INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

RESULTADOS DE TIPO RAMSEY BAJO EL AXIOMA DE DETERMINACIÓN

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS FÍSICOMATEMÁTICAS

PRESENTA
JOSÉ ALBERTO GUZMÁN VEGA

DIRECTORES DE TESIS:
DAVID JOSÉ FERNÁNDEZ BRETÓN
ELISEO SARMIENTO ROSALES

CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO 2025

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

Dirección de Posgrado

ACTA DE REGISTRO DE TEMA DE TESIS
Y DESIGNACIÓN DE DIRECTOR DE TESIS

Ciudad de México, a 06 de mayo del 2025

El Colegio de Profesores de Posgrado de la Escuela Superior de Física y Matemáticas (Unidad Académica) en su Sesión Ordinaria No. 04 celebrada el día 30 del mes abril de 2025, conoció la solicitud presentada por el (la) alumno (a):

Apellido Paterno:	GUZMÁN	Apellido Materno:	VEGA	Nombre (s):	JOSÉ ALBERTO

Número de boleta: B 2 3 0 9 4 0

del Programa Académico de Posgrado: MAESTRÍA EN CIENCIAS FISICOMATEMÁTICAS

Referente al registro de su tema de tesis

1.- Se acordó aprobar el tema de tesis:

"Resultados de tipo Ramsey bajo el axioma de determinación"

Objetivo general del trabajo de tesis:

Obtener resultados matemáticos combinatorios bajo el marco del Axioma de Determinación, contrastándolos con aquellos que se obtienen cuando, en vez de este axioma, se utiliza el Axioma de Elección.

2.- Se designa como Directores de Tesis a los profesores:

Director: DR. DAVID JOSE FERNANDEZ BRETON 2° Director: DR. ELISEO SARMIENTO ROSALES

No aplica: ☐

3.- El Trabajo de investigación base para el desarrollo de la tesis será elaborado por el alumno en:

la Escuela Superior de Física y Matemáticas

que cuenta con los recursos e infraestructura necesarios.

4.- El interesado deberá asistir a los seminarios desarrollados en el área de adscripción del trabajo desde la fecha en que se suscribe la presente, hasta la aprobación de la versión completa de la tesis por parte de la Comisión Revisora correspondiente.

Director(a) de Tesis	Director de Tesis (en su caso)
DR. DAVID JOSE FERNANDEZ BRETON	DR. ELISEO SARMIENTO ROSALES
Alumno	**Presidente del Colegio**
JOSÉ ALBERTO GUZMÁN VEGA	DR. MIGUEL NERI ROSAS

SIP-14
REP 2017

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

Dirección de Posgrado

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 12:00 horas del día 10 del mes de junio del 2025 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Posgrado de: Escuela Superior de Física y Matemáticas para examinar la tesis titulada:

"Resultados de tipo Ramsey bajo el axioma de determinación" del (la) alumno (a):

Apellido Paterno:	GUZMÁN	Apellido Materno:	VEGA	Nombre (s):	JOSÉ ALBERTO

Número de boleta: B 2 3 0 9 4 0

Alumno del Programa Académico de Posgrado: MAESTRÍA EN CIENCIAS FISICOMATEMÁTICAS

Una vez que se realizó un análisis de similitud de texto, utilizando el software antiplagio, se encontró que el trabajo de tesis tiene 2 % de similitud. **Se adjunta reporte de software utilizado**.

Después que esta Comisión revisó exhaustivamente el contenido, estructura, intención y ubicación de los textos de la tesis identificados como coincidentes con otros documentos, concluyó que en el presente trabajo **SI** ☐ **NO** ☒ **SE CONSTITUYE UN POSIBLE PLAGIO.**

JUSTIFICACIÓN DE LA CONCLUSIÓN:

El pequeñísimo porcentaje de plagio corresponde a palabras y expresiones de uso muy común en matemáticas, así como a definiciones y resultados estándar.

Es responsabilidad del alumno como autor de la tesis la verificación antiplagio, y del Director o Directores de tesis el análisis del % de similitud para establecer el riesgo o la existencia de un posible plagio.

Finalmente y posterior a la lectura, revisión individual, así como el análisis e intercambio de opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR** ☒ **SUSPENDER** ☐ **NO APROBAR** ☐ la tesis por **UNANIMIDAD** ☒ o **MAYORÍA** ☐ en virtud de los motivos siguientes:

El alumno presenta un trabajo de tesis sólido y de calidad, llegando incluso a mostrar resultados originales en el último capítulo.

COMISIÓN REVISORA DE TESIS

DR. DAVID JOSE FERNANDEZ BRETON DIRECTOR DE TESIS	DR. MIGUEL ÁNGEL MOTA GAYTÁN	DR. JOSE OSCAR GONZALEZ CERVANTES
DR. ELISEO SARMIENTO ROSALES 2º DIRECTOR DE TESIS	DR. EGOR MAXIMENKO	DR. MIGUEL NERI ROSAS **PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES**

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA DE AUTORIZACIÓN DE USO DE OBRA PARA DIFUSIÓN

En la Ciudad de México a día 10 del mes de Junio del año 2025, el que suscribe José Alberto Guzmán Vega, alumno del programa de Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas con número de registro B230940, adscrito a la Escuela Superior de Física y Matemáticas manifiesta ser autor intelectual del presente trabajo de tesis bajo la dirección de los doctores David José Fernández Bretón y Eliseo Sarmiento Rosales y cede los derechos del trabajo intitulado "Resultados de tipo Ramsey bajo el axioma de determinación", al Instituto Politécnico Nacional, para su difusión con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expresado del autor y/o directores. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección de correo:

jguzmanv1501@alumno.ipn.mx

Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar agradecimiento correspondiente y citar la fuente de este.

José Alberto Guzman Vega

Nombre completo y firma autógrafa del estudiante

Resumen

Estudiaremos resultados de tipo Ramsey bajo los axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF) sin el axioma de elección (AC), llenando este vacío con el axioma de determinación (AD), una hipótesis que conecta a la metateoría con la teoría de juegos en espacios polacos. Esto pues, en contraste con la teoría clásica de Zermelo-Fraenkel con elección (ZFC), donde elección introduce conjuntos de números reales con comportamientos patológicos, como el conjunto de Vitali, cuya existencia da lugar a la paradoja de Banach Tarski, determinación proporciona una estructura más restringida y, consecuentemente, regular. Bajo AD, todos los conjuntos de reales satisfacen propiedades de regularidad significativas, como la propiedad de Baire, la propiedad del conjunto perfecto y la Lebesgue medibilidad, garantizando un comportamiento bien definido, lo que facilita su análisis y clasificación. Aún más, el sistema axiomático resultante, Zermelo-Fraenkel con determinación (ZFD), establece una nueva teoría de grandes cardinales, con vastas diferencias combinatorias, especialmente en la teoría de Ramsey.
Palabras clave: determinación, juegos, combinatoria, teoría de Ramsey.

Abstract

We will study Ramsey type results under the Zermelo-Fraenkel axioms (ZF) without the axiom of choice (AC), by filling this gap with the axiom of determinacy (AD), a hypothesis connecting the metatheory with the theory of infinite games in Polish spaces. Thus, in contrast to the classical Zermelo-Fraenkel theory with the axiom of choice (ZFC), where the axiom of choice introduces sets of real numbers with pathological behaviors, such as the Vitali set, whose existence gives rise to the Banach Tarski paradox, determinacy provides a more restricted and, consequently, regular structure. Under determinacy, all sets of real numbers satisfy significant regularity properties, such as the Baire property, the perfect set property, and Lebesgue measurability, guaranteeing a well-defined behavior, which facilitates their analysis and classification. Furthermore, the resulting axiomatic system, Zermelo-Fraenkel with determinacy (ZFD), establishes a brand new theory of large cardinals, with vast combinatorial differences, especially in Ramsey theory.
Keywords: determinacy, games, combinatorics, Ramsey theory.

Índice general

Agradecimientos

A mi familia:
A mis padres, que con su eterno esfuerzo hicieron posible mi única dedicación al estudio, su ejemplo de trabajo y de constancia es el cimiento sobre el que se construye este escrito.
A mis hermanas, por estar presentes en cada paso, duda y momento de agotamiento, por ser mi motivación para siempre seguir adelante.
Gracias totales.

A mis directores de tesis:
Agradezco a mis directores de tesis, los doctores Fernández Bretón y Sarmiento Rosales, por su inestimable guía, apoyo constante y generosa dedicación a lo largo de este proceso. Su compromiso, entusiasmo y saber han sido una fuente de inspiración y modelo a seguir. Este y muchos otros proyectos no habrían sido posibles sin su orientación.

A mi institución y a todos los que la conforman:
A la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, por las oportunidades que me ha brindado, que me han hecho crecer como profesional, por los profesores a los que he conocido, que me han hecho crecer como alumno, y por sus alumnos, por todos los momentos y recuerdos juntos.

A la Secretaria de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación
(antes Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología):
Su respaldo ha sido fundamental para dedicarme de manera plena a esta investigación. Me siento agradecido por haber sido beneficiario y participe de este esfuerzo invaluable por fomentar la ciencia, la educación y el pensamiento crítico en nuestro país.

"The Axiom of Choice is necessary to select
a set from an infinite number of pairs of socks,
but not an infinite number of pairs of shoes."
Bertrand Russell

"El Axioma de Elección es necesario para seleccionar
un conjunto de un número infinito de pares de calcetas,
pero no de un número infinito de pares de zapatos."

Introducción

Este trabajo ahondará en resultados de tipo Ramsey, sin el axioma de elección (AC), en el contexto de juegos infinitos, dada su relación con ciertas propiedades de regularidad, la formulación del axioma de determinación (AD) y sus implicaciones combinatorias. El siguiente marco histórico se centra en el desarrollo de estas ideas.

La teoría de conjuntos moderna, fundada por Georg Cantor a finales del siglo XIX, y consolidada por la axiomatización dada por Ernst Zermelo y Adolf Fraenkel (ZF), se ha convertido en la formalización estándar de las teorías axiomáticas de conjuntos y, por ende, de las matemáticas. El axioma de elección, formulado por Zermelo en 1904, fue controvertido desde su introducción debido a sus varias implicaciones contraintuitivas, como la paradoja de Banach-Tarski. Llevando al estudio de axiomatizaciones alternativas, donde elección no se asume. En la década de 1960, la teoría descriptiva de conjuntos, que clasifica a los conjuntos en los términos lógicos y topológicos que lo describen, emergió como un área clave. Dentro de esta, el axioma de elección no siempre es necesario, aún más, su ausencia permite explorar estructuras más finas y propiedades de regularidad. En este contexto, los juegos infinitos, introducidos por Gale y Stewart en el año de 1953, son fundamentales. Un juego involucra dos jugadores alternados formando una sucesión, y se dice que un jugador tiene una estrategia ganadora si puede garantizar su victoria, independientemente de las jugadas del oponente.

Surgiendo así, el axioma de determinación, propuesto por Mycielski y Steinhaus en 1962, que afirma todo juego es determinado (algún jugador tiene una estrategia ganadora). Este axioma es incompatible con elección, al implicar que todos los conjuntos de reales tienen la propiedad de Baire, la del subconjunto perfecto y son Lebesgue medibles. AD se convirtió así en una herramienta poderosa a lo largo de la teoría de conjuntos, ya que proporciona un marco natural para estudiar propiedades de regularidad.

AD tiene profundas implicaciones en el área de combinatoria infinita y en diversas teorías, como grandes cardinales y modelos, exploradas durante la segunda mitad del siglo XX, por prestigiosos matemáticos como Hugh Woodin, Robert Solovay y Donald Martin, algunas de estas incluyen, la consistencia de AD con la de ciertos grandes cardinales, un modelo donde el primer cardinal no contable es medible y resultados tipo Ramsey.

Esta tesis, como su marco histórico, se encuentra dividido en tres partes, seriadas entre sí. En el primer capítulo sentaremos las bases con las que trabajaremos a lo largo del texto, la teoría de conjuntos, su conexión con juegos infinitos y propiedades de regularidad. En el segundo discutimos las consecuencias del axioma de determinación en este contexto, centrándonos en los aspectos más distintivos de esta “nueva” teoría, por ejemplo, la solución que proporciona a las patologías ocurrentes bajo el axioma de elección. En el tercero veremos el grado al que se pueden conservar resultados combinatorios, de tipo Ramsey, como lo son los teoremas de tipo Owings y Hindman.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\textbf{Capítulo 1: ZF}} \arrow[d, dash] \\
\boxed{\textbf{Capítulo 2: ZF+AD}} \arrow[d, dash] \\
\boxed{\textbf{Capítulo 3: ZF+AD+} \cdots}
\end{tikzcd}
$$

Capítulo 1

Espacios polacos y juegos infinitos

Dentro de la teoría de conjuntos, el estudio de espacios topológicos es quintaesencial, pues ofrece un marco para analizar la complejidad de los conjuntos mediante jerarquías y examinar sus propiedades estructurales. Esto es expresamente cierto para espacios polacos, entre ellos, el espacio de Baire y el de Cantor.

Definición: Para $i < \omega$ consideremos a $X_i := \omega$ junto a su topología discreta $T_i := \wp(\omega)$, de manera que podamos construir la familia de espacios topológicos $\mathcal{F} := \{(X_i, T_i) | i < \omega\}$, entonces, definimos **el espacio de Baire**[1] como el espacio producto de $\mathcal{F}$, siendo este

$$\begin{aligned}
\prod_{i<\omega} X_i : &= \left\{ s : \omega \to \bigcup_{i<\omega} X_i \;\middle|\; \forall i < \omega \; (s(i) \in X_i) \right\} \\
&= \left\{ s : \omega \to \bigcup_{i<\omega} \omega \;\middle|\; \forall i < \omega \; (s(i) < \omega) \right\} \\
&= \{ s : \omega \to \omega \mid \forall i < \omega \; (s(i) < \omega) \} \\
&= \{ s : \omega \to \omega \} \\
&= \omega^\omega .
\end{aligned}$$

Dotado de la topología generada por la base de **conos**

$$\mathcal{B}_{\omega^\omega} : = \{C(t) | t \in \omega^{<\omega}\}, \qquad\qquad C(t) : = \{s \in \omega^\omega | t \subset s\}. \quad \lrcorner$$

Aprovechando el hecho que ω es equipotente a $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, esto lo podemos visualizar como

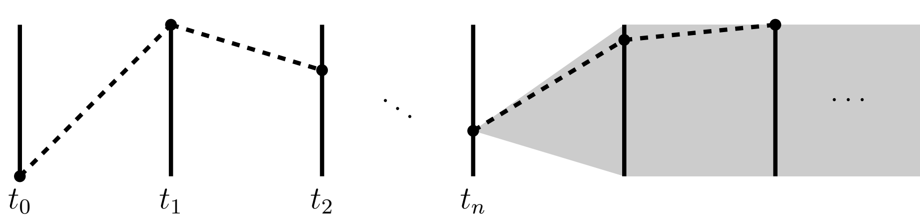

Figura 1.1: Visualización del espacio de Baire, de un cono y de uno de sus elementos.

Definición: Similarmente, para $i < \omega$ consideremos a $X_i := \{0,1\}$ junto a $T_i := \wp(\{0,1\})$, y definimos al **espacio de Cantor**[1] como el espacio producto de $\mathcal{F} := \{(X_i, T_i) | i < \omega\}$, siendo este, el conjunto

$$\begin{aligned}\prod_{i<\omega} X_i :&= \left\{ s : \omega \to \bigcup_{i<\omega} X_i \;\middle|\; \forall i < \omega \ (s(i) \in X_i) \right\} \\ &= \left\{ s : \omega \to \bigcup_{i<\omega} \{0,1\} \;\middle|\; \forall i < \omega \ (s(i) \in \{0,1\}) \right\} \\ &= \{ s : \omega \to \{0,1\} \mid \forall i < \omega \ (s(i) \in \{0,1\}) \} \\ &= \{ s : \omega \to \{0,1\} \} \\ &= \{0,1\}^\omega \\ &= 2^\omega .\end{aligned}$$

Dotado de la topología generada por la base de **conos**

$$\mathcal{B}_{2^\omega} := \{ C(t) \mid t \in 2^{<\omega} \}, \qquad C(t) := \{ s \in 2^\omega | t \subset s \}. \lrcorner$$

Esto lo podemos visualizar como

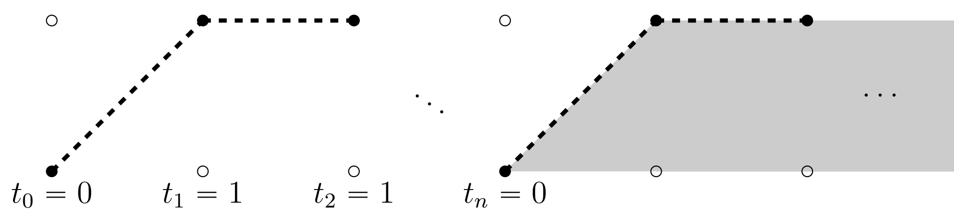

Figura 1.2: Visualización del espacio de Cantor, de un cono y de uno de sus elementos.

Hay una razón aún más específica para enfocarnos en ambos espacios, su relación con $\mathbb{R}$:

- El espacio de Baire es homeomorfo a $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ con la topología usual.
- El espacio de Cantor se puede inyectar en $[0,1]$ con imagen densa.

Así, al estudiar estos dos espacios polacos, realmente estamos estudiando a los reales. Motivados por los espacios polacos extendemos nuestra mira a las propiedades topológicas, particularmente nociones que caen bajo el término general de propiedades de regularidad de sus subconjuntos, pues nos permiten comprender su clasificación, estructura y relación, influyendo en su posición dentro de jerarquías como la de Borel y la proyectiva. Además, la topología nos facilita herramientas para conectar a la teoría de conjuntos con la lógica, la teoría de grupos, de juegos y de la medida, con aplicaciones en el análisis.
Sintetizando, no solo caracterizaremos la naturaleza de los conjuntos en espacios polacos, sino que abriremos las puertas a una comprensión más profunda de su comportamiento en diversas áreas de las matemáticas. Dado este panorama rememoremos.

Definición: Sea (X, T) un espacio topológico, definiremos el **interior**[2] de $W \subseteq X$, como

$$\operatorname{int}(W) := \bigcup\{A \mid A \in T \wedge A \subseteq W\},$$

el cual es, por preservación bajo unión de abiertos, el abierto más grande contenido en W, análogamente, definimos su **cerradura**, como el cerrado más pequeño que contiene a W,

$$\operatorname{cl}(W) := \bigcap\{C \mid X \backslash C \in T \wedge C \supseteq W\}.$$ ⌟

Definición: Sea (X, T) un espacio topológico, diremos que $W \subseteq X$ es **nunca denso**[2] si

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(W)) = \varnothing.$$

Ampliando esto, W es **magro** si existe una sucesión $(\mathcal{N}_i \mid i < \omega)$ de cerrados nunca densos para la cual

$$W \subseteq \bigcup_{i<\omega} \mathcal{N}_i.$$

Finalmente, W tiene **la propiedad de Baire** si $W \Delta A$ es magro para algún abierto A.⌟

Definición: Sea (X, T) un espacio topológico, diremos que este es **un espacio de Baire**[2] si ningún abierto no vacío es magro. ⌟

Definición: Un conjunto W es **numerable**[3] si existe una inyección $f : W \hookrightarrow \omega$. Sea (X, T) un espacio topológico, llamaremos a $V \subseteq X$ un subconjunto **perfecto**[2] de X si es cerrado y todos sus puntos son límite $(\forall x \in V\ \forall A \in T (x \in A \implies V \cap (A \backslash \{x\}) \neq \varnothing))$. Uniendo los conceptos previos, $W \subseteq X$ tendrá la **propiedad del conjunto perfecto**[2] si es numerable o tiene un subconjunto perfecto. ⌟

Definición: Sea (X, T) un espacio topológico, diremos que $W \subseteq X$ es de **Borel**[2] si pertenece a la cerradura bajo T de las operaciones de unión numerable y complemento.⌟

Habiendo establecido estas propiedades, mostraremos resultados que las interconectan, permitiéndonos tratar intercambiablemente, con la precaución requerida, a los "reales", preparando terreno fértil para la codificación y el planteamiento de los juegos infinitos, y los resultados de regularidad que estos conllevan.

Teorema: $\omega^{<\omega}$ es numerable.

Demostración: Basta considerar la biyección

$$\begin{aligned} f : \omega^{<\omega}\backslash\{\varnothing\} &\hookrightarrow \omega\backslash\{0\} \\ (n_0, n_1, \cdots, n_{i-1}) &\mapsto 2^{n_0} * 3^{n_1} * \cdots * p_{n-1}^{n_{i-2}} * p_n^{n_{i-1}+1}. \end{aligned}$$

Así enumeramos $\omega^{<\omega} = \{\dagger_i | i < \omega\}$ con $\ell(\dagger_i) \leqslant i$, donde $\ell(\dagger_i)$ denota la longitud de $\dagger_i$. $\square$

Corolario: $[\omega]^{<\omega}$ y $2^{<\omega}$ son numerables. $\square$

Teorema: El espacio de Baire, $(\omega^\omega, T(\mathcal{B}_{\omega^\omega}))$, es un espacio de Baire.

Demostración: Procedamos por contradicción, sea $W \subseteq \omega^\omega$ abierto no vacío magro, luego, existe $(\mathcal{N}_i | i < \omega)$ de cerrados nunca densos tal que $W \subseteq \bigcup_{i<\omega} \mathcal{N}_i$. Entonces definimos

$$n_0 := \text{mín}\{n < \omega \mid C(\dagger_n) \subseteq W\}.$$

Dado n_i, $\exists t \supseteq \dagger_{n_i}$ tal que $C(t) \cap \mathcal{N}_i = \varnothing$, si no $\mathcal{N}_i \supseteq C(\dagger_{n_i})$ y $\mathcal{N}_i$ no sería nunca denso, así

$$n_{i+1} := \text{mín}\{n < \omega \mid (C(\dagger_n) \cap \mathcal{N}_i = \varnothing) \wedge (\dagger_n \supseteq \dagger_{n_i}) \wedge (\ell(\dagger_n) > \ell(\dagger_{n_i}))\}.$$

La construcción de los n_i es tal que $i < j$ implica $W \supseteq C(\dagger_{n_i}) \supseteq C(\dagger_{n_j})$ y $\ell(\dagger_{n_i}) < \ell(\dagger_{n_j})$. Claramente, si $x = \bigcup_{i<\omega} \dagger_{n_i}$, entonces $x \in W \backslash \bigcup_{i\in\omega} \mathcal{N}_i$, lo cual es una contradicción. $\square$

Teorema: Existe un mapeo $\Psi : \omega^\omega \to 2^\omega$ que preserva la propiedad del conjunto perfecto.

Demostración: Basta definir

$$\begin{aligned} \Psi : \omega^\omega &\hookrightarrow 2^\omega \\ (n_0, n_1, \cdots) &\mapsto (\overbrace{0, \cdots, 0}^{n_0 \text{ veces}}, 1, \overbrace{0, \cdots, 0}^{n_1 \text{ veces}}, 1 \cdots). \end{aligned}$$

$\Psi[\omega^\omega]$ consiste de 2^ω salvo el conjunto numerable de las sucesiones eventualmente cero. Así, sea $W \subseteq 2^\omega$, al ser Ψ claramente inyectiva, W es numerable sii $\Psi^{-1}[W]$ es numerable, aún más, al ser Ψ homeomorfismo, W es perfecto si y solo si $\Psi^{-1}[W]$ es perfecto. $\square$

Los juegos infinitos son una rama de la teoría de juegos y de conjuntos que investiga interacciones entre dos jugadores alternados, en un juego con una infinidad de turnos. A lo largo de este texto de teoría de Ramsey tales juegos serán el mecanismo principal, al relacionarse estrechamente con propiedades de regularidad, comúnmente topológicas, ofreciendo de este modo un marco poderoso que conecta diversas áreas de las matemáticas.

Definición: Sea $W \subseteq \omega^\omega$, definimos su **juego de Gale-Stewart**[4] asociado, $\mathcal{GS}(W)$, como el juego de longitud ω con información perfecta de dos jugadores alternados, donde en cada turno juegan un natural, esto se puede enunciar como

1. El Jugador 1 (J1) juega un natural, $n_0 < \omega$.
2. El Jugador 2 (J2) ve la jugada anterior y juega un natural, $n_1 < \omega$.
3. Continuamos este proceso inductivamente alternando a los jugadores en cada turno.

Al "acabar" el juego, los jugadores habrán formado la sucesión $\mathbf{s} := (n_0, n_1, \cdots) \in \omega^\omega$, donde el jugador 1 gana si $\mathbf{s} \in W$ y el jugador 2 gana en caso contrario, es decir, si $\mathbf{s} \notin W$.⌟

Definición: Una **estrategia para J1** es una función

$$\sigma : \bigcup_{k<\omega} \omega^{2k} \to \omega.$$

Similarmente una **estrategia para J2** es una función

$$\tau : \bigcup_{k<\omega} \omega^{2k+1} \to \omega.$$

⌟

Notemos que estas definiciones las hemos construido independientemente de un juego. Al hablar de instancias de un juego, resulta conveniente hablar de estrategias y sucesiones, denotemos una jugada de acuerdo a las estrategias/sucesiones σ/x para J1 y τ/y para J2:

$$\begin{aligned}
\sigma * \tau &:= (\sigma(\varnothing), \tau(\sigma(\varnothing)), \sigma((\sigma(\varnothing), \tau(\sigma(\varnothing)))), \cdots), \\
\sigma * y &:= (\sigma(\varnothing), y(0), \sigma((\sigma(\varnothing), y(0))), \cdots), \\
x * \tau &:= (x(0), \tau(x(0)), x(1), \cdots), \\
x * y &:= (x(0), y(0), x(1), \cdots).
\end{aligned}$$

Definición: Sea $W \subseteq \omega^\omega$, diremos que la estrategia σ para J1 es **ganadora** en $\mathcal{GS}(W)$ si

$$\forall \tau : \bigcup_{k<\omega} \omega^{2k+1} \to \omega \qquad\qquad \sigma * \tau \in W.$$

Análogamente, diremos que la estrategia τ para J2 es **ganadora** en $\mathcal{GS}(W)$ si

$$\forall \sigma : \bigcup_{k<\omega} \omega^{2k} \to \omega \qquad\qquad \sigma * \tau \notin W.$$

Por último, diremos que $\mathcal{GS}(W)$ es **determinado** si J1 ó J2 tiene estrategia ganadora.⌟
Si bien estas definiciones son aparentemente complejas, la idea detrás es bastante sencilla, lo que nos dicen es que el jugador con la estrategia ganadora gana siempre al seguirla, determinando el resultado, independientemente de los movimientos del jugador contrario.

Teorema: Existen juegos determinados.

Demostración: Tómese el asociado al conjunto ω^ω. $\square$

Definición: Sea $W \subseteq \omega^\omega$, definimos su **juego de Banach-Mazur**[5] asociado, $\mathscr{BM}(W)$, como el juego de longitud ω con información perfecta de dos jugadores alternados, donde

1. J1 juega una tupla no vacía de naturales, $t_0 \in \omega^{<\omega} \backslash \{\varnothing\}$.
2. J2 ve la jugada anterior y juega una tupla no vacía de naturales, $t_1 \in \omega^{<\omega} \backslash \{\varnothing\}$.
3. Continuamos este proceso inductivamente alternando a los jugadores en cada turno.

Al "acabar" el juego, los jugadores habrán formado la sucesión $\mathbf{s} := t_0 \frown t_1 \frown \cdots \in \omega^\omega$, donde el jugador 1 gana si $\mathbf{s} \in W$ y el jugador 2 gana en caso contrario, es decir, si $\mathbf{s} \notin W$.⌟ Se extienden naturalmente las definiciones previamente dadas para juegos de Gale-Stewart (**estrategia**, **estrategia ganadora**, **determinado**).

Teorema (Oxtoby[5], Banach-Mazur[6])**:** Sea $W \subseteq \omega^\omega$, entonces:

I) W es magro si y sólo si J2 tiene estrategia ganadora en $\mathscr{BM}(W)$.

II) $C(t) \backslash W$ es magro para algún $t \in \omega^{<\omega}$ sii J1 tiene estrategia ganadora en $\mathscr{BM}(W)$.

Demostración:

I) $\Rightarrow$) Al ser W magro, $\exists(\mathcal{N}_n | n < \omega)$ de cerrados nunca densos tal que $W \subseteq \bigcup_{n<\omega} \mathcal{N}_n$. Entonces, es posible definir una estrategia σ para J2 con el siguiente argumento, al ser $\mathcal{N}_n$ nunca denso, $C(t_0 \frown \cdots \frown t_{2n})$ contiene un abierto disjunto de $\mathcal{N}_n$, consecuentemente, $\exists t_{2n+1} \in \omega^{<\omega}$ tal que $C(t_0 \frown \cdots \frown t_{2n} \frown t_{2n+1}) \cap \mathcal{N}_n = \varnothing$, aún más, es posible elegir tal de forma que sea el mínimo lexicográficamente, por recursión, $\tau(t_0 \frown \cdots \frown t_{2n}) := t_{2n+1}$, esta estrategia es ganadora para J2.

$\Leftarrow$) Partamos de la suposición que J2 tiene una estrategia ganadora, llamémosla τ. Para cada jugada parcial siguiendo la estrategia τ de la forma $p = (t_0, \cdots, t_{2n})$, sean $p{*} := t_0 \frown \cdots \frown t_{2n}$ y

$$D_p := \{s \in \omega^\omega \mid p{*} \nsubseteq s \vee \exists t \in \omega^{<\omega} \backslash \{\varnothing\}(p{*} \frown t \frown \tau(p \frown (t)) \subseteq s)\}.$$

Así, cada D_p es abierto (notando en parte que $C(p{*})$ es cerrabierto) y denso (pues para todo $u \in \omega^{<\omega}$, ó bien $u \nsupseteq p{*}$, de modo que por definición $C(u) \subseteq D_p$, ó bien $u \supseteq p{*}$, existiendo un $t \in \omega^{<\omega} \backslash \{\varnothing\}$ tal que $p{*} \frown t = u$ y por lo tanto cualquier $s \in \omega^\omega$ con $s \supseteq p{*} \frown t \frown \tau(p \frown t)$ pertenece a $C(u) \cap D_p$). Además, para cualquier $s \in \bigcap_p D_p$, podemos definir recursivamente una jugada t_i $(i < \omega)$ de acuerdo con τ tal que $s = t_0 \frown t_1 \frown \cdots$, y, al ser τ ganadora para J2, $s \notin W$. En consecuencia, $W \subseteq \bigcup_p (\omega^\omega \backslash D_p)$, unión numerable de cerrados nunca densos.

II) $\Rightarrow$) Sea $C(t) \backslash W$ magro para algún $t \in \omega^{<\omega}$. Así, J1 tiene una estrategia ganadora σ, al jugar el movimiento inicial $\sigma(\varnothing) = t$ para luego evitar $C(t) \backslash W$ como en I)$\Rightarrow$).

$\Leftarrow$) Para el recíproco, si J1 tiene una estrategia ganadora σ, digamos con $\sigma(\varnothing) =: t$. Entonces J2 tiene una estrategia ganadora en $\mathscr{BM}(C(t) \backslash W)$ derivada de σ, $\tau(t_0 \frown \cdots \frown t_{2n}) := (0) \frown \sigma(t_0 \frown \cdots \frown t_{2n} \frown (0))$, $C(t) \backslash W$ es magro. $\square$

Definición: Sea $W \subseteq 2^\omega$, definimos su **juego de Davis**[7] asociado, denotado $\mathcal{D}(W)$, como el juego de longitud ω con información perfecta de dos jugadores alternados, donde

1. J1 juega una tupla de bits, $t_0 \in 2^{<\omega}$.
2. J2 ve la jugada anterior y juega un bit, $b_1 \in 2$.
3. Continuamos este proceso inductivamente alternando a los jugadores en cada turno.

Al "acabar" el juego, los jugadores habrán formado la sucesión $\mathbf{s} := t_0 \frown (b_1) \frown \cdots \in 2^\omega$, donde el jugador 1 gana si $\mathbf{s} \in W$ y el jugador 2 gana en caso contrario, es decir, si $\mathbf{s} \notin W$.⌟ Nuevamente se extienden de forma natural las definiciones dadas para juegos anteriores.

Teorema (Davis[7])**:** Sea $W \subseteq 2^\omega$, entonces:

I) W es numerable sii J2 tiene una estrategia ganadora en $\mathcal{D}(W)$.

II) W tiene un subconjunto perfecto sii J1 tiene una estrategia ganadora en $\mathcal{D}(W)$.

Demostración:

I) $\Rightarrow$) Al ser W numerable, existe una enumeración de este, denotémosla $\{v_n | n < \omega\}$. Entonces, $\tau(t_0 \frown \cdots \frown t_{2n}) := 1 - v_n(\ell(t_0 \frown \cdots \frown t_{2n}))$ es ganadora para J2, pues asegura en su n-ésimo movimiento que la jugada resultante difiere de v_n.

$\Leftarrow$) Sea τ estrategia ganadora de J2. Para cada jugada parcial de acuerdo a τ de la forma $p = (t_0, \cdots, t_{2n}, b_{2n+1})$, sean $p* := t_0 \frown \cdots \frown t_{2n} \frown (b_{2n+1})$ y $D_p := \{s \in 2^\omega | p* \nsubseteq s \vee \exists t \in 2^{<\omega}(p* \frown t \frown \tau(p \frown (t)) \subseteq s)\}$. $W \subseteq \bigcup_p (2^\omega \backslash D_p)$. Para cada p, $s \in 2^\omega \backslash D_p$ cuando $p* \subseteq s$ y $\forall t \in 2^{<\omega}(p* \frown t \frown \tau(p \frown t) \nsubseteq s)$, pero entonces, $2^\omega \backslash D_p$ tiene un único miembro, s_p, con $\ell(p*) =: m$, $s_p|_m = p*$, necesariamente $s_p(m) = 1 - \tau(p \frown \varnothing)$, por lo que recursivamente, para $e > m$, $s_p(e) = 1 - \tau(p \frown (s_p(m), \cdots, s_p(e-1)))$, esto pues el espacio ambiente es 2^ω. Por lo tanto, W es numerable.

II) $\Rightarrow$) Al tener W un subconjunto perfecto P, definimos $T := \{s\restriction_n | s \in P \wedge n < \omega\}$. Entonces una estrategia σ para J1 puede describirse de la siguiente manera, generalmente, en respuesta a una jugada parcial p con concatenación $p* \in T$, como todo punto de P es límite, $\exists t \in 2^{<\omega}$ tal que $p* \frown t \frown 0, p* \frown t \frown 1 \in T$, jugamos $\sigma(p) := t$, así, como P es cerrado esta estrategia es ganadora para J1.

$\Leftarrow$) Sea σ estrategia ganadora de J1. Entonces, $P := \{\sigma * y | y \in 2^\omega\} \subseteq W$ es perfecto, al tener solo puntos límite, pues para todo $\sigma * y$ y $t \in 2^{<\omega}$ tal que $\sigma * y \in C(t)$, tenemos que toda $y' \in 2^\omega$ tal que $y'\restriction_{|t|} = y\restriction_{|t|}$ también verifica que $\sigma * y' \in C(t)$, y al ser cerrado, pues todo elemento de $2^\omega \backslash P$ en algún turno dejó de seguir σ, así pertenece a un cono de la forma $C(p* \frown (1 - \sigma(p))) \subseteq 2^\omega \backslash P$. □

Corolario: Sea $W \subseteq \omega^\omega$, tenemos que $\mathcal{D}(\Psi[W])$ está determinado si y solamente si W tiene la propiedad del conjunto perfecto. □

De forma similar a lo hecho para las propiedades de Baire y del conjunto perfecto, los juegos infinitos establecen una dicotomía para analizar la medibilidad de Lebesgue, particularmente a través de la existencia de estrategias ganadoras del juego de la cubierta. En este, un jugador intenta construir una sucesión que pertenezca a un conjunto dado, mientras que el otro intenta forzarla fuera de dicho conjunto mediante una cobertura. La determinación de tal, en la diferencia de una cubierta mínima de un conjunto y este, implica que el conjunto es medible en el sentido de Lebesgue.
Este texto no abordara tal propiedad, al haber sido tratada previamente por el autor[8], que si bien no se estudió con el enfoque del juego de la cubierta, abarca ideas similares, en caso que el lector desee una prueba digerible de este hecho, véase [2] (páginas 375-376).
En resumen, los juegos infinitos en espacios polacos desempeñan un papel trascendental en el estudio de diversas propiedades de regularidad de los conjuntos de números reales, estableciendo las condiciones bajo las cuales se verifican propiedades fundamentales como la propiedad de Baire, la propiedad del conjunto perfecto y la medibilidad de Lebesgue.
Particularmente, los espacios polacos se presentan como el entorno natural para estudiar la topología y medida de conjuntos de reales, ya que su estructura completa y separable permite la aplicación de herramientas de análisis, lógica y teoría descriptiva de conjuntos.
En estos espacios, la regularidad limita comportamientos patológicos de los conjuntos. La propiedad de Baire, resulta en un topología estable bajo pequeñas perturbaciones. A su vez, la propiedad del conjunto perfecto garantiza que los conjuntos no numerables contienen subconjuntos homeomorfos a los reales, impidiendo haya conjuntos intermedios. Finalmente, la medibilidad de Lebesgue en estos espacios garantiza que los conjuntos sean compatibles con la estructura de medida estándar, sin conjuntos de medida indefinida.
Los juegos infinitos, por su parte, proporcionan un enfoque siempre dinámico y flexible para analizar la estructura de los conjuntos en términos de estrategias y determinación.
En conclusión, la interacción entre los espacios polacos y los juegos infinitos da lugar a un ámbito unificador para el estudio de conjuntos de reales (sucesiones de naturales), mostrando que la regularidad es consecuencia de principios topológicos y combinatorios. Esta perspectiva no solo fortalece a la teoría de conjuntos en general, sino que conecta a la teoría de juegos, la teoría de la medida y la lógica matemática en un marco coherente que explica la regularidad intrínseca de los conjuntos bajo supuestos adecuados.

Capítulo 2

Determinación

Anteriormente establecimos una clara relación entre la determinación de ciertos juegos, los cuales se pueden codificar como de Gale-Stewart, y ciertas propiedades de regularidad, esenciales para la comprensión estructural y descripción de conjuntos de números reales, vinculando directamente a la teoría de conjuntos con la topología, el análisis y demás áreas. Por un lado es bien sabido que bajo el axioma de elección existen conjuntos patológicos, donde tales propiedades no se cumplen, por ejemplo, los conjuntos de Bernstein y Vitali, por otro lado también se sabe que es consistente con ZF que tales patologías se resuelvan. En virtud de lo cual es plausible formular un axioma, ligado a la noción de determinación, opuesto a elección, cuya principal motivación radique en extinguir tales comportamientos, con el objetivo de explorar a profundidad sus consecuencias. De esta forma introduciremos, en el contexto de ZF

Axioma de determinación (AD)[9]
Todo juego de Gale Stewart está determinado. ⌟

Este principio fue propuesto por los matemáticos Jan Mycielski y Hugo Steinhaus en 1962, dentro de su trabajo titulado “A mathematical axiom contradicting the axiom of choice”, revelando de inmediato su contraste con la teoría de Zermelo-Fraenkel con elección (ZFC) y reflejando los intereses de la teoría descriptiva de conjuntos desde mediados del siglo XX: explorar la estructura de los conjuntos de números reales, ligándolos a juegos infinitos y a la resolución de las patologías de elección. A pesar de su incompatibilidad con elección, la cual yace al centro de su propósito, determinación recuperará ciertos aspectos de esta, proporcionando de este modo un marco con un alto grado de estructura y regularidad, que permite recuperar algunos beneficios de elección, sin sus consecuencias problemáticas, siendo así una herramienta poderosa en el estudio de conjuntos definibles y juegos infinitos.

A partir de ahora nuestra teoría ambiente será Zermelo-Fraenkel con determinación (ZFD). Sin más preámbulo, mostremos sus primeros resultados, un tour de force de este axioma.

Teorema (Mycielski-Świerczkowski[10], Scott)**:** $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$
Toda familia contable de subconjuntos no vacíos de ω^ω tiene una función de elección.

Demostración: Sea $\mathcal{F} = \{X_n \in \mathcal{P}(\omega^\omega)\backslash\{\varnothing\} \mid n < \omega\}$ una de estas familias. Definiendo

$$W := \{(n_0, n_1, n_2, n_3, \cdots) \mid (n_{2i+1})_{i<\omega} \notin X_{n_0}\},$$

$\mathcal{GS}(W)$ es tal que, si J1 juega $(n_{2i}|i < \omega)$ y J2 $(n_{2i+1}|i < \omega)$, J2 gana si $(n_{2i+1}|i < \omega) \in X_{n_0}$. J1 no tiene estrategia en $\mathcal{GS}(W)$, pues habiendo jugado n_0 en su primer movimiento, J2 puede jugar $(n_{2i+1}|i < \omega) \in X_{n_0} \neq \varnothing$; de este modo, J2 tiene una estrategia ganadora τ, la cual define una función de elección, $f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$, $f(X_n) := ((n, 0, 0, 0, \cdots) * \tau)_{2i})_{i<\omega}$, la jugada de J2 contra $(n, 0, 0, \cdots)$. $\square$

Corolario: ω_1 es regular $(\beta \subseteq \omega_1 \wedge |\beta| < \omega_1 \implies \sup \beta < \omega_1)$.

Demostración: Sea $\{\alpha_i \mid i < \omega\} \subseteq \omega_1$. Definimos para toda $i < \omega$

$$X_i := \{R \subseteq \omega \times \omega \mid \mathrm{ord}(R) = \alpha_i\},$$

ya que $\alpha_i < \omega_1$, donde ω_1 es el primer ordinal no numerable, α_i es numerable, así $X_i \neq \varnothing$. De este modo al definir

$$\mathcal{F} := \{X_i \in \wp(\wp(\omega \times \omega))\backslash\{\varnothing\} \mid i < \omega\},$$

y por la correspondencia $\wp(\omega \times \omega) \approx \omega^\omega$, invocamos $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$ para seleccionar $R_i \in X_i$. Como $\mathrm{ord}(R_i) = \alpha_i$, el isomorfismo de orden entre α_i y R_i da una biyección $f_i : \alpha_i \hookrightarrow \omega$. Entonces definiremos

$$n : \bigcup_{i<\omega} \alpha_i \to \omega \qquad\qquad u : \bigcup_{i<\omega} \alpha_i \hookrightarrow \omega \times \omega$$
$$a \mapsto \min\{i < \omega \mid a \in \alpha_i\}. \qquad\qquad a \mapsto (n(a), f_{n(a)}(a)).$$

u hereda la inyectividad de f_i, y al ser $\omega \times \omega$ numerable hay una inyección $m : \omega \times \omega \hookrightarrow \omega$, de modo que $m \circ u : \bigcup_{i<\omega} \alpha_i \hookrightarrow \omega$ es inyectiva, $\bigcup_{i<\omega} \alpha_i$ es numerable y $\sup_{i<\omega} \alpha_i = \bigcup_{i<\omega} \alpha_i < \omega_1$. $\square$

Corolario: Sea $W \subseteq \omega^\omega$, al definir

$$C_W := \bigcup\{C(t) \mid t \in \omega^{<\omega} \wedge C(t)\backslash W \text{ es magro}\},$$

tenemos que si $\mathcal{BM}(W\backslash C_W)$ es determinado, entonces W tiene la propiedad de Baire.

Demostración: Supongamos que J1 tiene una estrategia ganadora en $\mathcal{BM}(W\backslash C_W)$, luego, $C(t)\backslash(W\backslash C_W)$ es magro para algún $t \in \omega^{<\omega}$, por contención $C(t)\backslash W$ también es magro, consecuentemente $C_W \supseteq C(t)$ y $C(t)\backslash(W\backslash C_W) = C(t)$ es un abierto no vacío magro.#c Entonces, J2 tiene una estrategia ganadora en $\mathcal{BM}(W\backslash C_W)$ y $W\backslash C_W$ es magro. Además, $C_W\backslash W$ es magro, por definición y regularidad de ω_1. Así W tiene la propiedad de Baire.$\square$

Corolario (Banach-Mazur[6]; Davis[7]; Mycielski-Świerczkowski[10])**:**
Todo $W \subseteq \omega^\omega$ posee las propiedades de Baire, del conjunto perfecto y de Lebesgue. $\square$

Definición: Sea $W \subseteq \wp(\omega)$, definimos su **juego del ultrafiltro** asociado, $\mathcal{U}f(W)$, como el juego de longitud ω con información perfecta de dos jugadores alternados, donde:

1. J1 juega un subconjunto finito de ω, $s_0 \in [\omega]^{<\omega}$.
2. J2 ve la jugada anterior y juega un subconjunto finito de ω, $s_1 \in [\omega]^{<\omega}$.
3. Continuamos este proceso inductivamente alternando a los jugadores en cada turno.

Al "acabar" el juego, los jugadores habrán formado la sucesión $\mathbf{s} := (s_i | i < \omega) \in ([\omega]^{<\omega})^\omega$, sea $E := \{j < \omega | s_j \cap \bigcup_{k<j} s_k \neq \varnothing\}$, J1 gana si $(\min E \equiv 1 \text{mód} 2) \vee (E = \varnothing \wedge \bigcup_{i<\omega} s_{2i} \in W)$, concretamente, el primer jugador en hacer un movimiento no disjunto a los previos pierde, si no pasara, J1 gana si $\bigcup_{i<\omega} s_{2i} \in W$ y J2 gana en caso contrario, es decir, si $\bigcup_{i<\omega} s_{2i} \notin W$.⌟

Teorema: No existen ultrafiltros no principales sobre ω.

Demostración: Sea U un ultrafiltro no principal sobre ω. Por AD, $\mathcal{U}f(U)$ es determinado:

I) Si J1 tiene una estrategia ganadora σ, definiremos una estrategia τ_σ para J2 como

$$\tau_\sigma(s_0, \cdots, s_{2i}) := \sigma(s_1, \cdots, s_{2i}) \backslash s_0.$$

J2 ignora s_0 y juega de acuerdo con σ, eliminando s_0 para mantener la disyunción. Así para cualquier jugada de movimientos disjuntos $(s_0, s_1, s_2, \cdots)$ siguiendo τ_σ, tenemos que $s_0 \cup \bigcup_{i<\omega} s_{2i+1} \in U$, al ser σ ganadora para J1. Por ende $\bigcup_{i<\omega} s_{2i+1} \in U$, pues, al ser U no principal, es cerrado bajo cambios finitos. Entonces $\bigcup_{i<\omega} s_{2i} \notin U$, de lo contrario $\varnothing = \bigcup_{i<\omega} s_{2i} \cap \bigcup_{i<\omega} s_{2i+1} \in U$, por tanto τ_σ es ganadora para J2.#c

II) Si J2 tiene una estrategia ganadora τ, la convertiremos en otra estrategia τ' para J2

$$\tau'(s_0, \cdots, s_{2i}) := \tau(s_0, \cdots, s_{2i}) \cup \Big(\{i\} \backslash \bigcup_{j \leqslant 2i} s_j\Big).$$

Además, para cualquier jugada de movimientos disjuntos $(s_0, s_1, s_2, \cdots)$ siguiendo τ', J2 gana, y al ser U ultrafiltro, $\bigcup_{i<\omega} s_{2i+1} = \bigcup_{i<\omega} s_i \backslash \bigcup_{i<\omega} s_{2i} = \omega \backslash \bigcup_{i<\omega} s_{2i} \in U$. Definiremos una estrategia $\sigma_{\tau'}$ para J1, jugando τ' con un primer movimiento vacío

$$\sigma_{\tau'}(s_0, \ldots, s_{2i-1}) := \tau'(\varnothing, s_0, \ldots, s_{2i-1}).$$

Similarmente a I), $\sigma_{\tau'}$ es ganadora para J1 pues al seguirla, $\bigcup_{i<\omega} s_{2i} \in U$.#c □

Corolario: Todo ultrafiltro es ω_1-completo.

Demostración: Supongamos que W es un ultrafiltro no ω_1-completo sobre un conjunto X, así $\exists \{A_i \mid i < \omega\} \subseteq W$ tal que $\bigcap_{i<\omega} A_i \notin W$, por lo que $\bigcup_{i<\omega}(X \backslash A_i) = X \backslash \bigcap_{i<\omega} A_i \in W$. Consideremos la función $f : \bigcup_{i<\omega}(X \backslash A_i) \to \omega$, dada por $f(x) := \min\{i < \omega | x \in X \backslash A_i\}$, para entonces definir su ultrafiltro imagen sobre ω, $f_*(W) := \{Y \subseteq \omega \mid f^{-1}(Y) \in W\}$. Supongamos que $f_*(W)$ es principal, entonces $\exists i < \omega$ tal que $f_*(W) = \{C \subseteq \omega \mid i \in C\}$, implicando que $f^{-1}(\{i\}) \in W$, pero, por construcción $f^{-1}(\{i\}) = (X \backslash A_i) \backslash \bigcup_{j<i}(X \backslash A_k)$, luego, por cerradura hacia arriba, $X \backslash A_i \in W$, concluyendo que $A_i = X \backslash (X \backslash A_i) \notin W$.#c Por ende, existiría un ultrafiltro no principal sobre ω, contradiciendo el teorema previo. □

Definición: Sea κ un cardinal no numerable, diremos que este es un **cardinal medible** si existe una medida $\mu : \wp(\kappa) \to \{0,1\}$ κ-aditiva y no trivial, o de forma intercambiable, si existe un ultrafiltro no principal κ-completo sobre κ.

Definición: Sea $W \subseteq \omega_1$, definimos su **juego ordinal de Solovay**[11], denotado $\mathcal{S}_{\mathrm{Ord}}(W)$, como el juego de longitud ω con información perfecta de dos jugadores alternados, donde:

1. J1 juega un elemento de ω_1, $\eta_0 < \omega_1$.

2. J2 ve la jugada anterior y juega un elemento de ω_1, $\eta_1 < \omega_1$.

3. Continuamos este proceso inductivamente alternando a los jugadores en cada turno.

Al "acabar" el juego, los jugadores habrán formado la sucesión $\mathbf{s} := (\eta_0, \eta_1, \cdots) \in (\omega_1)^\omega$, donde J1 gana si $|\mathbf{s}|_\infty := \sup_{i<\omega} \eta_i \in W$ y J2 gana en caso contrario, es decir, si $|\mathbf{s}|_\infty \notin W$.⌟

Teorema (Solovay[11])**:** Bajo determinación del juego ordinal de Solovay, ω_1 es medible.

Demostración: En particular mostraremos que el filtro club en ω_1, C_{ω_1}, es un ultrafiltro. Sea $W \subseteq \omega_1$. Por determinación de $\mathcal{S}_{\mathrm{Ord}}(W)$:

I) Sea σ una estrategia ganadora para J1, al ser ω_1 regular, definimos para $\eta < \omega_1$

$$\alpha(\eta) : = \text{mín}\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \forall p \in \eta^{<\omega} \ (\sigma * p < \beta)\} < \omega_1.$$

Esta función es continua, en el espacio topológico de ω_1 con la topología del orden. De forma que $C := \{\gamma < \omega_1 \mid \gamma \text{ límite infinito} \wedge \forall \eta < \gamma \ (\alpha(\eta) < \gamma)\}$ es club en ω_1. Sean $\gamma \in C$ y $\{\eta_i \mid i < \omega\} \subseteq \gamma$ no acotado en γ, luego $\forall j < \omega \ ((\sigma * (\eta_i | i < \omega))_j < \gamma)$, por consiguiente $\gamma = |\sigma * (\eta_i | i < \omega)|_\infty \in W$, esto último pues σ es ganadora para J1. Por lo que $C \subseteq W$, consecuentemente $W \in C_{\omega_1}$.

II) Sea τ una estrategia ganadora para J2, por un razonamiento análogo, $\omega_1 \backslash W \in C_{\omega_1}$.

Entonces C_{ω_1}, además de no principal, es un ultrafiltro y por lo tanto es ω_1 completo. □

Notemos que en esta prueba, requerimos de la determinación del juego ordinal de Solovay. De esto, surge una dificultad, dicho juego se formula en términos de movimientos en ω_1, lo que impide aplicar directamente el axioma de determinación para justificar tal resultado. La idea de Solovay era simular este juego mediante otro al que se le pueda aplicar AD, permitiendo así establecer su determinación de manera indirecta.

Si bien ya hemos llevado a cabo la traducción de un juego a otro, de Gale-Stewart, únicamente hemos logrado este procedimiento mediante un argumento de numerabilidad, en caso que el espacio de movimientos del primer juego (bits, tuplas, subconjuntos finitos) es numerable, podemos codificar cada movimiento mediante un natural, en consecuencia, hay un juego de Gale-Stewart que lo simula. Es obvio que tal argumento fallará en $\mathcal{S}_{\mathrm{Ord}}$, dado que ω_1 es, por definición, el primer cardinal no numerable.
No obstante, $\mathcal{S}_{\mathrm{Ord}}$ es simulable al lidiar con el espacio de partidas (sucesiones de naturales), mediante otro argumento de numerabilidad, logrando cierto procedimiento análogo.
Con este fin, definiremos

Definición: Diremos que $W \subseteq \omega^\omega$ es Σ^1_1/**analítico**[12], si $\exists B \subseteq \omega^\omega \times \omega^\omega$ Borel tal que

$$W = \{\mathbf{s} \in \omega^\omega \mid \exists r \in \omega^\omega((\mathbf{s}, r) \in B)\}.$$

W es Π^1_1/**coanalítico** si $\omega^\omega \backslash W$ es Σ^1_1, es decir, si $\exists B \subseteq \omega^\omega \times \omega^\omega$ Borel tal que

$$W = \{\mathbf{s} \in \omega^\omega \mid \forall r \in \omega^\omega((\mathbf{s}, r) \notin B)\}.$$

W es Δ^1_1/**Borel**, conforme a esta terminología, si y sólo si es Σ^1_1 y Π^1_1. ⌟

Definición: Sea $\mathbf{s} \in \omega^\omega$, este real codifica una relación dada por[2]

$$\leqslant_{\mathbf{s}} := \{(m, n) < \omega \times \omega \mid \mathbf{s}(2^m(2n+1) - 1) = 0\}.$$

Nos interesa el caso en que $\leqslant_{\mathbf{s}}$ sea buen orden, entonces definiremos el conjunto Π^1_1[2][13]

$$\mathsf{WO} := \left\{ s \in \omega^\omega \;\middle|\; \begin{array}{lrlcl} & \forall n < \omega & n \leqslant_{\mathbf{s}} n & & \\ & \forall m, n < \omega & (m \leqslant_{\mathbf{s}} n \wedge n \leqslant_{\mathbf{s}} m & \implies & m = n) \\ & \forall l, m, n < \omega & (l \leqslant_{\mathbf{s}} m \wedge m \leqslant_{\mathbf{s}} n & \implies & l \leqslant_{\mathbf{s}} n) \\ & \forall m, n < \omega & m \leqslant_{\mathbf{s}} n \vee n \leqslant_{\mathbf{s}} m & & \\ \forall r \in \omega^\omega & \exists n < \omega & r(n+1) \nleqslant_{\mathbf{s}} r(n) & & \end{array} \right\}.$$

Denotando para $\mathbf{s} \in \mathsf{WO}$, $\|\mathbf{s}\| := \mathrm{ord}(\leqslant_{\mathbf{s}})$, expresaremos para $\alpha < \omega_1$ el conjunto Δ^1_1

$$\begin{aligned} \mathsf{WO}_\alpha := & \{\mathbf{s} \in \mathsf{WO} \mid \|\mathbf{s}\| < \alpha\} \\ = & \{\mathbf{s} \in \mathsf{WO} \mid \exists \beta < \alpha\ \exists f : \omega \to \beta\ \forall m, n < \omega\ (m <_{\mathbf{s}} n \implies f(m) < f(n))\}. \end{aligned}$$ ⌟

El siguiente resultado se enuncia sin demostración. Una demostración puede leerse en [13].

Lema (Luzin-Sierpiński[14])**:** Si $W \subseteq \mathsf{WO}$ es Σ^1_1, entonces $\sup\{\|\mathbf{s}\| \mid \mathbf{s} \in W\} < \omega_1$.

Definición: Sea $W \subseteq \omega_1$, definimos su **juego de Solovay**[11] asociado, denotado $\mathcal{S}(W)$, como el juego de longitud ω con información perfecta de dos jugadores alternados, donde:

1. J1 juega un elemento de ω, $n_0 < \omega$.
2. J2 ve la jugada anterior y juega un elemento de ω, $n_1 < \omega$.
3. Continuamos este proceso inductivamente alternando a los jugadores en cada turno.

Al "acabar" el juego, los jugadores habrán formado la sucesión $\mathbf{s} := (n_0, n_1, \cdots) \in \omega^\omega$, puesto que $\omega^\omega \approx (\omega^\omega)^\omega$, este real, $\mathbf{s} \in \omega^\omega$, codifica una sucesión de reales $(\mathbf{s}^i | i < \omega) \in (\omega^\omega)^\omega$, sea $E := \{j < \omega | \mathbf{s}^j \notin \mathsf{WO}\}$, J1 gana si $(\min E \equiv 1 \mod 2) \vee (E = \varnothing \wedge \sup_{i<\omega} \|\mathbf{s}^i\| \in W)$, concretamente, el primer jugador en hacer un movimiento no "bien ordenado" pierde, si no, J1 gana si $\sup_{i<\omega} \|\mathbf{s}^i\| \in W$ y J2 gana en caso contrario, es decir, si $\sup_{i<\omega} \|\mathbf{s}^i\| \notin W$.⌟
$\mathcal{S}(W)$ puede interpretarse como $\mathcal{GS}(B)$ para algún $B \subseteq \omega^\omega$, por lo que está determinado.

Teorema (Solovay[11])**:** ω_1 es medible.

Demostración: En particular mostraremos que el filtro club en ω_1, C_{ω_1}, es un ultrafiltro. Sea $W \subseteq \omega_1$. Por AD, $\mathcal{S}(W)$ es determinado:

I) Sea σ una estrategia ganadora para J1, definimos para $\eta < \omega_1$

$$W_\eta := \{\mathbf{s} \in \omega^\omega \mid \exists r \in \omega^\omega \ \exists i < \omega \ (\{r^j | j < i\} \subseteq \mathsf{WO}_\eta \wedge \mathbf{s} = (\sigma * r)^{2i})\}.$$

Por consiguiente, $W_\eta \subseteq \mathsf{WO}$, esto pues σ es ganadora para J1, aún más, W_η es Σ^1_1, al definirse en términos del tipo de orden η, entonces por el lema de Luzin-Sierpiński, $\exists \beta < \omega_1$ tal que $W_\eta \subseteq \mathsf{WO}_\beta$, de forma que definimos para $\eta < \omega_1$

$$\alpha(\eta) := \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \forall r \in \omega^\omega \ \forall i < \omega \ (\{r^j | j < i\} \subseteq \mathsf{WO}_\eta \implies (\sigma * r)^{2i} \in \mathsf{WO}_\beta)\}.$$

Esta función es continua, en el espacio topológico de ω_1 con la topología del orden. De forma que $C := \{\gamma < \omega_1 | \gamma \text{ límite infinito} \wedge \forall \eta < \gamma \ (\alpha(\eta) < \gamma)\}$ es club en ω_1. Sean $\gamma \in C$ y $r \in \omega^\omega$ ($\{\|r^i\| | i < \omega\} \subseteq \gamma$ no acotado en γ), $\forall j < \omega$ ($\|(\sigma * r)^j\| < \gamma$), por consiguiente $\gamma = \sup_{j<\omega} \|(\sigma * r)^j\| \in W$, esto último pues σ es ganadora para J1. Por lo que $C \subseteq W$, consecuentemente $W \in C_{\omega_1}$.

II) Sea τ una estrategia ganadora para J2, por un razonamiento análogo, $\omega_1 \backslash W \in C_{\omega_1}$.

Entonces C_{ω_1}, además de no principal, es un ultrafiltro y por lo tanto es ω_1 completo. □

Una prueba alterna de este teorema es singularmente relevante en teoría de la recursión, al abordar aspectos cruciales de esta, como la descriptibilidad y la recursividad de Turing, que junto a determinación, garantizan la existencia de estrategias, que por definibilidad, restringen la complejidad de los reales y permiten construir medidas σ-aditivas en ω_1. De este modo, la prueba muestra que, bajo AD, ω_1 no es simplemente un cardinal límite, sino que adquiere propiedades medibles profundas.

Definición: Sean $\mathbf{s}, r \in \omega^\omega$, diremos que $\mathbf{s}$ es **Turing-reducible a/recursivo en** r[2][15], denotado $\mathbf{s} \leqslant_T r$, si hay un algoritmo que computa a $\mathbf{s}$ requiriendo de r como oráculo. Desarrollando esto, $\mathbf{s}$ y r son **Turing-equivalentes**, denotado $\mathbf{s} \approx_T r$, si $\mathbf{s} \leqslant_T r$ y $r \leqslant_T \mathbf{s}$. Como su nombre lo indica, la Turing-equivalencia es una relación de equivalencia en ω^ω. De este modo llamaremos **grados de Turing**, denotados $[\mathbf{s}]_T$, a sus clases de equivalencia. Como progresión natural, definiremos el **conjunto de grados**, $D_T := \{[\mathbf{s}]_T \mid \mathbf{s} \in \omega^\omega\}$, lo ordenaremos inducidamente por $\leqslant_T$, $d_0 \leqslant d_1$ si $\exists \mathbf{s}, r \in \omega^\omega : d_0 = [\mathbf{s}]_T, d_1 = [r]_T, \mathbf{s} \leqslant_T r$, y lo dotaremos del filtro generado por los **conos**

$$M_T := \{X \subseteq D_T \mid \exists d_0 \in D_T \ (C(d_0) \subseteq X)\}, \qquad C(d_0) := \{d \in D_T \mid d_0 \leqslant d\}. \lrcorner$$

A fin de evidenciar las ideas detrás de ambas pruebas, las redactaremos casi idénticamente.

Teorema (Martin[16])**:** ω_1 es medible, esto es, tiene un ultrafiltro no principal ω_1-completo.

Demostración: En particular mostraremos que el filtro M_T, induce tal ultrafiltro en ω_1. Sea $X \subseteq D_T$. Por AD, $\mathcal{GS}\left(\bigcup X\right)$ es determinado:

I) Sea σ una estrategia ganadora para J1, al considerar σ como un elemento de ω^ω (mediante una codificación recursiva de $\omega^{<\omega}$, $(\omega^{<\omega})^\omega \approx \omega^\omega$), definimos $d_0 := [\sigma]_T$. Sea $d \in C(d_0)$, para todo $r \in d$, por un argumento de complejidad computacional, se tiene que $\sigma * r \in d$, por consiguiente $d \in X$, esto último pues σ es ganadora para J1. Por lo que $C(d_0) \subseteq X$, consecuentemente $X \in M_T$.

II) Sea τ una estrategia ganadora para J2, por un razonamiento análogo, $D_T \backslash X \in M_T$.

Entonces M_T es un ultrafiltro y por lo tanto es ω_1-completo. Induciremos un ultrafiltro. Sean $\mathbf{s}, r \in \omega^\omega$ tales que $\mathbf{s} \approx_T r$, por un argumento de constructibilidad, $\omega_1^{L[\mathbf{s}]} = \omega_1^{L[r]}$, es un ordinal numerable. Por ello, la función que daremos a continuación está bien definida.

$$\begin{aligned} f : D_T &\to \omega_1 \\ [\mathbf{s}]_T &\mapsto \omega_1^{L[\mathbf{s}]}. \end{aligned}$$

Utilizando el hecho que M_T es un ultrafiltro, se tiene que

$$f_*(M_T) := \{Y \subseteq \omega_1 \mid f^{-1}(Y) \in M_T\},$$

es un ultrafiltro ω_1-completo sobre ω_1. Para verificar que este ultrafiltro es no principal, basta notar que para todo $\eta < \omega_1$ y $\mathbf{s} \in \omega^\omega$, existe $r \in \omega^\omega$ con $\mathbf{s} \leqslant_T r$ tal que $\eta < \omega_1^{L[r]}$, de modo que $f^{-1}(\{\eta\}) \notin M_T$. $\square$

Ahondando en las nociones de descriptibilidad y Turing-reducibilidad bajo determinación, se obtienen aún más resultados fundamentales sobre la estructura de grandes cardinales, cuyas pruebas, si bien similares, tratan con ideas de inaccesibilidad e indiscernibilidad, que escapan al objetivo de este texto, aún así vale la pena destacarlos.

Teorema (Solovay)**:** ω_2 es medible.

Proporciona la existencia de una medida no trivial en este cardinal.

Teorema (Martin)**:** $u_\omega = \omega_\omega$, el ω-ésimo indiscernible es el ω-ésimo cardinal infinito.

Conecta a las teorías de conjuntos y modelos a través de estructuras de indiscernibilidad.

Teorema: $\mathrm{cf}(\omega_n) = \omega_2$, para $2 \leqslant n < \omega$.

Refleja la influencia de ω_2 en la jerarquía de los ordinales. La importancia de estos tres teoremas radica en que reflejan la profunda interacción entre la teoría de conjuntos, la teoría de grandes cardinales y la teoría descriptiva de conjuntos, evidenciada como consecuencia directa del axioma de determinación.
El axioma de determinación (AD) transforma radicalmente la teoría de los números reales al imponer fuertes propiedades de regularidad en los subconjuntos de $\mathbb{R}$. Bajo este axioma, todo subconjunto de $\mathbb{R}$ posee la propiedad de Baire, del conjunto perfecto y es medible, lo que excluye la existencia de conjuntos patológicos como los no medibles de Vitali. Esto genera una teoría de los reales sustancialmente más coherente y estructurada, en la cual, cada conjunto es altamente regular y obedece principios fuertes de clasificación.
Aún más, determinación tiene profundas implicaciones en la teoría de grandes cardinales. En este marco, ω_1 se vuelve un cardinal medible, lo que introduce una medida sobre él. La existencia de tal medida en ω_1 refleja la titánica influencia de los grandes cardinales en modelos de la teoría de conjuntos donde se satisfaga el axioma de determinación, constatando que la estructura de los ordinales bajo determinación es rica en mayor medida de lo que sugiere la teoría estándar de ZFC.
Simultáneamente, AD reorienta la teoría descriptiva al usar argumentos de complejidad. La jerarquía proyectiva adquiere un papel central en la clasificación de conjuntos de reales, estableciendo conexiones con la reducibilidad de Turing y la teoría de juegos infinitos. Estas herramientas analizan la complejidad intrínseca de forma precisa y estructurada, fortaleciendo la interacción entre la computabilidad, la lógica y la teoría de conjuntos. En conclusión, el axioma de determinación da lugar a una gran teoría unificada en la que los números reales, los grandes cardinales y la complejidad descriptiva forman un sistema profundamente interconectado.

Capítulo 3

Combinatoria

Habiendo explorado parte de la teoría de Zermelo-Fraenkel con determinación (ZFD), cabe destacar cierto trasfondo combinatorio, ejemplificado por la medibilidad de ω_1 y ω_2, así a lo largo de este capítulo profundizaremos en esta linea de investigación bajo ZFD. Al ser costumbre el empleo de la notación húngara en literatura de combinatoria infinita, este texto no será la excepción.

Definición: Sean λ, κ, ι y θ cardinales, denotaremos por $\lambda \to (\kappa)^{\iota}_{\theta}$, al enunciado[2][17] "para toda coloración de $[\lambda]^{\iota}$ en θ colores, existe un monocromático de cardinalidad κ", es decir

$$(\forall c : [\lambda]^{\iota} \to \theta)\ (\exists M \subseteq \lambda)\ (|c[[M]^{\iota}]| = 1 \wedge |M| = \kappa).$$ ⌟

A fin de reforzar la noción que AD provee fuertes resultados combinatorios tipo Ramsey, asegurando la existencia de patrones regulares en contextos infinitos, tenemos lo siguiente

Teorema: Sea κ un cardinal medible, entonces $\kappa \to (\kappa)^{\iota}_{\theta}$, para $\iota < \omega$ y $\theta < \kappa$.

Teorema (Martin[2])**:** $\omega_1 \to (\omega_1)^{\omega_1}_{2}$, por ende, $\omega_1 \to (\omega_1)^{\omega_1}_{2^{\omega}}$ y $\omega_1 \to (\omega_1)^{\omega_1}_{\theta}$, para $\theta < \omega_1$.

Conectando así al axioma de determinación con la combinatoria infinita, específicamente, con la teoría de Ramsey, pues esto deriva en principios fuertes de invarianza y partición. Particularmente nos interesan dos tipos de problemas combinatorios, los de tipo Hindman:

Definición: Sea $(G, +)$ un semigrupo cancelativo conmutativo y sean κ y θ cardinales, denotaremos por $G \to (\kappa)^{\mathrm{FS}}_{\theta}$ al enunciado[18] "para toda coloración de G en θ colores, existe $M \subseteq G$, $|M| = \kappa$, tal que $\mathrm{FS}(M) := \{\sum_{m \in F} m | F \in [M]^{<\omega} \backslash \{\varnothing\}\}$ es monocromático".⌟

Y los de tipo Owings:

Definición: Sea $(G, +)$ un semigrupo conmutativo y sean κ y θ cardinales, entonces, denotaremos por $G \to (\kappa)^{\cdot + \cdot}_{\theta}$ al enunciado[19] "para toda coloración de G en θ colores, existe $M \subseteq G$, $|M| = \kappa$, tal que $M + M := \{m + n | m, n \in M\}$ es monocromático". ⌟

Para lidiar con este tipo de problemas combinatorios, conviene conglomerarlos por casos.

κ infinito numerable θ finito

Para la obtención de un resultado clásico de Hindman[20], es conveniente tratar la siguiente

Definición: Siguiendo notación de combinatoria infinita, denotaremos por $\mathbb{N} := \omega\backslash\{0\}$. ⌟

Definición: Sea $D \subseteq [\omega]^{<\omega}\backslash\{\varnothing\}$, definiremos $\mathrm{FU}(D) := \{\bigcup_{d\in F} d \mid F \in [D]^{<\omega}\backslash\{\varnothing\}\}$[21], el conjunto de todas las uniones finitas de elementos de D (excluyendo a la unión vacía). Diremos que D es una **familia disjunta** si es infinita y sus elementos son disjuntos a pares, en tal caso diremos que $C \subseteq [\omega]^{<\omega}\backslash\{\varnothing\}$ es D-**grande** si toda familia disjunta $E \subseteq \mathrm{FU}(D)$ cumple que $C \cap \mathrm{FU}(E) \neq \varnothing$. ⌟

Y tener en cuenta los siguientes resultados previos

Lema: Sean $A, B, C, D \subseteq [\omega]^{<\omega}\backslash\{\varnothing\}$ tales que D es una familia disjunta, C es D-grande y $C = B \cup A$, entonces hay una familia disjunta $E \subseteq \mathrm{FU}(D)$ tal que A o B son E-grandes.

Demostración: Procederemos por contradicción, supongamos que este enunciado es falso. Como A no es D-grande, hay una familia disjunta $F \subseteq \mathrm{FU}(D)$ tal que $A \cap \mathrm{FU}(F) = \varnothing$, como B no es F-grande, hay una familia disjunta $G \subseteq \mathrm{FU}(F)$ tal que $B \cap \mathrm{FU}(G) = \varnothing$, luego C no es D-grande, debido a que $C \cap \mathrm{FU}(G) = A \cap \mathrm{FU}(G) \subseteq A \cap \mathrm{FU}(F) = \varnothing$.#c □

Corolario: Sean $C, D \subseteq [\omega]^{<\omega}\backslash\{\varnothing\}$ tales que D es una familia disjunta y C es D-grande, entonces $\forall n < \omega$ ($\{c \in C \mid \min(c) > n\}$ es D-grande).

Lema: Sean $C, D \subseteq [\omega]^{<\omega}\backslash\{\varnothing\}$ tales que D es una familia disjunta y C es D-grande, hay un $F \subseteq \mathrm{FU}(D)$ finito tal que $\forall d \in \mathrm{FU}(D)(d \cap \bigcup F = \varnothing \Rightarrow \exists f \in \mathrm{FU}(F)(f \cup d \in C))$.

Demostración: Nuevamente procederemos por contradicción, asumiendo este lema es falso. Al ser D numerable es bien ordenable, definamos $d_0 := \min D$, entonces $\{d_0\} \subseteq \mathrm{FU}(D)$, por la negación del lema $\exists d_1 \in \mathrm{FU}(D)$ tal que $d_1 \cap \bigcup\{d_0\} = \varnothing$ y $\forall e \in \mathrm{FU}(\{d_0\})(e \cup d_1 \notin C)$, iterando, $\exists d_n \in \mathrm{FU}(D)$ tal que $d_n \cap \bigcup\{d_i | i < n\} = \varnothing$ y $\forall e \in \mathrm{FU}(\{d_i | i < n\})(e \cup d_n \notin C)$. Así hay una familia disjunta $E := \{d_{2n} \cup d_{2n+1} | n < \omega\} \subseteq \mathrm{FU}(D)$ tal que $C \cap \mathrm{FU}(E) = \varnothing$, luego C no es D-grande.#c □

Lema: Sean $C, D \subseteq [\omega]^{<\omega}\backslash\{\varnothing\}$ tales que D es una familia disjunta y C es D-grande, hay una familia disjunta $E \subseteq \mathrm{FU}(D)$ tal que $\exists d \in \mathrm{FU}(D)$ ($\{c \in C | c \cup d \in C\}$ es E-grande).

Demostración: Sea $F \subseteq \mathrm{FU}(D)$ como en el lema anterior, definamos para todo $f \in \mathrm{FU}(F)$

$$C_f := \{c \in C \mid c \cup f \in C\}.$$

Ahora consideremos una familia disjunta $G \subseteq \mathrm{FU}(D)$ tal que $\forall g \in \mathrm{FU}(G)(g \cap \bigcup F = \varnothing)$, notemos que $C \cap \mathrm{FU}(G)$ es G-grande, así, por el lema previo, $C \cap \mathrm{FU}(G) \subseteq \bigcup_{f\in\mathrm{FU}(F)} C_f$. Aplicando el primer lema de forma repetida, hay una familia disjunta $E \subseteq \mathrm{FU}(G)$ y $d \in \mathrm{FU}(F)$ tal que C_d es E-grande. □

Lema: Sean $C, D \subseteq [\omega]^{<\omega} \backslash \{\varnothing\}$ tales que D es una familia disjunta y C es D-grande, entonces hay una familia disjunta $E \subseteq \mathrm{FU}(D)$ tal que $\mathrm{FU}(E) \subseteq C$.

Demostración: Por el lema previo existen $(C_n | n < \omega), (d_n | n < \omega)$ y $(D_n | n < \omega)$ tales que

$$\begin{array}{rr}
C_0 = C, & D_0 = D, \\
 & d_n \in \mathrm{FU}(D_n), \\
C_{n+1} \subseteq C_n, & D_{n+1} \subseteq \mathrm{FU}(D_n), \\
C_n \text{ es } D_n\text{-grande}, & \\
\forall c \in C_{n+1} \ (d_n \cup c \in C_n), & \\
 & \forall m, n < \omega \ (m \neq n \implies d_m \cap d_n = \varnothing).
\end{array}$$

Definamos $F := \{d_n \mid n < \omega\}, c_0 := \mathrm{mín}(C \cap \mathrm{FU}(F))$ y $c_n \in \mathrm{FU}(F)$ disjuntos a pares, dados inductivamente para $n < \omega$ de forma que para $k_n := \mathrm{máx}\{k < \omega \mid d_k \subseteq \bigcup_{1 \leqslant i < n} c_i\}$

$$c_n \in C_{k_n+1}.$$

Lo cual es posible puesto que C_{k_n+1} es D_{k_n+1}-grande y $F \backslash \{d_i | i \leqslant k_n\} \subseteq \mathrm{FU}(D_{k_n+1})$. Sea $E := \{c_n | n < \omega\} \subseteq C$ y $c \in \mathrm{FU}(E)$, así $c = c_{i_1} \cup \cdots \cup c_{i_n} \cup c_r$ donde $i_1 < \cdots < i_n < r$, por la disyunción de los $c_n \in \mathrm{FU}(F)$, $c_{i_1} \cup \cdots \cup c_{i_n} = d_{j_1} \cup \cdots \cup d_{j_m}$ donde $j_1 < \cdots < j_m$, luego $j_m \leqslant k_r$, $c_r \in C_{k_r+1}$, $d_{j_m} \cup c_r \in C_{j_m} \subseteq C_{j_{m-1}+1}$, similarmente $d_{j_{m-1}} \cup d_{j_m} \cup c_r \in C_{j_{m-1}}$, repitiendo este argumento $c = d_{j_1} \cup \cdots \cup d_{j_m} \cup c_r \in C_{j_1} \subseteq C$, por lo que $\mathrm{FU}(E) \subseteq C$. □

Teorema (Baumgartner[21])**:** $(\forall \theta \in \mathbb{N})(\forall c : [\omega]^{<\omega} \backslash \{\varnothing\} \to \theta)$ hay una familia disjunta $D \subseteq [\omega]^{<\omega} \backslash \{\varnothing\}$ tal que $\mathrm{FU}(D)$ es monocromático.

Demostración: Primero consideremos una familia disjunta arbitraria $F \subseteq [\omega]^{<\omega} \backslash \{\varnothing\}$, es inmediato que $[\omega]^{<\omega} \backslash \{\varnothing\} = \bigcup_{i<\theta} c^{-1}[\{i\}]$ es F-grande. Entonces, por el primer lema, hay una familia disjunta $E \subseteq \mathrm{FU}(D)$ tal que $c^{-1}[\{i_0\}]$ es E-grande, para algún $i_0 < \theta$. Por el lema previo, hay una familia disjunta $D \subseteq \mathrm{FU}(E)$ tal que $\mathrm{FU}(D) \subseteq c^{-1}[\{i\}]$. □

Teorema (Hindman[20])**:** $\forall \theta \in \mathbb{N} \ (\mathbb{N} \to (\omega)^{\mathrm{FS}}_{\theta})$.

Demostración: Dado $\theta \in \mathbb{N}$. Sea $c : \mathbb{N} \to \theta$, basta con aplicar Baumgartner a la coloración

$$\begin{array}{rcl}
B_{\mathbb{N}} : [\omega]^{<\omega} \backslash \{\varnothing\} \hookrightarrow \mathbb{N} & \qquad & c \circ B_{\mathbb{N}} : [\omega]^{<\omega} \backslash \{\varnothing\} \to \theta. \\
\{i_1, \cdots, i_n\} \to 2^{i_1} + \cdots + 2^{i_n}. & &
\end{array}$$

Observando que si $r, s \in [\omega]^{<\omega} \backslash \{\varnothing\}$ son disjuntos, entonces $B_{\mathbb{N}}(r \cup s) = B_{\mathbb{N}}(r) + B_{\mathbb{N}}(s)$. □

Definición: Un conjunto W es **Dedekind-infinito**[17] si existe una inyección $f : \omega \hookrightarrow W$.⌟

Teorema: Sea $(G, +)$ un semigrupo cancelativo conmutativo con G Dedekind-infinito, entonces $\forall \theta \in \mathbb{N} \ (G \to (\omega)^{\mathrm{FS}}_{\theta})$.

Demostración: Si $\exists g \in G : o(g) = \infty$. Basta aplicar el resultado de Hindman para $\langle g \rangle \hookrightarrow \mathbb{N}$. De lo contrario, $\forall g \in G : o(g) \in \mathbb{N}$. Al ser G Dedekind infinito, existe $F = \{f_n | n < \omega\} \subseteq G$, entonces elegimos $h_n := \mathrm{mín}(F \backslash \langle \{f_i | i < n\} \rangle)$, luego definimos $H := \langle \{h_n | n < \omega\} \rangle \lhd G$, y así consideramos $B_G : [\omega]^{<\omega} \backslash \{\varnothing\} \hookrightarrow H$ dada por $B_G(\{i_1, \cdots, i_n\}) := h_{i_1} + \cdots + h_{i_n}$. □

En cuanto a los enunciados de tipo Owings, su veracidad en este caso es de mayor variedad, por ejemplo, sigue abierto el problema original planteado por Owings en el año de 1974, $\mathbb{N} \to (\omega)_2^{\cdot + \cdot}$, mientras que es relativamente fácil demostrar el siguiente

Teorema: Hay una 3-coloración de $\mathbb{N}$ sin monocromáticos de la forma $X+X$, con $|X| = \omega$, es decir, $\mathbb{N} \nrightarrow (\omega)_3^{\cdot + \cdot}$.

Demostración: Primero consideremos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \to & \omega \\ n \mapsto & \lfloor 2 \log_2 n \rfloor. \end{aligned}$$

Se sigue de inmediato que para todos $m, n \in \mathbb{N}$ $(f(n) \leqslant f(m+n) \wedge f(2n) = 2 + f(n))$. Sea $X \subseteq \mathbb{N}$ $(|X| = \omega)$, denotemos por $m := \min X$, así al ser X infinito, $\exists n \in X$ $(4m < n)$.

$$\begin{aligned} f(m+n) =& \lfloor 2 \log_2 (m+n) \rfloor \\ \leqslant& \left\lfloor 2 \log_2 \left(\frac{1}{4} n + n \right) \right\rfloor \\ =& \left\lfloor 2 \log_2 \left(\frac{5}{4} n \right) \right\rfloor \\ =& \left\lfloor 2 \log_2 \left(\frac{5}{4} \right) + 2 \log_2 n \right\rfloor \\ \leqslant& \lfloor 1 + 2 \log_2 n \rfloor \\ \leqslant& 1 + \lfloor 2 \log_2 n \rfloor \\ =& 1 + f(n). \end{aligned}$$

De forma que

$$\begin{aligned} f(n) \leqslant& f(m+n) \\ \leqslant& 1 + f(n). \end{aligned}$$

Así, al definir a la 3-coloración

$$\begin{aligned} c : \mathbb{N} \to & 3 \\ n \mapsto & f(n) \mod 3. \end{aligned}$$

Obtenemos que $c(m+n) \neq c(2n)$, por lo tanto $X + X$ no es monocromático bajo c. $\square$

Aún más, Hindman[22] construyó tal 3-coloración, donde uno de los colores es densidad 0. Otra línea reciente de investigación considera otros grupos infinitos, especialmente $(\mathbb{R}, +)$, sin embargo la literatura ([23], [24], [25]) se limita a resultados de consistencia en ZFC o asume que $\mathbb{R}$ es bien ordenable, implicando la existencia de un juego no determinado[8], independientemente, estos resultados son inválidos bajo ZFD.

Por otro lado, Leader y Russell[26] probaron que, si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, cuya dimensión es al menos $\beth_\omega$, entonces $V \to (\omega)^{\cdot+\cdot}_\theta$, para cualquier número natural θ. Justo es en el espíritu de este trabajo de Leader y Russell que presentamos el siguiente

Teorema: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ de dimensión ω_2, $\forall\theta \in \mathbb{N}$ $(V \to (\omega)^{\cdot+\cdot}_\theta)$.

Demostración: Sean $\mathcal{B} = \{b_j | j < \omega_2\}$ una base de V y $c : V \to \theta$, definiendo para $i < \theta+1$

$$\pi_i := (\overbrace{2, \cdots, 2}^{i \text{ veces}}, \overbrace{1, \cdots, 1}^{2(\theta-i)}) \in \{1,2\}^{2\theta-i}, \qquad \Pi := \{\pi_i \mid i < \theta+1\},$$

$$P_i := \left\{ \sum_{k<2\theta-i} (\pi_i)_k b_{j_k} \,\middle|\, j_0 < \cdots < j_{2\theta-i-1} < \omega_2 \right\}.$$

Notemos que $L := \text{máx}_{i<\theta+1} |\pi_i| = \text{máx}_{i<\theta+1}(2\theta - i) = 2\theta$, así

$$\pi_i' := (\overbrace{0, \cdots, 0}^{L-|\pi_i|}) \frown \pi_i \in 3^L, \qquad \Pi' := \{\pi_i' \mid i < \theta+1\}.$$

$$P_i' := \left\{ \sum_{k<L} (\pi_i')_k b_{j_k} \,\middle|\, j_0 < \cdots < j_{L-1} < \omega_2 \right\}.$$

Definimos $\theta + 1$ coloraciones en θ colores como sigue

$$\begin{aligned} c_i : [\omega_2]^L &\to \theta & d : [\omega_2]^L &\to \theta^{\theta+1} \\ S = \{j_0 < \cdots < j_{L-1}\} &\mapsto c\left(\sum_{k<L} (\pi_i')_k b_{j_k}\right). & S &\to (c_i(S))_{i<\theta+1}. \end{aligned}$$

Así por el teorema de tipo Ramsey sobre cardinales medibles aplicado a ω_2, $\omega_2 \to (\omega_2)^L_{\theta^{\theta+1}}$, $\exists M \subseteq \omega_2$ $(|M| = \omega_2 \wedge \exists I_0, \cdots, I_\theta < \theta\ (d[[M]^L] = \{(I_0, \cdots, I_\theta)\}))$, sea $\mathcal{B}' := \{b_j | j \in M\}$, entonces para todo $i < \theta + 1$ y para todo $v \in P_i' \cap \mathcal{L}(\mathcal{B}')$ se verifica la siguiente igualdad

$$c(v) = c\left(\sum_{k<L} (\pi_i')_k b_{j_k}\right) = c_i(\{j_0 < \cdots < j_{L-1} \mid \forall k < L : j_k \in M\}) = I_i < \theta.$$

Por el principio de la pichonera $\exists i_1 < i_2 < \theta+1$ tales que $I_{i_1} = I_{i_2}$, $M := \text{máx}_{j<2}(L-|\pi_{i_j}|)$, enumerando a $\mathcal{B}' = \{b_j' \mid j < \omega_2\}$, definimos para $n < \omega$

$$x_n := \sum_{r<M} 0b_r' + \sum_{r<i_1} b_{M+r}' + \sum_{r<i_2-i_1} b_{\omega(r+1)+n}' + \sum_{r<2(\theta-i_2)} \frac{1}{2} b_{\omega(i_2-i_1+1)+r}', \quad X := \{x_n \mid n < \omega\}.$$

Entonces, para $m, n < \omega$, observamos que $x_m + x_n \in \pi_{i_1} \cup \pi_2$ según si $m \neq n$ o $m = n$. Por tanto, $X + X$ es monocromático, como se quería demostrar. $\square$

Mediante un argumento prácticamente idéntico se establece el siguiente

Teorema: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ de dimensión ω_1, $\forall\theta \in \mathbb{N}$ $(V \to (\omega)^{\cdot+\cdot}_\theta)$.

κ finito $\qquad\qquad\qquad$ θ finito

El segundo objetivo a perseguir es la existencia de un conjunto monocromático finito al lidiar con una cantidad finita de colores. Esto se hará vía un argumento de compacidad, una técnica utilizada principalmente en la lógica matemática y la teoría de modelos. Este establece que si todo subconjunto finito de un conjunto infinito de proposiciones (o fórmulas) es consistente, entonces el conjunto completo también será consistente. Así, esta herramienta extiende propiedades que se verifican localmente al contexto global, siendo clave en el teorema de compacidad para la lógica proposicional.
Aún más, los argumentos de compacidad también pueden utilizarse en dirección opuesta: Demostrando que la validez en el caso infinito excluye el fallo de todos los casos finitos, de forma que podemos obtener afirmaciones finitas a partir de una estructura global.
Cabe señalar que, en términos generales los argumentos de compacidad requieren de AC, al ser consecuencia del teorema de Tychonoff aplicado a espacios compactos de Stone. Sin embargo, en algunas pruebas, puede evitarse su uso si existe un mecanismo canónico para realizar elecciones, especialmente al seleccionar subconjuntos o extender modelos. Lo cual permite adaptar esta técnica a teorías sin elección, como la nuestra (ZF+AD), ampliando su aplicabilidad dentro de teorías constructivas o con elección débil.

Teorema: $(\forall\kappa,\theta\in\mathbb{N})(\exists S\in\mathbb{N})(\forall c:\wp(S)\backslash\{\varnothing\}\to\theta)\exists D=\{d_i|i<\kappa\}\subseteq\wp(S)\backslash\{\varnothing\}$, colección de conjuntos disjuntos a pares, tal que $\mathrm{FU}(D)$ es monocromático.

Demostración: Asumamos lo contrario, así $(\exists\kappa,\theta\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(\exists c_n:\wp(n)\backslash\{\varnothing\}\to\theta)$ tal que no hay colecciones de cardinalidad κ y elementos disjuntos FU-monocromáticas, al ser $[\omega]^{<\omega}$ numerable, sea $\{\$_n|n\in\mathbb{N}\}$ una enumeración de $[\omega]^{<\omega}\backslash\{\varnothing\}$ tal que $\text{máx}\,\$_n<n$, de forma que $\$_n\in\wp(n)\backslash\{\varnothing\}$, por lo tanto $c_m(\$_n)$ está definido para $m,n\in\mathbb{N}$ si $m\geqslant n$, luego definiremos por inducción para $\ell\in\theta$ y $n\in\mathbb{N}$

$$M_0:=\mathbb{N};$$
$$M_n^\ell:=\{m\in M_{n-1}\mid m\geqslant n\wedge c_m(\$_n)=\ell\},\quad \mathcal{L}_n:=\text{mín}\{\ell\in\theta\mid |M_n^\ell|=\omega\},\quad M_n:=M_n^{\mathcal{L}_n}.$$

Por lo que recurriendo al teorema de Baumgartner sobre la coloración

$$\begin{aligned} c:[\omega]^{<\omega}\backslash\{\varnothing\}&\to\theta\\ \$_n&\mapsto\mathcal{L}_n.\end{aligned}$$

Hay una familia disjunta $I=\{\$_{n_i}|i<\omega\}\subseteq[\omega]^{<\omega}\backslash\{\varnothing\}$ tal que $\mathrm{FU}(I)$ es c-monocromático. Entonces consideremos $D:=\{\$_{n_i}|i<\kappa\}$ y

$$F:=\text{mín}\,M_{\text{máx}_{i<\kappa}n_i}.$$

Obteniendo la contradicción que $\mathrm{FU}(D)$ es c_F-monocromático, concluyendo la prueba. $\square$

Teorema (Folkman[27]-Rado[28]-Sanders[29])**:** $(\forall\kappa,\theta\in\mathbb{N})(\exists R\in\mathbb{N})(\forall c:\{1,\cdots,R\}\to\theta)$ $\exists M=\{m_i\mid i<\kappa\}\subseteq\{1,\cdots,R\}$ tal que $\mathrm{FS}(M)\subseteq\{1,\cdots,R\}$ es monocromático.

Demostración: Dados $\kappa,\theta\in\mathbb{N}$, considere $F\in\mathbb{N}$ como en el teorema anterior y $R:=2^F-1$. Sea $c:\{1,\cdots,R\}\to\theta$, entonces por el teorema de uniones finitas sobre la coloración

$$\begin{aligned} B_R:\wp(F)\backslash\{\varnothing\} &\hookrightarrow \{1,\cdots,R\} \\ \{i_1,\cdots,i_n\} &\to 2^{i_1}+\cdots+2^{i_n}. \end{aligned} \qquad c\circ B_R:\wp(F)\backslash\{\varnothing\}\to\theta.$$

$\exists D=\{d_i|i<\kappa\}\subseteq\wp(F)\backslash\{\varnothing\}$ de disjuntos a pares tal que $\mathrm{FU}(D)$ es $c\circ B_R$-monocromático. Así, al ser B_R inyectiva, $M:=B_R[D]=\{B_R(d_i)|i<\kappa\}$ es de la cardinalidad deseada, aún más, si $r,s\in\wp(F)\backslash\{\varnothing\}$ son disjuntos, se verifica que $B_R(r\cup s)=B_R(r)+B_R(s)$, luego $c(B_R(d_i)+B_R(d_j))=c\circ B_R(d_i\cup d_j)$, por lo tanto $\mathrm{FS}(M)$ es c-monocromático. $\square$

Teorema: $(\forall\kappa,\theta\in\mathbb{N})(\exists S\in\mathbb{N})$(Para todo grupo abeliano G tal que $|G|\geqslant S$ $(G\to(\kappa)^{\mathrm{FS}}_\theta)$).

Demostración: Dados $\kappa,\theta\in\mathbb{N}$, considere $F,R\in\mathbb{N}$ como en los teoremas anteriores y $S:=\max\{R+1,R^F+1\}$. Sean G un grupo abeliano con $|G|\geqslant S$ y $c:G\to\theta$, entonces

- $\exists g\in G:o(g)>R$, por el teorema de sumas finitas aplicado a la siguiente coloración

  $$\begin{aligned} B_R:\{g,\cdots,Rg\} &\leftrightarrow \{1,\cdots,R\} \\ ng &\to n. \end{aligned} \qquad c\circ B_R:\{1,\cdots,F\}\to\theta.$$

  $\exists M=\{m_i\mid i<\kappa\}\subseteq\{1,\cdots,R\}$ tal que $\mathrm{FS}(M)$ es $c\circ B_R$-monocromático. Entonces, sea $H:=B_R^{-1}[M]=\{m_ig\mid i<\kappa\}$, es inmediato que $\mathrm{FS}(H)$ es c-monocromático.

- $\forall g\in G:o(g)\leqslant R$, recursivamente para $n<F$ elegimos $h_n\in G\backslash\langle\{h_i|i<n\}\rangle$, entonces por el teorema de uniones finitas aplicado a la siguiente coloración

  $$\begin{aligned} B_S:\mathrm{FS}(\{h_i\mid i<F\}) &\leftrightarrow \wp(F)\backslash\{\varnothing\} \\ h_{i_1}+\cdots+h_{i_n} &\to \{i_1,\cdots,i_n\}. \end{aligned} \qquad c\circ B_S:\wp(F)\backslash\{\varnothing\}\to\theta.$$

  Hay una colección finita $D=\{d_i|i<\kappa\}\subseteq\wp(F)\backslash\{\varnothing\}$ de conjuntos disjuntos a pares tal que $\mathrm{FU}(D)$ es $c\circ B_S$-monocromático. Sea $H:=B_S^{-1}[D]=\{\sum_{j\in d_i}h_j\mid i<\kappa\}$, al notar que para $r,s\in\wp(F)\backslash\{\varnothing\}$ disjuntos se tiene $B_S^{-1}(r\cup s)=B_S^{-1}(r)+B_S^{-1}(s)$, concluimos que $\mathrm{FS}(H)$ es c-monocromático. $\square$

En lo que respecta a Owings en el caso finitario, contamos con la siguiente caracterización.

Teorema (Fernández-Sarmiento-Vera[19])**:** Sea $(G,+)$ un grupo abeliano. Al definir a $G_2:=\{g\in G\mid 2g=0\}$ y $2G:=\{2g\mid g\in G\}$, las siguientes condiciones son equivalentes

- $G\to(\kappa)^{\cdot+\cdot}_\theta$, para todo κ y θ finitos.
- ${}^{G}/_{G_2}$ es Dedekind-infinito.
- $2G$ es Dedekind-infinito.

κ infinito numerable $\qquad$ θ infinito numerable

Por completitud, señalaremos que esta instancia del problema de Hindman seguirá abierta, dado que ninguna demostración conocida (y por lo tanto, sus respectivos resultados) parece adaptarse dentro de la teoría de Zermelo-Fraenkel con el axioma de determinación, sugiriendo así una vía de investigación orientada al desarrollo de técnicas combinatorias. En cambio, esta instancia del problema de Owings no solo lleva a un resultado conocido, sino que, gracias a las potentes propiedades de regularidad derivadas de la determinación, es posible debilitar sus hipótesis, bajo cierto supuesto.

Lema: Sean $N \subseteq \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, $(\exists X \in [\mathbb{R}]^\omega\ (X+X \subseteq N))$ sii $(\exists Y \in [\mathbb{R}]^\omega\ (Y+Y \subseteq -c+N))$.

Demostración: Si $X+X \subseteq N$, basta definir $Y := -\frac{c}{2}+X$, notando que $Y+Y \subseteq -c+N$. $\square$

Lema (Hindman-Leader-Strauss[23])**:** Suponiendo el axioma de elección dependiente. Si $N \subseteq \mathbb{R}$ no es magro, entonces $\exists X \in [\mathbb{R}]^\omega\ (X + X \subseteq N)$.

Demostración: Al tener la propiedad de Baire, $N = A\Delta M$, con A abierto y M magro, sin pérdida de generalidad por el lema supondremos que $0 \in A$, así $\exists \delta > 0\ ((0, 2\delta) \subseteq A)$. Sea $x_0 \in (0,\delta)\backslash\frac{1}{2}M$, se sigue de inmediato que $\{x_0\} + \{x_0\} = \{2x_0\} \subseteq (0, 2\delta)\backslash M \subseteq N$. Sea $\alpha < \omega$ y asumamos hemos construido $X_\alpha = \{x_\beta | \beta < \alpha\} \subseteq (0, \delta)$ tal que $X_\alpha + X_\alpha \subseteq N$. Notemos que para todo $\beta < \alpha$

$$x_\beta \in X_\alpha \implies x_\beta \in (0,\delta) \implies 0 \in -x_\beta + (0,\delta) \implies (0,\delta) \subseteq -x + (0, 2\delta).$$

De forma que

$$(0,\delta) \subseteq \frac{1}{2}A \cap \Big(\bigcap_{\beta<\alpha}(-x_\beta + A)\Big).$$

Ahora definamos

$$L := \frac{1}{2}N \cap \Big(\bigcap_{\beta<\alpha}(-x_\beta + N)\Big).$$

$(0,\delta)\backslash L$ es magro, ya que

$$x \in (0,\delta)\backslash\frac{1}{2}N \implies 2x \in (0,2\delta)\backslash N \subseteq M \implies x \in \frac{1}{2}M,$$

$$\exists\beta_0 < \alpha\ (x \in (0,\delta)\backslash(-x_{\beta_0} + N)) \implies x + x_{\beta_0} \in (0,2\delta)\backslash N \subseteq M \implies x \in -x_{\beta_0} + M.$$

Tomemos $x_\alpha \in ((0,\delta)\cap L)\backslash X_\alpha$, de este modo $2x_\alpha, x_\alpha + x_\beta \in N$ y por ende $X_{\alpha+1} + X_{\alpha+1} \subseteq N$. Recurriendo al axioma de elección dependiente definimos $X := \{x_\alpha \mid \alpha < \omega\}$. $\square$

Teorema: Suponiendo el axioma de elección dependiente. $\mathbb{R} \to (\omega)^{\cdot+\cdot}_\omega$.

Demostración: Sea $c : \mathbb{R} \to \omega$. Consecuentemente, como $\mathbb{R} = \bigsqcup_{i<\omega} c^{-1}[\{i\}]$ es no magro, $\exists i_0 < \omega$ ($c^{-1}[\{i_0\}]$ tampoco lo es). Entonces por el lema de Hindman-Leader-Strauss, $\exists X \in [\mathbb{R}]^\omega\ (X + X \subseteq c^{-1}[i_0])$. $\square$

Siendo este resultado una "cota superior", ya que $\mathfrak{c}$ es incomparable con ω_1 bajo ZFD. Más adelante discutiremos el rol del axioma de elección dependiente en esta teoría.

κ finito $\qquad\qquad$ θ infinito numerable

En estos problemas de Hindman, emergerá cierto esquema específico de demostración.

Teorema: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ de dimensión ω_1, entonces $V \to (2)^{\mathrm{FS}}_{\omega}$.

Demostración: Sean $\mathcal{B} = \{b_i | i < \omega_1\}$ una base de V y $c : V \to \omega$. Definiendo

$$\begin{aligned} d : [\omega_1]^2 &\to \omega \\ \{i < j\} &\mapsto c(b_i - b_j). \end{aligned}$$

Entonces por el teorema de tipo Ramsey sobre cardinales medibles para ω_1, $\omega_1 \to (\omega_1)^2_{\omega}$, $\exists M \subseteq \omega_1$ $(|M| = \omega_1 \wedge \exists I_0 < \omega$ $(d[[M]^2] = \{I_0\}))$, sean $\alpha, \beta, \gamma \in M$ $(\alpha < \beta < \gamma < \omega_1)$

$$c(b_\alpha - b_\beta) = d(\{\alpha, \beta\}) = I_0 = d(\{\alpha, \gamma\}) = c(b_\alpha - b_\gamma) = c(b_\alpha - b_\beta + b_\beta - b_\gamma).$$
$$c(b_\beta - b_\gamma) = d(\{\beta, \gamma\}) \not\!/$$

Este $\mathrm{FS}(\{b_\alpha - b_\beta, b_\beta - b_\gamma\})$ es c-monocromático. Similarmente, por Martin, $V \to (2)^{\mathrm{FS}}_{2^\omega}$. $\square$

Teorema: Análogamente, sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ de dimensión ω_2, $V \to (2)^{\mathrm{FS}}_{\omega_1}$.

Teorema: Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial con base, entonces $V \nrightarrow (3)^{\mathrm{FS}}_{\omega}$.

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ una base de V, por la identificación $V \cong \bigoplus_{b \in \mathcal{B}} \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{supp} : V &\to [\mathcal{B}]^{<\omega} \\ \sum_{\substack{\forall^* b \in \mathcal{B}: \\ q_b = 0}} q_b b = v &\mapsto \{b \in \mathcal{B} | q_b \neq 0\}. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c : V &\to \mathbb{Q} \\ \sum_{\substack{\forall^* b \in \mathcal{B}: \\ q_b = 0}} q_b b = v &\mapsto \sum_{b \in \mathcal{B}} q_b^2. \end{aligned}$$

Para $v_0, v_1, v_2 \in V$ arbitrarios, inyectamos $\mathrm{FS}(\{u_i | i < 3\}) \hookrightarrow \mathbb{Q}^n$, donde $n = \bigcup_{i<3} \mathrm{supp}(u_i)$, bastando probar que no existen tres vectores distintos $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\|a\| = \|b\| = \|c\| = \|a + b\| = \|a + c\| = \|b + c\| = \|a + b + c\|.$$

Procederemos por contradicción, notemos que de ser así $\|a\| \neq 0$, además

$$r := \|a\|^2 = \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a|b\rangle,$$

al despejar, $\langle a|b\rangle = -\frac{1}{2}r$, similarmente se muestra que $\langle b|c\rangle = \langle a|c\rangle = -\frac{1}{2}r$, ahora

$$\|a + b + c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 + 2(\langle a|b\rangle + \langle b|c\rangle + \langle a|c\rangle) = 3r + 2\Big(-3\frac{1}{2}r\Big) = 0. \# c \quad \square$$

Mientras que el problema de Owings se ve subsumido por resultados más generales.

Teorema: $\forall \kappa \in \mathbb{N}$ $(\mathbb{R} \to (\kappa)^{\cdot + \cdot}_{\omega})$.

Demostración: Esta es análoga a la provista bajo elección dependiente para $\mathbb{R} \to (\omega)^{\cdot + \cdot}_{\omega}$, difiriendo en la falta de hipótesis de elección, al tratarse de una construcción finita. $\square$

Teorema (Fernández-Sarmiento-Vera[19])**:** Sea $(G, +)$ un grupo abeliano tal que $G_2 = \varnothing$, entonces $G \nrightarrow (2)^{\cdot + \cdot}_{\omega}$.

Corolario: Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial con base, entonces $V \nrightarrow (2)^{\cdot + \cdot}_{\omega}$.

κ infinito no numerable θ finito

Definición: Sea D una colección de conjuntos finitos, diremos que D es un **Δ-sistema**[30] si existe un conjunto R tal que $c \cap d = R$ para cualquier par de conjuntos distintos $c, d \in D$.⌟

Lema del Δ-sistema (Erdös-Rado[30]): Supongamos el axioma de elección dependiente. Sea C una colección no numerable de conjuntos finitos, hay un Δ-sistema infinito $D \subseteq C$.

Demostración: Primero definamos para $n < \omega$

$$C_n := \{c \in C \mid |c| = n\}.$$

Dado que $C = \bigsqcup_{n<\omega} C_n$ es no numerable, es inmediato que $\exists n < \omega$ (C_n es no numerable), sino C sería numerable, al ser unión numerable de numerables y por la regularidad de ω_1. Así, asumiremos sin pérdida de generalidad que $\forall c \in C : |c| = n$, e induciremos sobre n

n=1 Es inmediato, puesto que $\forall c, d \in C$ ($c \neq d \implies c \cap d = \varnothing$).

n+1 Por hipótesis de inducción el lema es cierto para n, sea C tal que $\forall c \in C$ ($|c| = n+1$).

- En primer lugar abordaremos el escenario en el que $\exists r$ ($\{c \in C | r \in c\} \not\hookrightarrow \omega$). Al aplicar la hipótesis de inducción a la colección $A := \{c \backslash \{r\} \mid r \in c \in C\}$, hay un Δ-sistema infinito $B \subseteq A$, así basta definir $D := \{d \cup \{r\} | d \in D'\} \subseteq C$.
- Tratemos ahora el escenario opuesto, tenemos que $\forall r$ ($\{c \in C | r \in c\} \hookrightarrow \omega$). Sea $m < \omega$, dado $\{c_l | l < m\} \subset C$ tal que $\forall k, l < m$ ($k \neq l \implies c_k \cap c_l = \varnothing$), $\exists c_m \in C$ ($c_m \cap \bigcup_{l<m} c_l = \varnothing$), por el axioma de elección dependiente definimos $D := \{c_m | m < \omega\} \subseteq C$, el cual es tal que $\forall c, d \in D$ ($c \neq d \implies c \cap d = \varnothing$). $\square$

Y bajo elección dependiente todo conjunto infinito es Dedekind-infinito [léase apéndice], entonces, aún más, hay un Δ-sistema infinito numerable $\{d_i | i < \omega\} \subseteq C$.

La importancia de este lema radica en la facilitación de varios argumentos estructurales, pues el control sobre las intersecciones permite avances significativos en demostraciones, particularmente en aquellas de tipo Ramsey.
Ahora demostraremos que, bajo la teoría ZFD con el axioma de elección dependiente, la versión del teorema de Hindman que busca obtener monocromáticos no numerables falla para $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales de dimensión no numerable. Concretamente probaremos que dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{Q}$ con base, existe una coloración $c : V \to 2$ tal que, para todo subconjunto $U \subseteq V$ no numerable, el conjunto $\mathrm{FS}(U)$ no es monocromático. La clave del argumento reside en la estructura algebraica de los $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales, pues sus propiedades de cancelación impiden la existencia de "elementos absorbentes". En contraste, al relajar la propiedad de cancelación (como ocurre en ciertos semigrupos), se encuentran casos donde sí se cumple el análogo no numerable del teorema de Hindman. Habiendo entonces una conexión entre la cancelatividad y la validez de estos teoremas, interrogando las condiciones algebraicas adicionales que podrían garantizar dicha validez.

Teorema (Fernández[31])**:** Bajo el axioma de elección dependiente.
Sean V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial con base y κ un cardinal no numerable, entonces $V \nrightarrow (\kappa)_2^{\mathrm{FS}}$.

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ una base de V, de este modo $V \cong \bigoplus_{i<\kappa} \mathbb{Q}$, definamos

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} &: V \to [\mathcal{B}]^{<\omega} \\ \sum_{\substack{b\in\mathcal{B} \\ \forall^* q_b=0}} q_b b = v &\mapsto \{b \in \mathcal{B} \mid q_b \neq 0\}. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \operatorname{coef} &: V \to [\mathbb{Q}\backslash\{0\}]^{<\omega} \\ \sum_{\substack{b\in\mathcal{B} \\ \forall^* q_b=0}} q_b b = v &\mapsto \{q_b \mid b \in \mathcal{B}\}\backslash\{0\}. \end{aligned}$$

Consideremos a la función y la coloración

$$\begin{aligned} p : \omega &\to 2 \\ n &\mapsto \lfloor \log_2 n \rfloor \mod 2. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c : V &\to 2 \\ v &\mapsto p(|\operatorname{supp}(v)|). \end{aligned}$$

Procederemos por contradicción, sea $U \in [V]^\kappa$ tal que $\mathrm{FS}(U) \subseteq c^{-1}[\{I\}]$, para algún $I < 2$. Definiendo para todo $n < \omega$, $U_n := \{u \in U \| \operatorname{supp}(u)| = n\}$, partimos a $U = \bigsqcup_{n<\omega} U_n$, como consecuencia de la regularidad de ω_1, sabemos que $\exists N < \omega$ (U_N es no numerable). Similarmente para $f \in [\mathbb{Q}\backslash\{0\}]^{\leqslant N}$, $U_N^f := \{u \in U_N | \operatorname{coef}(u) = f\}$, $U_N = \bigsqcup_{f\in[\mathbb{Q}\backslash\{0\}]^{\leqslant n}} U_N^f$, siguiendo un razonamiento análogo, tenemos que $\exists F \in [\mathbb{Q}\backslash\{0\}]^{\leqslant N}$ (U_N^F es no numerable). Observemos que para todo $s \in [\mathcal{B}]^{<\omega}\backslash\{\varnothing\}$, tenemos que $|\operatorname{supp}^{-1}[s]| = \omega$, pues $|\mathbb{Q}| = \omega$, implicando que $\operatorname{supp}[U_N^F]$ es no numerable, ya que de lo contrario $\operatorname{supp}[U_N^F] = \{s_i | i < \omega\}$, luego $U_N^F \subseteq \bigsqcup_{i<\omega} \operatorname{supp}^{-1}[s_i]$ sería numerable, al ser unión numerable de numerables #c. Del lema $\exists\{d_n | n < \omega\} \subseteq \operatorname{supp}[U]$ que forma un Δ-sistema infinito numerable con raíz R. Por elección numerable, para $n < \omega$ elegimos $u_n \in U_N^F$ ($\operatorname{supp}(u_n) = d_n$), $W := \{u_n | n < \omega\}$. Dado que a lo más hay $|R|^{|F|}$ coeficientes de los infinitos u_n en las posiciones de la raíz R, por principio del palomar, asumiremos que los coeficientes de los u_n en R son constantes, garantizando que al sumar vectores de W los términos correspondientes a R no se cancelan. Sean $u_{n_1}, \cdots, u_{n_L} \in W$ distintos, de ahí que $\operatorname{supp}\left(\sum_{i=1}^L u_{n_i}\right) = R \cup \left(\bigcup_{i=1}^L (\operatorname{supp}(u_i)\backslash R)\right)$, luego $\left|\operatorname{supp}\left(\sum_{i=1}^L u_{n_i}\right)\right| = |R| + L(N - |R|)$ y $|\operatorname{supp}|[\mathrm{FS}(W)] = \{|R| + L(N - |R|) | L < \omega\}$. Sean $m < \omega(2^m \leqslant N < 2^{m+1})$ ($c(u_0) = p(N) = m \mod 2$) y $n \leqslant m(2^n \leqslant N - |R| < 2^{n+1})$

$$2^{m+1} = 2^{m-n}2^n + 2^m \leqslant 2^{m-n}(N - |R|) + N \leqslant 2^{m-n}2^{n+1} + 2^{m+1} = 2^{m+2}.$$

Consideremos $v := \sum_{i=1}^{2^{m-n}+1} u_i \in \mathrm{FS}(W)$, una suma de $2^{m-n} + 1$ sumandos distintos de W

$$|\operatorname{supp}(v)| = |R| + (2^{m-n} + 1)(N - |R|) = 2^{m-n}(N - |R|) + N.$$

Por ende $c(v) = m+1 \mod 2$, contradiciendo que $\mathrm{FS}(U) \supseteq \mathrm{FS}(W)$ es monocromático #c. En conclusión, no existe $U \in [V]^\kappa$ tal que $\mathrm{FS}(U)$ es monocromático. □

Respecto a esta instancia del problema de Owings, bajo ZFC la respuesta es negativa, o mejor dicho, es consistente que la respuesta sea negativa (léase la Sección 2 de [23]), y se desconoce la consistencia de una respuesta positiva (pese a los avances de [24] y [25]) cerraremos entonces esta investigación con otra interrogante:
¿Cuál es su respuesta bajo ZFD?

Sabemos que el axioma de determinación, concebido como una alternativa al de elección, impone una notable regularidad sobre todos los subconjuntos de la recta real. Sin embargo, la regularidad topológica y de medida tiene un costo en términos de combinatoria cardinal. En particular, la medibilidad de los cardinales ω_1 y ω_2 adquiere un papel fundamental, al forzar estructuras en $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales de dimensión ω_1 u ω_2.
No obstante, la falta de elección impide garantizar construcciones que dependan de ella, aunque sean débiles. Por ejemplo, sin elección no todos los espacios vectoriales tienen base, no siempre es posible extender sucesiones dependientes para cardinalidades mayores a ω, es más, ni siquiera podemos asegurar la existencia de funciones de elección numerables, incluso principios como "todo conjunto infinito es Dedekind-infinito" requieren de análisis, pues su validez puede fallar en modelos sin elección.
Estas limitaciones reflejan que la necesidad de versiones débiles de elección sigue siendo ineludible para ciertos desarrollos de álgebra, análisis funcional y combinatoria cardinal. La tensión entre la regularidad y la falta de herramientas ilustra indiscutiblemente que, aunque el axioma de elección introduce patologías, su ausencia restringe significativamente la capacidad de manejar objetos infinitos de alta cardinalidad.
He aquí una gran sutileza, el axioma de determinación es incompatible con el de elección, pero no con todas sus versiones débiles. Por ende, si bien no podemos asumir equivalencias (como que todo espacio vectorial tiene una base), si podemos asumir elección dependiente o enfocarnos en rincones con cierta elección, por ejemplo, espacios vectoriales con base. Este detalle, nos permitirá trabajar teorías más robustas, con elección y determinación, mezclando la intuición y regularidad de determinación con las capacidades de elección, concluyendo que la investigación de teorías alternativas de ZF resulta siempre relevante.

Conclusiones

Tras haber indagado resultados de tipo Ramsey en ausencia del axioma de elección, el estudio de juegos infinitos, su determinación y conexión con propiedades de regularidad en conjuntos de reales (vistos como subconjuntos del espacio de Baire) es clave, pues, la determinación de juegos infinitos, formalizada por el axioma de determinación (AD), ha demostrado ser una herramienta poderosa para establecer propiedades de regularidad, principalmente en la jerarquía de Borel, extendiéndose a la jerarquía proyectiva y más allá. En particular, bajo este axioma, se obtiene que todos los conjuntos de números reales tienen tanto la propiedad de Baire como la del conjunto perfecto y son Lebesgue medibles. Estas consecuencias contrastan fuertemente con varios de los resultados clásicos en ZFC, donde la existencia de conjuntos sin estas propiedades es un hecho.

Determinación también posee enormes implicaciones en la teoría de grandes cardinales. Por ejemplo, se ha demostrado que ω_1 y ω_2 son cardinales medibles, lo cual es inimaginable, al menos en el contexto de ZFC. Esto resalta nuevamente la dualidad entre AD y AC, y sugiere que AD proporciona un marco alterno para explorar grandes cardinales. Además, AD implica una vasta estructura en el universo de los conjuntos de números reales, lo que abre nuevas vías para el estudio de la jerarquía de conjuntos definibles.

En cuanto a la combinatoria infinita, AD ha dado lugar a una teoría renovada y fructífera. Bajo este axioma, se han conservado y obtenido resultados notables en teoría de Ramsey. Por ejemplo, el teorema de Ramsey bajo AD se generaliza a coloraciones infinitas, lo que permite establecer regularidades combinatorias que son inalcanzables en ZFC. Además, teoremas como el de Hindman y los de tipo Owings se preservan, con limitaciones, y adquieren matices al invitarnos a explorar teorías con AD y debilitamientos de AC, ya que la determinación de juegos infinitos analiza la estructura de conjuntos infinitos y sus particiones de manera más precisa y general.

A propósito de concluir este texto, la teoría de conjuntos sin el axioma de elección, bajo el axioma de determinación, ofrece un panorama coherente y valioso que conecta juegos infinitos, propiedades de regularidad, grandes cardinales y combinatoria infinita. Este enfoque no solo resuelve problemas clásicos de una manera elegante y uniforme, sino que también abre líneas de investigación en áreas fundamentales de la matemática. La exploración de estos temas continúa siendo un campo activo, nuevo y prometedor, con alcance tanto teórico como aplicado en la comprensión del universo matemático.

Apéndice: Hipotésis débiles

Una discusión que vale la pena mencionar es que algunas de las hipótesis adicionales consideradas a lo largo de este trabajo, se simplifican o se vuelven demostrables en ZFC. Así uno podría pensar que estas son consecuencias exclusivas del axioma de elección y, por ende, incompatibles con el axioma de determinación y fuera del alcance de este texto. Este no es el caso, al haber ciertas teorías de ZF que asumen el axioma de determinación, en las cuales se asumen versiones debilitadas de elección que son consistentes con AD; entre estas, sobresalen los axiomas de elección dependiente (DC) y numerable (CC/AC$_\omega$), los cuales preservan en gran parte a la funcionalidad de AC sin invalidar determinación. Entonces, enunciemos

Axioma de elección (AC)[32]
Toda colección de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.

$$\forall F \left(\varnothing \notin F \implies \exists e \in \left(\bigcup F\right)^F (\forall A \in F\ (e(A) \in A)) \right). \quad \lrcorner$$

Axioma de elección dependiente (DC)[32]
Todo conjunto no vacío con una relación total tiene una cadena infinita contable.

$$\forall W \Big(W \neq \varnothing \wedge (\forall R \subseteq W^2\ \forall u \in W\ \exists v \in W\ (uRv)) \implies \exists \mathbf{s} \in W^\omega\ \forall n < \omega\ (\mathbf{s}_n R \mathbf{s}_{n+1}) \Big). \quad \lrcorner$$

Axioma de elección numerable (CC)[32]
Toda colección numerable de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.

$$\forall F \left((\varnothing \notin F \wedge \exists f : F \hookrightarrow \omega) \implies \exists e \in \left(\bigcup F\right)^F (\forall A \in F\ (e(A) \in A)) \right). \quad \lrcorner$$

En este listado de versiones débiles de elección también incluiremos el siguiente enunciado, al que nos referiremos de acuerdo a la notación introducida en [33].

Forma 9 (IDI)[33]
Todo conjunto infinito es Dedekind-infinito.

$$\forall W \Big((\forall n < \omega\ (|W| \neq n)) \implies \exists f : \omega \hookrightarrow W \Big). \quad \lrcorner$$

Esto pues varios resultados de combinatoria se ambientan en conjuntos Dedekind-infinitos, así bajo este supuesto estos se extienden a conjuntos infinitos.

Un rasgo destacado de estas hipótesis es la existencia de una jerarquía interna entre ellas.

Teorema: Bajo el axioma de elección se cumple elección dependiente.

Demostración: Sea $W \neq \varnothing$ un conjunto y R una relación total sobre él, para $u \in W$, sea

$$R_u := \{v \in W \mid uRv\}.$$

Al ser R total, R_u es no vacío para todo $u \in W$. Consideremos la familia de conjuntos

$$F := \{R_u \mid u \in W\}.$$

Por el axioma de elección existe una función $e : F \to \bigcup F$ tal que $\forall u \in W\ (e(R_u) \in R_u)$, es decir, $uRe(R_u)$. Sea $\mathbf{s}_0 \in W$, la sucesión $\mathbf{s}_n := e^{\circ n}(R_{s_0})$ verifica $\forall n < \omega\ (\mathbf{s}_n R \mathbf{s}_{n+1})$. □

Teorema: Bajo el axioma de elección dependiente se cumple elección numerable.

Demostración: Sea $F = \{F_n \mid n < \omega\}$ una colección numerable de conjuntos no vacíos y

$$R := \left\{(u, v) \in \left(\bigcup F\right)^2 \,\middle|\, \exists n < \omega : u \in F_n \wedge v \in F_{n+1}\right\}.$$

Ya que $F_n \neq \varnothing$ para $n < \omega$, R es una relación total. Por el axioma de elección dependiente hay una sucesión $\mathbf{s} : \omega \to \bigcup F$ tal que $\forall n < \omega\ (\mathbf{s}_n R \mathbf{s}_{n+1})$, así $\exists n_0 < \omega\ \forall i < \omega\ (\mathbf{s}_i \in F_{i+n_0})$. En caso que $n_0 = 0$, definimos $e(F_i) := \mathbf{s}_i$. De lo contrario, sean $(e_i \mid i < n_0) \in \prod_{i<n_0} F_i$ y

$$e(F_i) := \begin{cases} e_i & i < n_0 \\ \mathbf{s}_{i-n_0} & i \geqslant n_0 \end{cases}$$ □

Teorema: Bajo el axioma de elección numerable se cumple la forma 9.

Demostración: Sea W un conjunto infinito, para todo $n < \omega$ definimos:

$$F_n := \{f : n \hookrightarrow W\}$$

Ya que W es infinito, no está en biyección con ningún $n < \omega$, así por inducción $F_n \neq \varnothing$. Consideremos la familia numerable de conjuntos no vacíos

$$F := \{F_n \mid n < \omega\}$$

Por el axioma de elección numerable existe $e : F \to \bigcup F$ tal que $\forall n < \omega\ (e(F_n) \in F_n)$. Sea $X := \bigcup_{n<\omega} \operatorname{ran}(e(F_n))$. Entonces X es una unión numerable de conjuntos numerables. De la regularidad del cardinal ω_1 (léase la página 24), se sigue que $X \subseteq W$ es numerable. Además, X no es finito, ya que si lo fuera $\exists n_0 < \omega\ \exists \alpha \in \operatorname{ran}(e(F_{n_0}))\ (\alpha \notin X)$. □

Aún más, esta jerarquía es estricta, en el sentido que ninguna implicación es reversible, al haber modelos de ZF en los que se verifica la versión débil pero falla la versión fuerte, en caso que el lector esté interesado, estos son el modelo de Solovay[11] ($\mathrm{M} \models \mathrm{DC} \wedge \neg \mathrm{AC}$), el modelo 8.12 de Jech[32] ($\mathrm{M} \models \mathrm{CC} \wedge \neg \mathrm{DC}$) y el modelo 8.6 de Jech[32] ($\mathrm{M} \models \mathrm{IDI} \wedge \neg \mathrm{CC}$).

Glosario

De símbolos (en orden de aparición)

General (en orden alfabético)

Bibliografía.

[1] Alexander S. Kechris. (1995).
Classical Descriptive set theory. Springer.
https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4190-4

[2] Akihiro Kanamori. (1996).
The higher infinite: large cardinals in set theory from their beginnings. Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-540-88867-3

[3] Paul R. Halmos. (1960).
Naive Set Theory. Springer.
https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1645-0

[4] David Gale & Frank M. Stewart. (1953).
Infinite games with perfect information.
Contributions to the Theory of Games, Volumen II. Princeton University Press.
https://doi.org/10.1515/9781400881970-014

[5] John C. Oxtoby. (1958).
The Banach-Mazur game and Banach Category Theorem.
Contributions to the Theory of Games, Volumen III. Princeton University Press.
https://doi.org/10.1515/9781400882151-009

[6] Stefan Banach, Stanislaw Mazur & Daniel Mauldin [editor]. (1981).
The Scottish Book.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-22897-6

[7] Morton Davis. (1964).
Infinite games of perfect information.
Advances in Game Theory. Princeton University Press
https://doi.org/10.1515/9781400882014-008

[8] José A. Guzmán. (2024).
Axioma de determinación. Instituto Politécnico Nacional.

[9] Jan Mycielski & Hugo Steinhaus. (1962).
A mathematical axiom contradicting the axiom of choice.
Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences.
https://doi.org/10.2307/2271562

[10] Jan Mycielski & Stanisław Świerczkowski. (1964).
On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness.
Fundamenta Mathematicae.
https://doi.org/10.2307/2271562

[11] Robert Solovay. (1970).
A model of set theory in which every set or reals is Lebesgue measurable.
The Annals of mathematics.
https://doi.org/10.2307/1970696

[12] Shashi Srivastava. (1998).
A Course on Borel Sets. Springer.
https://doi.org/10.1007/b98956

[13] Dominique Lecomte. (2020).
Analytic and co-analytic sets.
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche.
https://webusers.imj-prg.fr/~dominique.lecomte/Chapitres/6-Analytic%20and%20co-analytic%20sets.pdf

[14] Nicolai Luzin & Wacław Sierpiński. (1923).
Sur un ensemble non mesurable B.
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.
https://doi.org/10.1007/978-94-015-8478-4_10

[15] Hartley Rogers. (1967).
Theory of recursive functions and effective computability. McGraw-Hill.
https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1968-11995-0

[16] Donald Martin. (1968).
The axiom of determinateness and reduction principles in the analytical hierarchy.
Bulletin of the American Mathematical Society
https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1968-11995-0

[17] Tomáš Jech. (2003).
Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded. Springer.
https://doi.org/10.1007/3-540-44761-X

[18] David Fernández & Sung Hyup Lee. (2020).
Hindman-like theorems with uncountably many colours and finite monochromatic sets.
Proceedings of the American Mathematical Society.
https://doi.org/10.1090/proc/14649

[19] David Fernández, Eliseo Sarmiento & Germán Vera. (2024).
Owings-like theorems for infinitely many colours or finite monochromatic sets.
Annals of Pure and Applied Logic.
https://doi.org/10.1016/j.apal.2024.103495

[20] Neil Hindman. (1974).
Finite sums from sequences within cells of a partition of N.
Journal of Combinatorial Theory.
https://doi.org/10.1016/0097-3165(74)90023-5

[21] James Baumgartner. (1974).
A short proof of Hindman's Theorem.
Journal of Combinatorial Theory.
https://doi.org/10.1016/0097-3165(74)90103-4

[22] Neil Hindman. (1979).
Partitions and sums of integers with repetition.
Journal of Combinatorial Theory.
https://doi.org/10.1016/0097-3165(79)90004-9

[23] Neil Hindman, Imre Leader & Dona Strauss. (2016).
Pairwise sums in colourings of the reals.
Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg.
https://doi.org/10.1007/s12188-016-0166-x

[24] P. Komjáth, I. Leader, P. Russell, S. Shelah, D. Soukup & Z. Vidnyánszky. (2019).
Infinite monochromatic sumsets for colourings of the reals.
Proceedings of the American Mathematical Society.
https://doi.org/10.1090/proc/14431

[25] Jing Zhang. (2020).
Monochromatic sumset without large cardinals.
Fundamenta Mathematicae.
https://doi.org/10.4064/fm841-12-2019

[26] Imre Leader & Paul Russell. (2020).
Monochromatic infinite sumsets.
New York Journal of Mathematics.
https://doi.org/10.48550/arXiv.1707.08071

[27] Ronald Graham, Bruce Rothschild & Joel Spencer. (1980).
Finite sums and finite unions (Folkman's theorem).
Ramsey Theory. Wiley-Interscience.
https://archive.org/details/ramseytheory0000grah

[28] Richard Rado. (1970).
Some partition theorems.
Combinatorial theory and its applications.
https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0297585

[29] Jon Sanders. (1968).
A generalization of Schur's theorem. Yale University.
https://doi.org/10.48550/arXiv.1712.03620

[30] Paul Erdős & Richard Rado. (1960).
Intersection theorems for systems of sets.
Journal of the London Mathematical Society.
https://doi.org/10.1112/jlms/s1-35.1.85

[31] David Fernández. (2016).
Hindman's Theorem is only a Countable Phenomenon.
Order: A Journal on the Theory of Ordered Sets and its Applications.
https://doi.org/10.1007/s11083-016-9419-7

[32] Tomáš Jech. (1973).
The axiom of choice. North-Holland.
https://doi.org/10.1016/s0049-237x(08)x7090-9

[33] Paul Howard & Jean Rubin. (1998).
Consequences of the axiom of choice. Mathematical Surveys and Monographs.
https://doi.org/10.1090/surv/059