}\cos(2\delta)p_1 - (1-\cos^2(2\delta))p_2 \\ (p_1+\cos(2\delta)p_2)\sin(2\delta) \\ -p_3\sin(2\delta)\end{bmatrix}^t.$$

Centrémonos en la tercera entrada del vector resultante, como habíamos mencionado, este no se anula en $\cos(2\delta)$ ($p_3(\cos(2\delta)) \neq 0$), luego $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ no ha sido llevado a sí mismo, por lo tanto no le ha sido aplicada la rotación identidad, es decir:

$$\Big(\prod_{i=1}^{n}\Phi\Psi^{m_i}\Big)\Phi \neq \mathbb{I}_3.$$

Implicando que la identidad no puede reducirse a la cuarta forma y por ende a ninguna. Así la acción de R en $\mathbb{S}^2$ es casi libre, salvo dos puntos fijos por rotación (los polos de su eje). Ahora, puesto que R es finitamente generado, se sigue que es de cardinalidad contable. Así los puntos donde la acción de R no es libre es contable, denotemos a este como:

$$D := \{s \in \mathbb{S}^2 \mid \exists r \in R\backslash\{\mathbb{I}_3\}\ sr = s\}.$$

Por construcción R actúa libremente en $S := \mathbb{S}^2\backslash D$, la acción particiona a S en órbitas. Por el axioma de elección, existe un conjunto X que tiene un solo elemento de cada órbita. Para cada $r \in R$ definamos el conjunto de acción:

$$Xr := \{xr \mid x \in X\}.$$

Puesto que la unión de las órbitas es S:

$$\begin{aligned}\forall s \in S \quad &\Longrightarrow \quad \exists x \in X \sqcap s \in \mathrm{Orb}(x) \quad \Longrightarrow \quad \exists r \in R \sqcap s = xr \\ &\Longrightarrow \quad \exists r \in R \sqcap s \in Xr \quad \Longrightarrow \quad S = \bigcup_{r\in R} Xr.\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}X_{r_1} \cap X_{r_2} \neq \varnothing \ &\Longrightarrow \quad \exists x_1, x_2 \in X, r_1, r_2 \in R, \sqcap x_1 r_1 = x_2 r_2 \\ &\Longrightarrow \quad x_2 = x_1 r_1 r_2^{-1} \in \mathbf{Orb}(x_1),\end{aligned}$$

pero X elige un único elemento por órbita:

$$\Longrightarrow \quad x_2 = x_1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_1 r_1 r_2^{-1},$$

además R actúa libremente en S, y por ende en X:

$$\Longrightarrow \quad r_1 r_2^{-1} = \mathbb{I}_3 \quad \Longrightarrow \quad r_2 = r_1.$$

Estos resultados en conjunto demuestran que:

$$S = \bigsqcup_{r\in R} Xr.$$

Como dicho previamente, todo $r \in R$ es $\mathbb{I}_3, \Phi, \Psi, \Psi^2$, o cae en una de las cuatro formas, y su expresión reducida es única, así podemos construir subconjuntos de R por recursión, iniciemos con:

$$\mathbb{I}_3 \in \mathcal{A}, \qquad \Phi, \Psi \in \mathcal{B}, \qquad \Psi^2 \in \mathcal{C}.$$

Y ahora hagamos las asignaciones por casos:

$$\begin{array}{rlccc} & & r \in \mathcal{A}, & r \in \mathcal{B}, & r \in \mathcal{C}. \\ r \in R \text{ termina en:} & \Psi, \Psi^2 & r\Phi \in \mathcal{B}, & r\Phi \in \mathcal{A}, & r\Phi \in \mathcal{A}. \\ & \Phi & r\Psi \in \mathcal{B}, & r\Psi \in \mathcal{C}, & r\Psi \in \mathcal{A}. \\ & & r\Psi^2 \in \mathcal{C}, & r\Psi^2 \in \mathcal{A}, & r\Psi^2 \in \mathcal{B}. \end{array}$$

Notemos que esto garantiza que:

$$\mathcal{A}\Phi = \mathcal{B} \sqcup \mathcal{C}, \qquad \mathcal{A}\Psi = \mathcal{B}, \qquad \mathcal{A}\Psi^2 = \mathcal{C}.$$

Así solo basta aplicar las rotaciones a nuestro conjunto de representantes:

$$A := X\mathcal{A}, \qquad B := X\mathcal{B}, \qquad C := X\mathcal{C}.$$

Esta construcción equivale a definir A, B, C como los conjuntos más pequeños tales que:

$$X\mathbb{I}_3 \subseteq A$$

$$\left.\begin{array}{ccc} Xr \subseteq A, B, C & \Longrightarrow & Xr\Phi \subseteq B, A, A \\ Xr \subseteq A, B, C & \Longrightarrow & Xr\Psi \subseteq B, C, A \\ Xr \subseteq A, B, C & \Longrightarrow & Xr\Psi^2 \subseteq C, A, B \end{array}\right\} \text{respectivamente.}$$

Estos conjuntos están bien definidos debido a la unicidad de las formas reducidas, la cual a su vez se puede probar mediante la unicidad de la forma reducida de la identidad: A su vez $A, B, C, B \cup C$ son congruentes por virtud de:

$$A\Phi = B \sqcup C, \qquad A\Psi = B, \qquad A\Psi^2 = C.$$

Puesto que:

$$\mathbb{S}^2 = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D.$$

Hemos construido la descomposición disjunta deseada. ▫

2.2.3.2 La paradoja de Banach-Tarski

Teorema (La paradoja de Banach-Tarski[15])**:** La bola unitaria $\mathbb{D}^3 \subset \mathbb{R}^3$ se puede descomponer en la unión de dos bolas unitarias.

Demostración:
Sea $\mathbb{D}^3$ la bola unitaria centrada en el origen y D^3 otra bola unitaria tal que $\mathbb{D}^3 \cap D^3 = \varnothing$, sea $\mathbb{S}^2 := \partial\mathbb{D}^3$, por la paradoja de Hausdorff (consecuencia de AC) podemos descomponer $\mathbb{S}^2$ en conjuntos disjuntos A, B, C, D tales que $A, B, C, B \cup C$ son congruentes y D contable. Para cada $\rho \in \mathbb{R}^+$ definimos la función $r_\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como $r_\rho(x) := \rho x$, también definamos:

$$W := \bigcup_{0 \leqslant r \leqslant 1} r_\rho(A), \qquad X := \bigcup_{0 \leqslant r \leqslant 1} r_\rho(B), \qquad Y := \bigcup_{0 \leqslant r \leqslant 1} r_\rho(C), \qquad Z := \bigcup_{0 \leqslant r \leqslant 1} r_\rho(D),$$

y sea:

$$T := W \cup Z \cup \{0\}.$$

W y $X \cup Y$ son claramente congruentes, por la congruencia de A y $B \cup C$, por lo tanto W y $X \cup Y$ son equidescomponibles.
X y Y son congruentes y W y X también, luego $X \cup Y$ y $W \cup X$ son equidescomponibles.
W y $X \cup Y$ son congruentes, X y W también, así $W \cup X$ y $W \cup X \cup Y$ se equidescomponen.
Por lo tanto W y $W \cup X \cup Y$ son equidecomponibles (por la propiedad transitiva), de manera que $T = W \cup Z \cup \{0\}$ y $\mathbb{D}^3 = W \cup X \cup Y \cup Z \cup \{0\}$ son equidescomponibles (pues esta propiedad se preserva en uniones a pares).
Similarmente encontramos que tanto X como Y son equidescomponibles con $W \cup X \cup Y$.
Puesto que D es contable pero $\mathbb{SO}(3) \supset D$ no, $\exists \phi \in \mathbb{SO}(3) : \phi(D) \subset \mathbb{S}^2 \backslash D = A \cup B \cup C$, en consecuencia $J := \phi(D) \subset A \cup B \cup C$, a partir de este definamos:

$$I := \bigcup_{0 \leqslant r \leqslant 1} r_\rho(J) = \bigcup_{0 \leqslant r \leqslant 1} r_\rho(\phi(D)) = \bigcup_{0 \leqslant r \leqslant 1} \phi(r_\rho(D)) = \phi\Big(\bigcup_{0 \leqslant r \leqslant 1} r_\rho(D) \Big) = \phi(Z).$$

Este paso de conmutación debido a que la rotación de un rayo es el rayo de la rotación, así Z e I se equidescomponen, además por construción notamos que $I \subset W \cup X \cup Y$.
Así, como X y $W \cup X \cup Y$ son equidescomponibles, puesto que subconjuntos de conjuntos equidescomponibles son equidescomponibles, $\exists H \subset X$ tal que H e I se equidescomponen.
Sea $p \in X \backslash H$ y definamos $S := Y \cup H \cup \{p\}$, además Y y $W \cup X \cup Y$, H y Z, y $\{p\}$ y $\{0\}$ son equidescomponibles, entonces $S = Y \cup H \cup \{p\}$ y $\mathbb{D}^3 = W \cup X \cup Y \cup Z \cup \{0\}$ se equidescomponen.
Considerando que $\mathbb{D}^3$ y D^3 son congruentes, se equidescomponen, y por transitividad (pues induce una relación de equivalencia) S y D^3 se equidescomponen. En resumen, tanto T y $\mathbb{D}^3$ como S y D^3 se equidescomponen, por lo tanto $T \cup S$ y $\mathbb{D}^3 \cup D^3$ también.
Notemos que $T \cup S \subseteq \mathbb{D}^3 \subset \mathbb{D}^3 \cup D^3$, además $\mathbb{D}^3$ se equidescompone consigo mismo, por lo que finalmente $T \cup S \cup \mathbb{D}^3 = \mathbb{D}^3$ es equidescomponible con $\mathbb{D}^3 \cup D^3 \cup \mathbb{D}^3 = \mathbb{D}^3 \cup D^3$.□

2.2.3.3 El teorema de Vitali

Lema: En el conjunto $[0,1] \subset \mathbb{R}$ consideremos la relación binaria:

$$aRb \iff a - b \in \mathbb{Q}$$

Entonces R es una relación de equivalencia.

Demostración: Verifiquemos que R es una relación de equivalencia:
Reflexividad:

$$\forall a \in [0,1] \qquad a - a = 0 \in \mathbb{Q} \iff aRa.$$

Simetría:

$$\begin{aligned} \forall a, b \in [0,1] \qquad aRb &\iff a - b \in \mathbb{Q} \\ &\implies (-1)(a-b) = b - a \in \mathbb{Q} \\ &\iff bRa. \end{aligned}$$

Transitividad:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in [0,1] \qquad aRb \ \wedge \ bRc &\iff a - b,\ b - c \in \mathbb{Q} \\ &\implies (a-b) + (b-c) = a - c \in \mathbb{Q} \\ &\iff aRc. \end{aligned}$$

Concluyendo así este lema. □

Corolario: Existe un conjunto V que contiene a exactamente un elemento de cada clase de equivalencia del conjunto $X := [0,1]$ bajo la relación R definida anteriormente.

Denotemos por $\mathcal{A}_\sigma$ a la σ-álgebra de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ y por μ a la medida de Lebesgue. Sabemos que $\mathcal{A}_\sigma$ y μ son invariantes bajo traslaciones, es decir:
Para $A \in \mathcal{A}_\sigma$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces $A + b \in \mathcal{A}_\sigma$ y $\mu(A + b) = \mu(A)$.

Teorema (de Vitali[16],[17])**:** El conjunto definido anteriormente $V \notin \mathcal{A}_\sigma$, en otras palabras, existe un subconjunto acotado de los reales no Lebesgue-medible.

Demostración: Asumamos que V es Lebesgue-medible.
Sea $\mathbb{Q}_0 := \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, es claro que éste es numerable, pues $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\} \subset \mathbb{Q}_0 \subset \mathbb{Q}$, así podemos acceder a alguna enumeración $(q_0, q_1, q_2, \cdots)$ de nuestro conjunto $\mathbb{Q}_0$, y definir una cantidad numerable de translaciones de V como sigue $\forall n \in \mathbb{N} : V_n := V + q_n$. Mostremos ahora que:

- $i \neq j \Rightarrow V_i \cap V_j \neq \varnothing$.
  Supongamos $\exists v \in V_i \cap V_j$. Entonces $v = v_i + q_i = v_j + q_j$ donde $v_i, v_j \in V$, además $v_i - v_j = q_j - q_i \in \mathbb{Q}$, por ende $v_i R v_j \Rightarrow [v_i] = [v_j]$, teniendo presente que V contiene un único elemento de cada clase de equivalencia, así $v_i = v_j \Rightarrow q_i = q_j \Rightarrow i = j$. $\#c$.

- $[0,1] \subseteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} V_k \subseteq [-1,2]$.
  Consideremos $r \in [0,1]$ y sea $v \in V$ tal que $[v] = [r]$, en consecuencia $r - v = q_k$, para algún $k \in \mathbb{N}$, despejando vemos que $r = v + q_k \in V_k$. Por ello $[0,1] \subseteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} V_k$.
  Además, por construcción $V \subseteq [0,1]$ y $\forall k \in \mathbb{N}; q_k \in \mathbb{Q}_0 \subseteq [-1,1]$, en consecuencia $\forall k \in \mathbb{N}; V_k := V + q_k \subseteq [0,1] + [-1,1] = [-1,2]$. Se sigue que $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} V_k \subseteq [-1,2]$.

Aplicando μ a estas contenciones usando la propiedad de sigma aditividad obtenemos que:

$$1 = \mu([0,1]) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(V_k) \leqslant \mu([-1,2]) = 3.$$

Puesto que la medida de Lebesgue es invariante bajo translaciones, se cumple que:

$$\forall k \in \mathbb{N};\ \mu(V_k) = \mu(V + q_k) = \mu(V).$$

Y por lo tanto:

$$1 = \mu([0,1]) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(V) \leqslant \mu([-1,2]) = 3.$$

Valiéndonos de la no negatividad de la medida:

- $\mu(V) = 0 \Rightarrow \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu(V) = 0 < 1\#c$.

- $\mu(V) > 0 \Rightarrow \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu(V) = \mu(V) \lim\limits_{n\to\infty} n > 3\#c$.

En ambos casos obtenemos contradiciones, luego V no puede ser medible después de todo, así, la medida de Lebesgue, μ, no define un valor para $\mu(V)$. □
La construcción de este conjunto se debe a Giuseppe Vitali, quien la ideó en el año 1905.

2.2.3.4 Existencia de un juego de Gale-Stewart no determinado en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Teorema: Existe un juego de Gale-Stewart no determinado[18].

Demostración: Consideremos los conjuntos de estrategias:

$$E^1 := \Big\{ f : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{2k} \to \mathbb{N} \Big\}, \qquad E^2 := \Big\{ g : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{2k+1} \to \mathbb{N} \Big\}.$$

Reiterando el resultado que el producto cartesiano de dos conjuntos contables es contable:

$$|\mathbb{N}^0| = |1| = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \quad |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2| = \cdots = |\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}^k \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}^{k+1}|.$$

Luego tenemos uniones contables de conjuntos a lo sumo contables, obteniendo:

$$\Big|\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{2k}\Big| = |\mathbb{N}| = \Big|\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{2k+1}\Big| \qquad \Longrightarrow \qquad |E^1| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |E^2|.$$

Por principio del buen orden enumeramos las estrategias por ordinales menores que $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$:

$$E^1 := \{f_\alpha | \alpha \text{ ordinal} \wedge \alpha < |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|\}, \qquad E^2 := \{g_\alpha | \alpha \text{ ordinal} \wedge \alpha < |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|\}.$$

Definimos para el ordinal 0:

$$X_0 := \varnothing =: Y_0.$$

Para ordinales sucesores $\alpha + 1$, consideremos $f_\alpha \in E^1, g_\alpha \in E^2$, como $|X_\alpha|, |Y_\alpha| < |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$, para f_α existen $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$ elementos $g' \in E^2$ tales que $f_\alpha * g' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\backslash X_\alpha$, elegimos el mínimo, $g^\#$:

$$Y_{\alpha+1} := Y_\alpha \cup \{f_\alpha * g^\#\}.$$

Para g_α elegiremos $f^\# := \text{mín}\{f' \in E^1 | f' * g_\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\backslash(X_\alpha \cup Y_{\alpha+1})\} \neq f_\alpha$, y así definiremos:

$$X_{\alpha+1} := X_\alpha \cup \{f^\# * g_\alpha\}.$$

Para ordinales límites λ definimos:

$$X_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha, \qquad Y_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} Y_\alpha.$$

Es claro que tenemos una "sucesión" creciente $(\alpha \leqslant \beta) \implies ([X_\alpha \subseteq X_\beta] \wedge [Y_\alpha \subseteq Y_\beta])$. Además se sigue por construcción que $X_\alpha \cap Y_\alpha = \varnothing$. Ahora definimos:

$$A := \bigcup_{\alpha<|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|} X_\alpha \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Mostraremos que G_A no es determinado, sea f_α una estrategia ganadora para J1, entonces:

$$\exists g^\# \in E^2 \sqcap f_\alpha * g^\# \in Y_{\alpha+1} \qquad \Longrightarrow \qquad f_\alpha * g^\# \notin X_{\alpha+1} \qquad \Longrightarrow \qquad f_\alpha * g^\# \notin A \ \#c.$$

Sea g_α una estrategia ganadora para J2, similarmente:

$$\exists f^\# \in E^1 \sqcap f^\# * g_\alpha \in X_{\alpha+1} \qquad \Longrightarrow \qquad f^\# * g_\alpha \in A \ \#c.$$

Acabando nuestra prueba. □

Capítulo 3

ZF+AD: Una alternativa

Habiendo explorado el axioma de elección y parte de lo que este conlleva en la teoría ZF ha llegado el momento de dar un giro súbito de 180° y explorar en la dirección contraria, no solo la teoría al no asumir elección, sino la resultante al asumir su "antípoda"(en ZF), las preguntas naturales son: ¿Cuál es el "opuesto"del axioma de elección y cómo obtenerlo? Una solución obvia para ambas preguntas es la inmediata, simplemente suponemos que para algún conjunto F de conjuntos no vacíos disjuntos a pares, no existe un selector, y ya, sin embargo, esta propuesta únicamente nos limita, y no provee resultados claros; así, requerimos de otra propuesta, la cual surgirá de forma inesperada:

Axioma de determinación (AD)[19]**:**
Sea $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ entonces su juego de Gale-Stewart asociado está determinado, es decir, todo juego de Gale Stewart en el espacio de Baire está determinado.

Es claro que el axioma de determinación no puede coexistir con el axioma de elección en ZF, por lo que al asumir AD tendremos una nueva teoría, a la cual llamaremos ZFD. Esta teoría es posible pues Solovay[20] mostró que AD es relativamente consistente con ZF, módulo la consistencia (de hecho necesaria[21]) de un cardinal fuertemente inaccesible. En el estudio de esta nueva teoría tendremos lo siguiente:

3.1. Proposiciones independientes

Algunas versiones de elección pueden coexistir con el axioma de determinación:

Axioma de elección dependiente (DC):
Sea X un conjunto y R una relación total en X $\forall a \in X\ \exists b \in X :\ aRb$), entonces:

$$\exists[(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to X] \sqcap (\forall n \in \mathbb{N})(x_n R x_{n+1}).$$

Axioma de elección contable (CC):
Toda colección contable de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.

3.2. Implicaciones

3.2.1. Una versión débil de ¿Elección?

Similarmente a como elección implica determinación de ciertos juegos (e.g. abiertos), determinación implica una versión débil del axioma de elección.

Teorema: Toda familia contable de subconjuntos no vacíos del espacio de Baire, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, tiene una función de elección.

Demostración: Sea $\mathcal{F} = \{X_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})\backslash\{\varnothing\} | n \in \mathbb{N}\}$. Definiremos un juego a partir de $\mathcal{F}$:

$$A := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots) : (a_{2i+1})_{i\in\mathbb{N}} \notin X_{a_0}\}.$$

Es decir, si J1 juega $(a_{2i})_{i\in\mathbb{N}}$ y J2 juega $(a_{2i+1})_{i\in\mathbb{N}}$, entonces J2 gana solo si $(a_{2i+1})_{i\in\mathbb{N}} \in X_{a_0}$. J1 no tiene estrategia en el juego asociado a este conjunto, pues una vez que juega a_0, J2 puede simplemente jugar $(a_{2i+1})_{i\in\mathbb{N}} \in X_{a_0} \neq \varnothing$, luego, J2 tiene estrategia ganadora ρ, con esta definimos la función de elección f en $\mathcal{F}$, siendo $f(X_n)$ la jugada dada para J2 por ρ contra $(a_{2i})_{i\in\mathbb{N}} = (n, 0, 0, 0, \cdots)$. □

Corolario: Toda familia contable de subconjuntos no vacíos del conjunto de los reales, $\mathbb{R}$, tiene una función de elección. Esto por la biyección entre $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $\mathbb{R}$.

3.2.2. Solución al problema de la medida en $\mathbb{R}$

Construcción (de la medida de Lebesgue)**:** En su forma usual la teoría de la medida dispone de elección contable, sin embargo, esto lo circunventaremos en esta construcción disponiendo del corolario anterior.

Lema: Dado $X \subseteq \mathbb{R}$ no Lebesgue-medible entonces $\exists Z \subset [0, 1]$ no Lebesgue-medible con medida interior 0 y medida exterior 1[22].

Demostración: Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ no Lebesgue-medible, partimos a X en $\mathbb{N}$ partes, al definir $X_n := X \cap [n, n + 1]$, por lo menos un X_n debe ser no medible, pues de lo contrario, si todas las partes fueran medibles, al ser la medida contable aditiva, X sería medible, así por la invarianza bajo traslaciones asumiremos que X_0 es no medible, $\mu_*(X_0) < \mu^*(X_0)$. Entonces, existe un conjunto $W \subseteq X_0$ Borel (y por ende medible) tal que $\mu_*(W) = \mu_*(X_0)$, similarmente, existe un conjunto $Y \supseteq X_0$ Borel (luego medible) tal que $\mu^*(Y) = \mu^*(X_0)$, al definir $\Omega := Y\backslash W$ Borel, y $\nu : \mathcal{M} \cap \mathcal{P}([0, 1]) \to [0, 1]$, dada por $\nu(V) := {}^{\mu(V\cap\Omega)}/_{\mu(\Omega)}$, vemos que ν es absolutamente continua respecto a μ ($\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$).
Por el teorema de isomorfismos entre espacios de medida[23], hay un isomorfismo de Borel, f, entre $([0, 1], \nu)$ y $([0, 1], \mu)$. Definamos $Z := f[X_0\backslash W]$, este resulta no medible, además:

$$\mu^*(Z) = \nu^*(f^{-1}[Z]) = \nu^*(X_0\backslash W) = {}^{\mu^*(X_0\backslash W)}/_{\mu(\Omega)} = {}^{\mu^*(X_0\backslash W)}/_{\mu(Y\backslash W)} = 1,$$
$$\mu_*(Z) = \nu_*(f^{-1}[Z]) = \nu_*(X_0\backslash W) = {}^{\mu_*(X_0\backslash W)}/_{\mu(\Omega)} = 0.$$ □

Teorema: Todo subconjunto de los reales es Lebesgue-medible[24].

Demostración: Por el lema anterior, basta mostrar que para todo $X \subseteq [0,1]$, ó existe $Z \subseteq X$ de medida positiva ó existe $Z \subseteq [0,1]$ con $X \cap Z = \varnothing$ de medida positiva. Sea $r_0, r_1, \cdots$ una sucesión de números racionales positivos tales que:

$$\frac{1}{2} > r_0 > r_1 > \cdots , \qquad \sum_{i\in\mathbb{N}} r_i < \infty.$$

Consideremos $H_n;\ n \in \mathbb{N}$; las clases de subconjuntos S_n de $[0,1]$ tales que:

1. S_n es una unión finita de intervalos cerrados $[p,q]$, con $p, q \in \mathbb{Q}$.
2. Su diámetro cumple $\delta(S_n) := \sup\limits_{x,y\in S_n} |x-y| \leqslant \frac{1}{2^n}$.
3. $\mu(S_n) = r_0 \times r_1 \times \cdots \times r_n$.

Las clases H_n son numerables, así al definir $S_{-1} := [0,1]$ e $I_0 := H_0 \cap \mathcal{P}(S_{-1}) = H_0$, podemos enumerar a I_0, así J1 al jugar $a_0 \in \mathbb{N}$, juega un $S_0 \in I_0$, mediante la enumeración. Inductivamente definimos en cada paso del juego $I_n := H_n \cap \mathcal{P}(S_{n-1})$ y lo enumeraremos, de forma que al jugar $a_n \in \mathbb{N}$ en el espacio de Baire, subyacientemente se juega un $S_n \in I_n$, así $(a_0, a_1, \cdots)$ induce una sucesión $(S_0, S_1, \cdots)$, donde $S_0 \supset S_1 \supset \cdots$ y $S_n \in H_n$, es decir, el resultado del juego es una sucesión de cerrados anidados cuyo diámetro tiende a cero, ésta converge a un punto p, y con éste establecemos la condición de gane, J1 gana si $p \in X$. Por **AD** este juego esta determinado, mostraremos que si J1 tiene estrategia ganadora, entonces X contiene un subconjunto de medida positiva; si J2 tiene estrategia ganadora, entonces $[0,1]\backslash X$ contiene un subconjunto de medida positiva.
Sea σ estrategia ganadora de J1, por abuso de notación diremos que $\sigma : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Pi_0^{2n} I_n \to I_{2n}$, sea la movida S_{2n}, S^1_{2n+1} una posible movida y su respuesta $S^1_{2n+2} := \sigma(S_0, \cdots, S_{2n}, S^1_{2n+1})$, y definamos el conjunto auxiliar:

$$R^1 := S_{2n}\backslash S^1_{2n+2}.$$

Si $\mu(R^1) > 2\mu(S_{2n})r_{2n+1}$, entonces existe $T \subset R^1$ con $\delta(T) \leqslant \delta(R^1)/2 \leqslant \delta(S_{2n})/2 \leqslant 1/2^{2n+1}$ tal que $\mu(T) > \mu(S_{2n})r_{2n+1}$, aún más, especificamos T unión finita de intervalos cerrados, entonces existirá $S^2_{2n+1} \subseteq T$, otra posible $2n+1$-movida, repetimos el proceso, definiendo:

$$R^n := S_{2n}\backslash \bigcup_{i=1}^{n} S^i_{2n+2}.$$

Por el mismo argumento, el proceso para al llegar a $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(R^m) \leqslant 2\mu(S_{2n})r_{2n+1}$, por construcción nuestras respuestas son disjuntas, y por nuestra condición de detención:

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m} S^i_{2n+2}\Big) = \mu(S_{2n}) - \mu(R^m) \geqslant \mu(S_{2n}) - 2\mu(S_{2n})r_{2n+1} = \mu(S_{2n})(1 - 2r_{2n+1}).$$

De forma que $W_{S_{2n}} := \{S^1_{2n+2}, \cdots S^m_{2n+2}\}$ es una familia disjunta de subconjuntos cerrados, ahora construiremos para cada $n \in \mathbb{N}$ una familia disjunta de cerrados como sigue: Sea $V_0 := \{S_0\}$, donde $S_0 := \sigma(\varnothing)$ es la jugada inicial de J1 dada por la estrategia σ. Dado V_{2n}, sea $V_{2n+2} := \bigcup\{W_{S_{2n}} : S_{2n} \in V_{2n}\}$, para así construir $U_{2n} := \bigcup\{S : S \in V_{2n}\}$ y:

$$Z := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{2n}.$$

Si $S \in V_{2n}$, entonces S es la 2n-ésima movida de J1 en algún juego donde se adhiere a σ, por lo tanto si $p \in Z$, p es un resultado de tal juego, así $p \in X$ y por lo tanto $Z \subseteq X$. Mostraremos que Z tiene medida positiva, esto se verifica por la construcción de V_{2n}, pues por ésta la medida de cada U_{2n} es por lo menos $r_0 \times (1 - 2r_2) \times \cdots \times (1 - 2r_{2n})$, y por las condiciones pedidas a r_i este producto converge a un número positivo, $\mu(Z)$. Análogamente si J2 tuviera estrategia ganadora $\exists Z \subseteq [0,1]\backslash X \sqcap \mu(Z) = \prod_{n\in\mathbb{N}}(1-2r_{2n+1})$.□

3.3. Una defensa del axioma de determinación

Durante este capítulo hemos visto cómo el axioma de determinación ofrece una poderosa alternativa al axioma de elección dentro de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, debido a su capacidad de proveer a la teoría de un enfoque intucionista y eludir patologías. En particular discutiremos sus consecuencias en tres ramas de la matemática.

3.3.1. En la teoría de juegos

En esta teoría las implicaciones de determinación son particularmente convincentes. Al ser todo juego de Gale-Stewart determinado, obtenemos una comprensión intuitiva de los juegos y sus estrategias.
Asimismo, la teoría de juegos prospera con la predictibilidad y las estrategias óptimas, esta alineación del axioma de determinación con los objetivos de la teoría de juegos proporciona un marco robusto y determinista, haciéndolo una herramienta invaluable tanto para la exploración teórica como para la aplicación práctica.
En cuanto a lo teórico, al asegurar que una amplia clase de juegos son determinados, AD presenta una base más estable para desarrollar conceptos y demostrar teoremas. Además, el entorno dado por AD exhibe una estructura que se alinea estrechamente con las aplicaciones en el mundo real, donde la predictibilidad es crítica.
Adoptar el AD dentro de la teoría ZF facilita así una comprensión más profunda de las interacciones estratégicas y los procesos de toma de decisiones óptimas.

3.3.2. En el álgebra

En contraste, la teoría de grupos pareciera ser el ámbito con más complicaciones para AD, dada la equivalencia de AC con el teorema de la estructura de grupo, entre otros, sin embargo esto solo es una complicación al trabajar con objetos no constructibles, para el resto se tiene una teoría si bien no idéntica, similar.
Aún más, este vacío dejado por ciertos resultados abre la puerta a una nueva teoría, de la cual se desconocen amplios parajes, motivación para una investigación más extensa.

3.3.3. En el análisis

Como pudimos notar en algunas de las demostraciones a lo largo de este capítulo, las estrategias ganadoras son un instrumento para comprender a los conjuntos de reales, cada una puede verse como un método constructivo para tratar conjuntos complicados, aumentando de esta forma nuestra capacidad para analizarlos.
Por otro lado, ya que el axioma de determinación y elección contable son compatibles recuperamos de forma completa la construcción usual de la medida, alternativamente, podemos prescindir de elección contable y recurrir a la implicación de determinación que toda familia contable de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tiene una función de elección.
El argumento más convincente a favor del axioma de determinación en este contexto es el resultado de que cada subconjunto de los números reales es Lebesgue-medible. Esto elimina la existencia de conjuntos patológicos que surgen bajo el axioma de elección, por ejemplo, bajo el axioma de determinación no existen conjuntos análogos al de Vitali o a las descomposiciones paradójicas de Banach-Tarski.
Lo cual altera a un nivel fundacional nuestra comprensión de la teoría de la medida: si todos los subconjuntos de la recta real son medibles, se simplifican y unifican aspectos del análisis y la probabilidad, así respecto a la teoría de la medida y al análisis en general, asumir determinación (con elección dependiente) es el entorno idóneo.

Conclusiones

La teoría de Zermelo-Fraenkel, junto al axioma de elección y al axioma de determinación son pilares fundamentales en nuestra comprensión de las estructuras matemáticas. En esta tesis, hemos explorado la relación entre estos dos axiomas en base a sus teorías, mostrando un contraste profundo, con implicaciones significativas para el análisis, así como para la teoría de juegos.

El axioma de elección, si bien sencillo y útil en una amplia gama de contextos, introduce resultados que, aunque potentes, conducen a consecuencias paradójicas, como la construcción de conjuntos no medibles (por ejemplo, el conjunto de Vitali) o el teorema de Banach-Tarski.

Por otro lado, el axioma de determinación, incompatible con el axioma de elección, promueve una visión más restrictiva pero también más intuitiva de los conjuntos infinitos, su elegancia y potencia radica en su capacidad para producir un universo donde el comportamiento caótico de los conjuntos (como se observa bajo el axioma de elección) se doma. Al adoptarlo, simplificamos el panorama de la teoría de medida y de juegos, llevando a teorías más coherentes donde cada conjunto se comporta de manera agradable.

En conclusión, tanto el axioma de elección como el axioma de determinación ofrecen perspectivas cruciales en la teoría de conjuntos y sus aplicaciones. La elección de adoptar uno sobre el otro depende del contexto matemático específico y de las propiedades deseadas en los conjuntos y estructuras consideradas. La tensión entre AC y AD revela una rica estructura en la fundación de las matemáticas, y su estudio sigue siendo una fuente fértil de descubrimientos teóricos.

Glosario

De símbolos (en orden de aparición)

General (en orden alfabético)

Bibliografía.

[1] Hrbacek, Karel, & Jech, Thomas. (1999).
"Introduction to Set Theory", Third Edition, Revised and Expanded. CRC Press.

[2] Vargas Mendoza, José Antonio. (2006).
"Álgebra Clásica"(3^a ed, Serie: Textos. Vol. 28).
https://www.pesmm.org.mx/Serie%20Textos_archivos/T28.pdf

[3] (s. a.). (2020).
"Topology definitions". Proofwiki.
https://proofwiki.org/wiki/Category:Definitions/Topology

[4] Kechris, Alexander S. (1994).
"Classical Descriptive Set Theory". Springer-Verlag. ISBN 0-387-94374-9.

[5] Smythe, Iian B. (2012).
"It's all fun & games". Cornell's Department of Mathematics.
https://pi.math.cornell.edu/~ismythe/Olivetti_Sept_2012_notes.pdf

[6] Martin, Donald A. (1975).
"Borel Determinacy". Annals of Mathematics, 102(2), 363–371.
https://doi.org/10.2307/1971035

[7] Gowers, John. (2013).
"Determinacy of Borel Games". Gower's Weblog
https://gowers.wordpress.com/2013/08/23/determinacy-of-borel-games-i

[8] Barnum, Kevin. (2013).
"The axiom of choice and its implications". UChicago's Department of Mathematics.
https://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Barnum.pdf

[9] Bukh, Boris. (2021, 30 septiembre).
"Math Studies Algebra: Axiom of Choice*". Boris Bukh's notes.
http://www.borisbukh.org/MathStudiesAlgebra1718/notes_ac.pdf

[10] Jech, T. [2008] (1973).
"The axiom of choice". Dover Publications. ISBN 978-0-486-46624-8.

[11] Tarski, Alfred. (1924).
"Sur quelques theorems qui equivalent a l'axiome du choix".
Fundamenta Mathematicae, 5.

[12] Blass, Andreas. (1984).
"Existence of bases implies the axiom of choice". Axiomatic set theory, 31.

[13] Karagila, Asaf. (2014).
"On the Partition Principle". Asaf Karagila's blog.
https://karagila.org/2014/on-the-partition-principle/

[14] Hausdorff, Felix. (1914).
"Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen". Mathematische Annalen 75.

[15] Banach, Stefan, & Tarski, A. (1944).
"Sur la décomposition des ensembles de points en parties congruentes".
Fundamenta Mathematicae 6.1.

[16] Vitali, Giuseppe. (1905).
"Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta".
Tipografia Gamberini e Parmeggiani.

[17] Maximenko, Egor. (s. f.).
"Existencia de conjuntos de números reales que no son Lebesgue medibles".
Apuntes y ejercicios de matemáticas, Egor Maximenko, ESFM del IPN.
https://esfm.egormaximenko.com/analysis/non_measurable_subset_of_real_numbers_es.pdf

[18] Grädel, Eric. (2016).
"Logic and Games". Mathematische Grundlagen der Informatik.
https://logic.rwth-aachen.de/files/LS-WS15/chapter3-2up.pdf

[19] Mycielski, Jan & Steinhaus, Hugo (1962).
"A mathematical axiom contradicting the axiom of choice".
Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques.

[20] Solovay, Robert (1970).
"A model of set theory in which every set or reals is Lebesgue measurable".
The Annals of mathematics.
https://people.math.wisc.edu/~awmille1/old/m873-03/solovay.pdf

[21] Shelah, S. (1984). “Can you take Solovay’s inaccesible away?”.
Israel’s journal of mathematics, 48, pp. 1-47.

[22] Fernández Bretón, David. (2024).
“Subset of the reals with zero inner measure and full outer measure in ZF+DC”.
https://mathoverflow.net/questions/466132/subset-of-the-reals-with-zero-inner-measure-and-full-outer-measure-in-mathsf

[23] Srivastava, Shashi Mohan (1998).
“A Course on Borel sets”, pp. 107, Springer.
https://archive.org/details/springer_10.1007-978-0-387-22767-2

[24] Mycielski, Jan & Świerczkowski, Stanisław (1964).
“On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness”.
Fundamenta Mathematicae.
https://eudml.org/doc/213774