Un problema de álgebra que resultó indecidible

David José Fernández Bretón

Instituto de Matemáticas, UNAM, campus Morelia
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

XLII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana
13 de agosto, Zacatecas, Zacatecas.

Índice

Índice

1. Recordatorio: Grupos abelianos libres
2. El problema de la extensión
3. Propiedades de los W-grupos
4. Es consistente que todo W-grupo es libre
5. Es independiente que todo W-grupo es libre

Índice

Índice

Índice

Definición

*Un grupo abeliano A es **libre** si tiene una base, es decir, un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\langle X \rangle = A$ y siempre que $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0$, para $\{m_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{Z}$, $\{x_i\}_{i=1}^{n} \in [X]^n$, entonces $(\forall i \in n+1 \setminus \{0\})(m_i = 0)$.*

Equivalentemente, $X \subseteq A$ es una base si y sólo si cumple con la propiedad universal de los grupos abelianos libres: dado cualquier grupo abeliano B y cualquier función $f : X \to B$, existe un único morfismo de grupos $\hat{f} : A \to B$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\forall f"'] & A \arrow[d, dashed, "\exists ! \hat{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Definición

Un grupo abeliano A es ***libre*** *si tiene una base, es decir, un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\langle X \rangle = A$ y siempre que $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0$, para $\{m_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{Z}$, $\{x_i\}_{i=1}^{n} \in [X]^n$, entonces $(\forall i \in n+1 \setminus \{0\})(m_i = 0)$.*

Equivalentemente, $X \subseteq A$ es una base si y sólo si cumple con la propiedad universal de los grupos abelianos libres: dado cualquier grupo abeliano B y cualquier función $f : X \to B$, existe un único morfismo de grupos $\hat{f} : A \to B$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\forall f"'] & A \arrow[d, dashed, "\exists! \hat{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Definición

*Un grupo abeliano A es **libre** si tiene una base, es decir, un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\langle X \rangle = A$ y siempre que $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0$, para $\{m_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{Z}$, $\{x_i\}_{i=1}^{n} \in [X]^n$, entonces $(\forall i \in n+1 \setminus \{0\})(m_i = 0)$.*

Equivalentemente, $X \subseteq A$ es una base si y sólo si cumple con la propiedad universal de los grupos abelianos libres: dado cualquier grupo abeliano B y cualquier función $f : X \to B$, existe un único morfismo de grupos $\hat{f} : A \to B$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\forall f"'] & A \arrow[d, dashed, "\exists! \hat{f}"] \\
& B
\end{tikzcd}
$$

Definición

Sea $\pi : A \to B$ un morfismo de grupos abelianos. Decimos que π ***se escinde*** *si existe un morfismo $\rho : B \to A$ (llamado la* ***escisión*** *de π) tal que $\pi\rho = \mathrm{id}_B$.*

Es decir, π se escinde sii tiene una inversa derecha en la categoría de grupos abelianos. Nótese que, si π se escinde con escisión ρ, entonces necesariamente π será epimorfismo y ρ será monomorfismo.

Teorema

Un grupo abeliano A es libre $\iff$ todo epimorfismo con rango A se escinde.

Definición

Sea $\pi : A \to B$ un morfismo de grupos abelianos. Decimos que π ***se escinde*** *si existe un morfismo $\rho : B \to A$ (llamado la* ***escisión*** *de π) tal que $\pi\rho = \mathrm{id}_B$.*

Es decir, π se escinde sii tiene una inversa derecha en la categoría de grupos abelianos. Nótese que, si π se escinde con escisión ρ, entonces necesariamente π será epimorfismo y ρ será monomorfismo.

Teorema

Un grupo abeliano A es libre $\iff$ todo epimorfismo con rango A se escinde.

Definición

*Sea $\pi : A \to B$ un morfismo de grupos abelianos. Decimos que π **se escinde** si existe un morfismo $\rho : B \to A$ (llamado la **escisión** de π) tal que $\pi\rho = \mathrm{id}_B$.*

Es decir, π se escinde sii tiene una inversa derecha en la categoría de grupos abelianos. Nótese que, si π se escinde con escisión ρ, entonces necesariamente π será epimorfismo y ρ será monomorfismo.

Teorema

Un grupo abeliano A es libre $\iff$ todo epimorfismo con rango A se escinde.

Definición

Sea $\pi : A \to B$ un morfismo de grupos abelianos. Decimos que π ***se escinde*** *si existe un morfismo $\rho : B \to A$ (llamado la* ***escisión*** *de π) tal que $\pi\rho = \mathrm{id}_B$.*

Es decir, π se escinde sii tiene una inversa derecha en la categoría de grupos abelianos. Nótese que, si π se escinde con escisión ρ, entonces necesariamente π será epimorfismo y ρ será monomorfismo.

Teorema

Un grupo abeliano A es libre $\iff$ todo epimorfismo con rango A se escinde.

Proposición

(i) *Un subgrupo de un grupo abeliano libre es libre.*

(ii) *Un grupo abeliano finitamente generado y libre de torsión es libre.*

(iii) *Sean A grupo abeliano, $B \leq A$ tal que tanto B como A/B son libres. Entonces A es libre, más aún, toda base de B se extiende a una base de A.*

Proposición

(*i*) *Un subgrupo de un grupo abeliano libre es libre.*

(*ii*) *Un grupo abeliano finitamente generado y libre de torsión es libre.*

(*iii*) *Sean A grupo abeliano, $B \leq A$ tal que tanto B como A/B son libres. Entonces A es libre, más aún, toda base de B se extiende a una base de A.*

Proposición

(i) *Un subgrupo de un grupo abeliano libre es libre.*

(ii) *Un grupo abeliano finitamente generado y libre de torsión es libre.*

(iii) *Sean A grupo abeliano, $B \leq A$ tal que tanto B como A/B son libres. Entonces A es libre, más aún, toda base de B se extiende a una base de A.*

Proposición

(i) *Un subgrupo de un grupo abeliano libre es libre.*

(ii) *Un grupo abeliano finitamente generado y libre de torsión es libre.*

(iii) *Sean A grupo abeliano, $B \leq A$ tal que tanto B como A/B son libres. Entonces A es libre, más aún, toda base de B se extiende a una base de A.*

Definición

Consideremos una sucesión de conjuntos $\langle A_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$, *para algún* $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

(i) *Diremos que la sucesión es una* ***cadena*** *si* $(\forall \beta, \gamma \in \mathrm{Ord})(\beta < \gamma < \alpha \Rightarrow A_\beta \subseteq A_\gamma)$.

(ii) *Diremos que la cadena es* ***suave*** *si para cada ordinal límite* $\beta < \alpha$, *se tiene que* $A_\beta = \bigcup_{\gamma < \beta} A_\gamma$.

(iii) *Diremos que la cadena es* ***estricta*** *si para cada* $\beta < \alpha$, $A_\beta \neq A_{\beta+1}$. *Equivalentemente, si reemplazamos las contenciones* $\subseteq$ *en la parte* (i) *por contenciones propias* $\subsetneq$.

(iv) *Finalmente, diremos que se trata de una* ***cadena de grupos*** *si los* A_β *son grupos para todo* $\beta < \alpha$, *y en tal forma que para* $\beta < \gamma < \alpha$ *se tiene que* $A_\beta \leq A_\gamma$.

Teorema

Sea $\langle A_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$ *una cadena suave de grupos tal que* A_0 *es libre y para cada* $\beta < \alpha$, $A_{\beta+1}/A_\beta$ *es libre. Entonces,* $A = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$ *es libre. Más aún, para cada* $\beta < \alpha$, A/A_β *es libre.*

Definición

Consideremos una sucesión de conjuntos $\langle A_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$*, para algún* $\alpha \in \mathrm{Ord}$*.*

(i) *Diremos que la sucesión es una* ***cadena*** *si* $(\forall \beta, \gamma \in \mathrm{Ord})(\beta < \gamma < \alpha \Rightarrow A_\beta \subseteq A_\gamma)$*.*

(ii) *Diremos que la cadena es* ***suave*** *si para cada ordinal límite* $\beta < \alpha$*, se tiene que* $A_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} A_\gamma$*.*

(iii) *Diremos que la cadena es* ***estricta*** *si para cada* $\beta < \alpha$*,* $A_\beta \neq A_{\beta+1}$*. Equivalentemente, si reemplazamos las contenciones* $\subseteq$ *en la parte* (i) *por contenciones propias* $\subsetneq$*.*

(iv) *Finalmente, diremos que se trata de una* ***cadena de grupos*** *si los* A_β *son grupos para todo* $\beta < \alpha$*, y en tal forma que para* $\beta < \gamma < \alpha$ *se tiene que* $A_\beta \leq A_\gamma$*.*

Teorema

Sea $\langle A_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$ *una cadena suave de grupos tal que* A_0 *es libre y para cada* $\beta < \alpha$*,* $A_{\beta+1}/A_\beta$ *es libre. Entonces,* $A = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ *es libre. Más aún, para cada* $\beta < \alpha$*,* A/A_β *es libre.*

Definición

Consideremos una sucesión de conjuntos $\langle A_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$*, para algún* $\alpha \in \mathrm{Ord}$*.*

(i) *Diremos que la sucesión es una* ***cadena*** *si* $(\forall \beta, \gamma \in \mathrm{Ord})(\beta < \gamma < \alpha \Rightarrow A_\beta \subseteq A_\gamma)$*.*

(ii) *Diremos que la cadena es* ***suave*** *si para cada ordinal límite* $\beta < \alpha$*, se tiene que* $A_\beta = \bigcup_{\gamma < \beta} A_\gamma$*.*

(iii) *Diremos que la cadena es* ***estricta*** *si para cada* $\beta < \alpha$*,* $A_\beta \neq A_{\beta+1}$*. Equivalentemente, si reemplazamos las contenciones* $\subseteq$ *en la parte* (i) *por contenciones propias* $\subsetneq$*.*

(iv) *Finalmente, diremos que se trata de una* ***cadena de grupos*** *si los* A_β *son grupos para todo* $\beta < \alpha$*, y en tal forma que para* $\beta < \gamma < \alpha$ *se tiene que* $A_\beta \leq A_\gamma$*.*

Teorema

Sea $\langle A_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$ *una cadena suave de grupos tal que* A_0 *es libre y para cada* $\beta < \alpha$*,* $A_{\beta+1}/A_\beta$ *es libre. Entonces,* $A = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$ *es libre. Más aún, para cada* $\beta < \alpha$*,* A/A_β *es libre.*

Definición

Consideremos una sucesión de conjuntos $\langle A_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$*, para algún* $\alpha \in \mathrm{Ord}$*.*

(i) *Diremos que la sucesión es una **cadena** si* $(\forall \beta, \gamma \in \mathrm{Ord})(\beta < \gamma < \alpha \Rightarrow A_\beta \subseteq A_\gamma)$*.*

(ii) *Diremos que la cadena es **suave** si para cada ordinal límite* $\beta < \alpha$*, se tiene que* $A_\beta = \bigcup_{\gamma < \beta} A_\gamma$*.*

(iii) *Diremos que la cadena es **estricta** si para cada* $\beta < \alpha$*,* $A_\beta \neq A_{\beta+1}$*. Equivalentemente, si reemplazamos las contenciones* $\subseteq$ *en la parte* (i) *por contenciones propias* $\subsetneq$*.*

(iv) *Finalmente, diremos que se trata de una **cadena de grupos** si los* A_β *son grupos para todo* $\beta < \alpha$*, y en tal forma que para* $\beta < \gamma < \alpha$ *se tiene que* $A_\beta \leq A_\gamma$*.*

Teorema

Sea $\langle A_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$ *una cadena suave de grupos tal que* A_0 *es libre y para cada* $\beta < \alpha$*,* $A_{\beta+1}/A_\beta$ *es libre. Entonces,* $A = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$ *es libre. Más aún, para cada* $\beta < \alpha$*,* A/A_β *es libre.*

Definición

Consideremos una sucesión de conjuntos $\langle A_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$*, para algún* $\alpha \in \mathrm{Ord}$*.*

- (i) *Diremos que la sucesión es una* ***cadena*** *si* $(\forall \beta, \gamma \in \mathrm{Ord})(\beta < \gamma < \alpha \Rightarrow A_\beta \subseteq A_\gamma)$*.*
- (ii) *Diremos que la cadena es* ***suave*** *si para cada ordinal límite* $\beta < \alpha$*, se tiene que* $A_\beta = \bigcup\limits_{\gamma < \beta} A_\gamma$*.*
- (iii) *Diremos que la cadena es* ***estricta*** *si para cada* $\beta < \alpha$*,* $A_\beta \neq A_{\beta+1}$*. Equivalentemente, si reemplazamos las contenciones* $\subseteq$ *en la parte* (i) *por contenciones propias* $\subsetneq$*.*
- (iv) *Finalmente, diremos que se trata de una* ***cadena de grupos*** *si los* A_β *son grupos para todo* $\beta < \alpha$*, y en tal forma que para* $\beta < \gamma < \alpha$ *se tiene que* $A_\beta \leq A_\gamma$*.*

Teorema

Sea $\langle A_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$ *una cadena suave de grupos tal que* A_0 *es libre y para cada* $\beta < \alpha$*,* $A_{\beta+1}/A_\beta$ *es libre. Entonces,* $A = \bigcup\limits_{\beta < \alpha} A_\beta$ *es libre. Más aún, para cada* $\beta < \alpha$*,* A/A_β *es libre.*

Definición

Consideremos una sucesión de conjuntos $\langle A_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$*, para algún* $\alpha \in \mathrm{Ord}$*.*

(i) *Diremos que la sucesión es una* ***cadena*** *si* $(\forall \beta, \gamma \in \mathrm{Ord})(\beta < \gamma < \alpha \Rightarrow A_\beta \subseteq A_\gamma)$*.*

(ii) *Diremos que la cadena es* ***suave*** *si para cada ordinal límite* $\beta < \alpha$*, se tiene que* $A_\beta = \bigcup\limits_{\gamma < \beta} A_\gamma$*.*

(iii) *Diremos que la cadena es* ***estricta*** *si para cada* $\beta < \alpha$*,* $A_\beta \neq A_{\beta+1}$*. Equivalentemente, si reemplazamos las contenciones* $\subseteq$ *en la parte* (i) *por contenciones propias* $\subsetneq$*.*

(iv) *Finalmente, diremos que se trata de una* ***cadena de grupos*** *si los* A_β *son grupos para todo* $\beta < \alpha$*, y en tal forma que para* $\beta < \gamma < \alpha$ *se tiene que* $A_\beta \leq A_\gamma$*.*

Teorema

Sea $\langle A_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$ *una cadena suave de grupos tal que* A_0 *es libre y para cada* $\beta < \alpha$*,* $A_{\beta+1}/A_\beta$ *es libre. Entonces,* $A = \bigcup\limits_{\beta < \alpha} A_\beta$ *es libre. Más aún, para cada* $\beta < \alpha$*,* A/A_β *es libre.*

Definición

Sean A, B y G grupos abelianos. Diremos que G es una ***extensión de** A **por medio de*** B *si $A \leq G$ y $G/A \cong B$.*

Obsérvese que G es una extensión de A por medio de B sii existen un monomorfismo $\iota : A \hookrightarrow G$ y un epimorfismo $\pi : G \twoheadrightarrow B$ tales que la sucesión

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow A \xhookrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

es exacta corta.

Definición

*Sean A, B y G grupos abelianos. Diremos que G es una **extensión de** A **por medio de** B si $A \leq G$ y $G/A \cong B$.*

Obsérvese que G es una extensión de A por medio de B sii existen un monomorfismo $\iota : A \hookrightarrow G$ y un epimorfismo $\pi : G \twoheadrightarrow B$ tales que la sucesión

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow A \overset{\iota}{\hookrightarrow} G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

es exacta corta.

Definición

*Sean A, B y G grupos abelianos. Diremos que G es una **extensión de** A **por medio de** B si $A \leq G$ y $G/A \cong B$.*

Obsérvese que G es una extensión de A por medio de B sii existen un monomorfismo $\iota : A \hookrightarrow G$ y un epimorfismo $\pi : G \twoheadrightarrow B$ tales que la sucesión

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow A \overset{\iota}{\hookrightarrow} G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

es exacta corta.

Si tenemos A, G grupos abelianos con $A \leq G$, entonces hay un único B tal que G es una extensión de A por medio de B, a saber, $B = G/A$.El problema de la extensión plantea la pregunta recíproca: Dados A y B grupos abelianos, determinar todas las posibles extensiones de A por medio de B.Nótese que al menos hay una de estas extensiones, la suma directa $A \oplus B$.Pero puede haber varias: por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es una extensión de $2\mathbb{Z}$ por medio de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pues la siguiente sucesión es exacta corta,

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow 2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

pero es claro que $\mathbb{Z} \not\cong 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pues el miembro derecho tiene torsión, mientras que $\mathbb{Z}$ es libre de torsión.

Si tenemos A, G grupos abelianos con $A \leq G$, entonces hay un único B tal que G es una extensión de A por medio de B, a saber, $B = G/A$. El problema de la extensión plantea la pregunta recíproca: Dados A y B grupos abelianos, determinar todas las posibles extensiones de A por medio de B. Nótese que al menos hay una de estas extensiones, la suma directa $A \oplus B$. Pero puede haber varias: por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es una extensión de $2\mathbb{Z}$ por medio de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pues la siguiente sucesión es exacta corta,

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow 2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

pero es claro que $\mathbb{Z} \ncong 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pues el miembro derecho tiene torsión, mientras que $\mathbb{Z}$ es libre de torsión.

Si tenemos A, G grupos abelianos con $A \leq G$, entonces hay un único B tal que G es una extensión de A por medio de B, a saber, $B = G/A$.El problema de la extensión plantea la pregunta recíproca: Dados A y B grupos abelianos, determinar todas las posibles extensiones de A por medio de B.Nótese que al menos hay una de estas extensiones, la suma directa $A \oplus B$.Pero puede haber varias: por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es una extensión de $2\mathbb{Z}$ por medio de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pues la siguiente sucesión es exacta corta,

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow 2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

pero es claro que $\mathbb{Z} \not\cong 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pues el miembro derecho tiene torsión, mientras que $\mathbb{Z}$ es libre de torsión.

Si tenemos A, G grupos abelianos con $A \leq G$, entonces hay un único B tal que G es una extensión de A por medio de B, a saber, $B = G/A$.El problema de la extensión plantea la pregunta recíproca: Dados A y B grupos abelianos, determinar todas las posibles extensiones de A por medio de B.Nótese que al menos hay una de estas extensiones, la suma directa $A \oplus B$.Pero puede haber varias: por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es una extensión de $2\mathbb{Z}$ por medio de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pues la siguiente sucesión es exacta corta,

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow 2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

pero es claro que $\mathbb{Z} \not\cong 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pues el miembro derecho tiene torsión, mientras que $\mathbb{Z}$ es libre de torsión.

Si tenemos A, G grupos abelianos con $A \leq G$, entonces hay un único B tal que G es una extensión de A por medio de B, a saber, $B = G/A$.El problema de la extensión plantea la pregunta recíproca: Dados A y B grupos abelianos, determinar todas las posibles extensiones de A por medio de B.Nótese que al menos hay una de estas extensiones, la suma directa $A \oplus B$.Pero puede haber varias: por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es una extensión de $2\mathbb{Z}$ por medio de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pues la siguiente sucesión es exacta corta,

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow 2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

pero es claro que $\mathbb{Z} \ncong 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pues el miembro derecho tiene torsión, mientras que $\mathbb{Z}$ es libre de torsión.

Desde luego, sólo nos interesa caracterizar hasta isomorfismo las extensiones de A por medio de B. Por ello, si G y G' son dos de tales extensiones, entonces

Definición

*Diremos que $G \sim G'$ (G es **isomorfo como extensión de A por medio de B** a G') si existe un isomorfismo $\psi : G \xrightarrow{\sim} G'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dd, "\psi", "\wr"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ A \arrow[ur, hook, "\iota"] \arrow[dr, hook, "\iota'"'] & & B \\ & G' \arrow[ur, "\pi'"'] & \end{tikzcd}$$

Desde luego, sólo nos interesa caracterizar hasta isomorfismo las extensiones de A por medio de B. Por ello, si G y G' son dos de tales extensiones, entonces

Definición

*Diremos que $G \sim G'$ (G es **isomorfo como extensión de A por medio de B** a G') si existe un isomorfismo $\psi : G \xrightarrow{\sim} G'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$
\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dd, "\psi"', "\wr"] \arrow[dr, two heads, "\pi"] & \\
A \arrow[ur, hook, "\iota"] \arrow[dr, hook, "\iota'"'] & & B \\
 & G' \arrow[ur, two heads, "\pi'"'] &
\end{tikzcd}
$$

Es fácil ver que la relación $\sim$ es de equivalencia, y es una relación más fuerte que sólo el “ser isomorfo". Baer definió una operación binaria entre las clases de equivalencia de estas extensiones, dotando al conjunto cociente de estructura de grupo. Este grupo se denota por $\mathrm{Ext}(B, A)$, y su elemento neutro resulta ser justamente la clase de equivalencia de $A \oplus B$.

Teorema

Sea A un grupo abeliano. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- *$\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$ es el grupo trivial.*
- *Todo epimorfismo $\psi : B \to A$ tal que $\ker\psi \cong \mathbb{Z}$ se escinde.*

Es fácil ver que la relación $\sim$ es de equivalencia, y es una relación más fuerte que sólo el “ser isomorfo". Baer definió una operación binaria entre las clases de equivalencia de estas extensiones, dotando al conjunto cociente de estructura de grupo. Este grupo se denota por $\mathrm{Ext}(B, A)$, y su elemento neutro resulta ser justamente la clase de equivalencia de $A \oplus B$.

Teorema

Sea A un grupo abeliano. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$ *es el grupo trivial.*
- *Todo epimorfismo* $\pi : B \twoheadrightarrow A$ *tal que* $\ker \pi \cong \mathbb{Z}$ *se escinde.*

Es fácil ver que la relación $\sim$ es de equivalencia, y es una relación más fuerte que sólo el “ser isomorfo". Baer definió una operación binaria entre las clases de equivalencia de estas extensiones, dotando al conjunto cociente de estructura de grupo. Este grupo se denota por $\mathrm{Ext}(B, A)$, y su elemento neutro resulta ser justamente la clase de equivalencia de $A \oplus B$.

Teorema

Sea A un grupo abeliano. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$ *es el grupo trivial.*
- *Todo epimorfismo $\pi : B \twoheadrightarrow A$ tal que $\ker \pi \cong \mathbb{Z}$ se escinde.*

Es fácil ver que la relación $\sim$ es de equivalencia, y es una relación más fuerte que sólo el “ser isomorfo". Baer definió una operación binaria entre las clases de equivalencia de estas extensiones, dotando al conjunto cociente de estructura de grupo. Este grupo se denota por $\mathrm{Ext}(B, A)$, y su elemento neutro resulta ser justamente la clase de equivalencia de $A \oplus B$.

Teorema

Sea A un grupo abeliano. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$ *es el grupo trivial.*
- *Todo epimorfismo* $\pi : B \twoheadrightarrow A$ *tal que* $\ker \pi \cong \mathbb{Z}$ *se escinde.*

Definición

Si A es un grupo abeliano que cumple con cualquiera de las dos (y consecuentemente con las dos) equivalencias del teorema anterior, se denominará un ***W-grupo****.*

Corolario

Todo grupo abeliano libre es un W-grupo. □

El problema de Whitehead consistió en decidir si se cumplía el recíproco del corolario anterior, es decir, si todo W-grupo es libre. A continuación analizaremos el problema de Whitehead, que en última instancia resultó indecidible.

Definición

*Si A es un grupo abeliano que cumple con cualquiera de las dos (y consecuentemente con las dos) equivalencias del teorema anterior, se denominará un **W-grupo**.*

Corolario

Todo grupo abeliano libre es un W-grupo. □

El problema de Whitehead consistió en decidir si se cumplía el recíproco del corolario anterior, es decir, si todo W-grupo es libre. A continuación analizaremos el problema de Whitehead, que en última instancia resultó indecidible.

Definición

Si A es un grupo abeliano que cumple con cualquiera de las dos (y consecuentemente con las dos) equivalencias del teorema anterior, se denominará un ***W-grupo****.*

Corolario

Todo grupo abeliano libre es un W-grupo. $\square$

El problema de Whitehead consistió en decidir si se cumplía el recíproco del corolario anterior, es decir, si todo W-grupo es libre. A continuación analizaremos el problema de Whitehead, que en última instancia resultó indecidible.

Definición

Si A es un grupo abeliano que cumple con cualquiera de las dos (y consecuentemente con las dos) equivalencias del teorema anterior, se denominará un ***W-grupo****.*

Corolario

Todo grupo abeliano libre es un W-grupo. $\square$

El problema de Whitehead consistió en decidir si se cumplía el recíproco del corolario anterior, es decir, si todo W-grupo es libre. A continuación analizaremos el problema de Whitehead, que en última instancia resultó indecidible.

Definición

*Si A es un grupo abeliano que cumple con cualquiera de las dos (y consecuentemente con las dos) equivalencias del teorema anterior, se denominará un **W-grupo**.*

Corolario

Todo grupo abeliano libre es un W-grupo. □

El problema de Whitehead consistió en decidir si se cumplía el recíproco del corolario anterior, es decir, si todo W-grupo es libre. A continuación analizaremos el problema de Whitehead, que en última instancia resultó indecidible.

Teorema

(i) *Todo subgrupo de un W-grupo es un W-grupo.*

(ii) *Todo W-grupo es libre de torsión.*

(iii) *Si $A \leq B$, en donde B es un W-grupo pero B/A no es un W-grupo, entonces existe un morfismo de grupos abelianos $\psi : A \to \mathbb{Z}$ que no puede extenderse a un morfismo con dominio B.*

.

Teorema

(i) *Todo subgrupo de un W-grupo es un W-grupo.*

(ii) *Todo W-grupo es libre de torsión.*

(iii) *Si $A \leq B$, en donde B es un W-grupo pero B/A no es un W-grupo, entonces existe un morfismo de grupos abelianos $\psi : A \to \mathbb{Z}$ que no puede extenderse a un morfismo con dominio B.*

.

Teorema

(i) *Todo subgrupo de un W-grupo es un W-grupo.*

(ii) *Todo W-grupo es libre de torsión.*

(iii) *Si $A \leq B$, en donde B es un W-grupo pero B/A no es un W-grupo, entonces existe un morfismo de grupos abelianos $\psi : A \to \mathbb{Z}$ que no puede extenderse a un morfismo con dominio B.*

.

Teorema

(i) *Todo subgrupo de un W-grupo es un W-grupo.*

(ii) *Todo W-grupo es libre de torsión.*

(iii) *Si $A \leq B$, en donde B es un W-grupo pero B/A no es un W-grupo, entonces existe un morfismo de grupos abelianos $\psi : A \to \mathbb{Z}$ que no puede extenderse a un morfismo con dominio B.*

.

Definición

Sea A un grupo abeliano libre de torsión y $B \leq A$.

(i) *Decimos que B es **puro** en A si A/B es libre de torsión.*

(ii) *Definimos la **cerradura pura** de B en A como el conjunto*

$$\ddot{B} = \{a \in A \big| (\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})(na \in B)\}.$$

Teorema (Criterio de Pontryagin)

Sea A un grupo abeliano numerable libre de torsión tal que todo subgrupo finitamente generado de A está contenido en un subgrupo puro en A que es finitamente generado. Entonces, A es libre.

Definición

Sea A un grupo abeliano libre de torsión y $B \leq A$.

(i) *Decimos que B es **puro** en A si A/B es libre de torsión.*

(ii) *Definimos la **cerradura pura** de B en A como el conjunto*

$$\ddot{B} = \{a \in A \big| (\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})(na \in B)\}.$$

Teorema (Criterio de Pontryagin)

Sea A un grupo abeliano numerable libre de torsión tal que todo subgrupo finitamente generado de A está contenido en un subgrupo puro en A que es finitamente generado. Entonces, A es libre.

Definición

Sea A un grupo abeliano libre de torsión y $B \leq A$.

(i) *Decimos que B es **puro** en A si A/B es libre de torsión.*

(ii) *Definimos la **cerradura pura** de B en A como el conjunto*

$$\ddot{B} = \{a \in A \big| (\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})(na \in B)\}.$$

Teorema (Criterio de Pontryagin)

Sea A un grupo abeliano numerable libre de torsión tal que todo subgrupo finitamente generado de A está contenido en un subgrupo puro en A que es finitamente generado. Entonces, A es libre.

Definición

Sea A un grupo abeliano libre de torsión y $B \leq A$.

(i) *Decimos que B es **puro** en A si A/B es libre de torsión.*

(ii) *Definimos la **cerradura pura** de B en A como el conjunto*

$$\ddot{B} = \{a \in A \big| (\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})(na \in B)\}.$$

Teorema (Criterio de Pontryagin)

Sea A un grupo abeliano numerable libre de torsión tal que todo subgrupo finitamente generado de A está contenido en un subgrupo puro en A que es finitamente generado. Entonces, A es libre.

Definición

Sea A un grupo abeliano libre de torsión y $B \leq A$.

- (i) *Decimos que B es **puro** en A si A/B es libre de torsión.*
- (ii) *Definimos la **cerradura pura** de B en A como el conjunto*

$$\ddot{B} = \{a \in A \big| (\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})(na \in B)\}.$$

Teorema (Criterio de Pontryagin)

Sea A un grupo abeliano numerable libre de torsión tal que todo subgrupo finitamente generado de A está contenido en un subgrupo puro en A que es finitamente generado. Entonces, A es libre.

Definición

*Sea B un grupo abeliano. Un $(B,\mathbb{Z})$-**grupo** es un grupo C tal que su conjunto subyacente es $B\times\mathbb{Z}$ y tal que $\pi : C\to B$ es morfismo de grupos abelianos, amén de que $(\forall m,n\in\mathbb{Z})((0,n)+(0,m)=(0,m+n))$.*

Para un grupo abeliano B, el ejemplo más sencillo de un $(B,\mathbb{Z})$-grupo es $B\oplus\mathbb{Z}$. Si logramos encontrar un $(B,\mathbb{Z})$-grupo C tal que $\pi : C\to B$ no se escinde, habremos demostrado que B no es un W-grupo.

Lema

Sean $B\leq A$, con A un W-grupo y tal que A/B no es W-grupo. Sea C un $(B,\mathbb{Z})$-grupo y ρ una escisión para $\pi : C\to B$. Entonces, existe un $(A,\mathbb{Z})$-grupo D que es extensión de C tal que ρ no puede extenderse a una escisión para $\pi : D\to A$.

Definición

*Sea B un grupo abeliano. Un $(B, \mathbb{Z})$**-grupo** es un grupo C tal que su conjunto subyacente es $B \times \mathbb{Z}$ y tal que $\pi : C \to B$ es morfismo de grupos abelianos, amén de que $(\forall m, n \in \mathbb{Z})((0, n) + (0, m) = (0, m + n))$.*

Para un grupo abeliano B, el ejemplo más sencillo de un $(B, \mathbb{Z})$-grupo es $B \oplus \mathbb{Z}$. Si logramos encontrar un $(B, \mathbb{Z})$-grupo C tal que $\pi : C \to B$ no se escinde, habremos demostrado que B no es un W-grupo.

Lema

Sean $B \leq A$, con A un W-grupo y tal que A/B no es W-grupo. Sea C un $(B, \mathbb{Z})$-grupo y ρ una escisión para $\pi : C \to B$. Entonces, existe un $(A, \mathbb{Z})$-grupo D que es extensión de C tal que ρ no puede extenderse a una escisión para $\pi : D \to A$.

Definición

*Sea B un grupo abeliano. Un $(B,\mathbb{Z})$-**grupo** es un grupo C tal que su conjunto subyacente es $B\times\mathbb{Z}$ y tal que $\pi : C \to B$ es morfismo de grupos abelianos, amén de que $(\forall m,n\in\mathbb{Z})((0,n)+(0,m)=(0,m+n))$.*

Para un grupo abeliano B, el ejemplo más sencillo de un $(B,\mathbb{Z})$-grupo es $B\oplus\mathbb{Z}$. Si logramos encontrar un $(B,\mathbb{Z})$-grupo C tal que $\pi : C\to B$ no se escinde, habremos demostrado que B no es un W-grupo.

Lema

Sean $B\leq A$, con A un W-grupo y tal que A/B no es W-grupo. Sea C un $(B,\mathbb{Z})$-grupo y ρ una escisión para $\pi : C\to B$. Entonces, existe un $(A,\mathbb{Z})$-grupo D que es extensión de C tal que ρ no puede extenderse a una escisión para $\pi : D\to A$.

Definición

*Sea B un grupo abeliano. Un $(B, \mathbb{Z})$**-grupo** es un grupo C tal que su conjunto subyacente es $B \times \mathbb{Z}$ y tal que $\pi : C \to B$ es morfismo de grupos abelianos, amén de que $(\forall m, n \in \mathbb{Z})((0, n) + (0, m) = (0, m + n))$.*

Para un grupo abeliano B, el ejemplo más sencillo de un $(B, \mathbb{Z})$-grupo es $B \oplus \mathbb{Z}$. Si logramos encontrar un $(B, \mathbb{Z})$-grupo C tal que $\pi : C \to B$ no se escinde, habremos demostrado que B no es un W-grupo.

Lema

Sean $B \leq A$, con A un W-grupo y tal que A/B no es W-grupo. Sea C un $(B, \mathbb{Z})$-grupo y ρ una escisión para $\pi : C \to B$. Entonces, existe un $(A, \mathbb{Z})$-grupo D que es extensión de C tal que ρ no puede extenderse a una escisión para $\pi : D \to A$.

Teorema

Todo W-grupo numerable es libre.

Demostración: Si A es W-grupo entonces es libre de torsión. Supongamos que A no satisface el criterio de Pontryagin, es decir, que hay un $B_0 \leq A$ finitamente generado que no está contenido en ningún subgrupo puro finitamente generado de A. Si B es la cerradura pura de B_0 en A, B no será finitamente generado.Por consiguiente, B es la unión de una cadena estricta de grupos finitamente generados $\langle B_n \big| n < \omega \rangle$. Por la definición de cerradura pura, B/B_0 es de torsión.Construiremos una cadena de grupos estricta $\langle C_n \big| n < \omega \rangle$ tal que cada C_n es un $(B_n, \mathbb{Z})$-grupo libre de torsión, y tal que $\pi : C = \bigcup_{n<\omega} C_n \to B$ no se pueda escindir.Sea S un conjunto finito de generadores de B_0. Todo morfismo de grupos abelianos $\sigma : B \to D$ con codominio libre de torsión está completamente determinado por sus valores en S.

Teorema

Todo W-grupo numerable es libre.

Demostración: Si A es W-grupo entonces es libre de torsión. Supongamos que A no satisface el criterio de Pontryagin, es decir, que hay un $B_0 \leq A$ finitamente generado que no está contenido en ningún subgrupo puro finitamente generado de A. Si B es la cerradura pura de B_0 en A, B no será finitamente generado.Por consiguiente, B es la unión de una cadena estricta de grupos finitamente generados $\langle B_n \big| n < \omega \rangle$. Por la definición de cerradura pura, B/B_0 es de torsión.Construiremos una cadena de grupos estricta $\langle C_n \big| n < \omega \rangle$ tal que cada C_n es un $(B_n, \mathbb{Z})$-grupo libre de torsión, y tal que $\pi : C = \bigcup_{n<\omega} C_n \to B$ no se pueda escindir.Sea S un conjunto finito de generadores de B_0. Todo morfismo de grupos abelianos $\sigma : B \to D$ con codominio libre de torsión está completamente determinado por sus valores en S.

Teorema

Todo W-grupo numerable es libre.

Demostración: Si A es W-grupo entonces es libre de torsión. Supongamos que A no satisface el criterio de Pontryagin, es decir, que hay un $B_0 \leq A$ finitamente generado que no está contenido en ningún subgrupo puro finitamente generado de A. Si B es la cerradura pura de B_0 en A, B no será finitamente generado. Por consiguiente, B es la unión de una cadena estricta de grupos finitamente generados $\langle B_n \big| n < \omega \rangle$. Por la definición de cerradura pura, B/B_0 es de torsión. Construiremos una cadena de grupos estricta $\langle C_n \big| n < \omega \rangle$ tal que cada C_n es un $(B_n, \mathbb{Z})$-grupo libre de torsión, y tal que $\pi : C = \bigcup_{n<\omega} C_n \to B$ no se pueda escindir. Sea S un conjunto finito de generadores de B_0. Todo morfismo de grupos abelianos $\sigma : B \to D$ con codominio libre de torsión está completamente determinado por sus valores en S.

Teorema

Todo W-grupo numerable es libre.

Demostración: Si A es W-grupo entonces es libre de torsión. Supongamos que A no satisface el criterio de Pontryagin, es decir, que hay un $B_0 \leq A$ finitamente generado que no está contenido en ningún subgrupo puro finitamente generado de A. Si B es la cerradura pura de B_0 en A, B no será finitamente generado.Por consiguiente, B es la unión de una cadena estricta de grupos finitamente generados $\langle B_n \big| n < \omega \rangle$. Por la definición de cerradura pura, B/B_0 es de torsión.Construiremos una cadena de grupos estricta $\langle C_n \big| n < \omega \rangle$ tal que cada C_n es un $(B_n, \mathbb{Z})$-grupo libre de torsión, y tal que $\pi : C = \bigcup_{n<\omega} C_n \to B$ no se pueda escindir.Sea S un conjunto finito de generadores de B_0. Todo morfismo de grupos abelianos $\sigma : B \to D$ con codominio libre de torsión está completamente determinado por sus valores en S.

Teorema

Todo W-grupo numerable es libre.

Demostración: Si A es W-grupo entonces es libre de torsión. Supongamos que A no satisface el criterio de Pontryagin, es decir, que hay un $B_0 \leq A$ finitamente generado que no está contenido en ningún subgrupo puro finitamente generado de A. Si B es la cerradura pura de B_0 en A, B no será finitamente generado.Por consiguiente, B es la unión de una cadena estricta de grupos finitamente generados $\langle B_n \big| n < \omega\rangle$. Por la definición de cerradura pura, B/B_0 es de torsión.Construiremos una cadena de grupos estricta $\langle C_n \big| n < \omega\rangle$ tal que cada C_n es un $(B_n, \mathbb{Z})$-grupo libre de torsión, y tal que $\pi : C = \bigcup_{n<\omega} C_n \to B$ no se pueda escindir.Sea S un conjunto finito de generadores de B_0. Todo morfismo de grupos abelianos $\sigma : B \to D$ con codominio libre de torsión está completamente determinado por sus valores en S.

Teorema

Todo W-grupo numerable es libre.

Demostración: Si A es W-grupo entonces es libre de torsión. Supongamos que A no satisface el criterio de Pontryagin, es decir, que hay un $B_0 \leq A$ finitamente generado que no está contenido en ningún subgrupo puro finitamente generado de A. Si B es la cerradura pura de B_0 en A, B no será finitamente generado.Por consiguiente, B es la unión de una cadena estricta de grupos finitamente generados $\langle B_n \big| n < \omega \rangle$. Por la definición de cerradura pura, B/B_0 es de torsión.Construiremos una cadena de grupos estricta $\langle C_n \big| n < \omega \rangle$ tal que cada C_n es un $(B_n, \mathbb{Z})$-grupo libre de torsión, y tal que $\pi : C = \bigcup_{n<\omega} C_n \to B$ no se pueda escindir.Sea S un conjunto finito de generadores de B_0. Todo morfismo de grupos abelianos $\sigma : B \to D$ con codominio libre de torsión está completamente determinado por sus valores en S.

Así, sean $\{g_n \big| n < \omega\}$ todas las funciones que van de S en $S \times \mathbb{Z}$. Definimos C_0 como $B_0 \oplus \mathbb{Z}$. Una vez que ya conocemos C_n, hay dos casos:

1. Si g_n puede extenderse a una escisión ρ para $\pi : C_n \to B_n$, entonces por el lema anterior existe un $(B_{n+1}, \mathbb{Z})$-grupo C_{n+1}, que es extensión de C_n y tal que ρ no se extiende a una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_{n+1}$.
2. En caso contrario, tomamos ρ como cualquier escisión para $\pi : C_n \to B_n$ y definimos a C_{n+1} igual que en el caso anterior.

Así, tendremos que $\pi : C = \bigcup_{n<\omega} C_n \to B$ no se escinde, pues si lo hiciera mediante $\rho : B \to C$, entonces $(\exists n < \omega)(\rho \upharpoonright S = g_n)$, luego $\rho \upharpoonright B_n$ será una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_n$ que extiende a g_n y que se extiende a una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_{n+1}$. Concluimos que B no es un W-grupo. Esto es una contradicción. $\square$

Así, sean $\{g_n \big| n < \omega\}$ todas las funciones que van de S en $S \times \mathbb{Z}$. Definimos C_0 como $B_0 \oplus \mathbb{Z}$. Una vez que ya conocemos C_n, hay dos casos:

1. Si g_n puede extenderse a una escisión ρ para $\pi : C_n \to B_n$, entonces por el lema anterior existe un $(B_{n+1}, \mathbb{Z})$-grupo C_{n+1}, que es extensión de C_n y tal que ρ no se extiende a una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_{n+1}$.
2. En caso contrario, tomamos ρ como cualquier escisión para $\pi : C_n \to B_n$ y definimos a C_{n+1} igual que en el caso anterior.

Así, tendremos que $\pi : C = \bigcup_{n<\omega} C_n \to B$ no se escinde, pues si lo hiciera mediante $\rho : B \to C$, entonces $(\exists n < \omega)(\rho \restriction S = g_n)$, luego $\rho \restriction B_n$ será una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_n$ que extiende a g_n y que se extiende a una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_{n+1}$. Concluimos que B no es un W-grupo. Esto es una contradicción. $\square$

Así, sean $\{g_n \big| n < \omega\}$ todas las funciones que van de S en $S \times \mathbb{Z}$. Definimos C_0 como $B_0 \oplus \mathbb{Z}$. Una vez que ya conocemos C_n, hay dos casos:

1. Si g_n puede extenderse a una escisión ρ para $\pi : C_n \to B_n$, entonces por el lema anterior existe un $(B_{n+1}, \mathbb{Z})$-grupo C_{n+1}, que es extensión de C_n y tal que ρ no se extiende a una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_{n+1}$.
2. En caso contrario, tomamos ρ como cualquier escisión para $\pi : C_n \to B_n$ y definimos a C_{n+1} igual que en el caso anterior.

Así, tendremos que $\pi : C = \bigcup\limits_{n<\omega} C_n \to B$ no se escinde, pues si lo hiciera mediante $\rho : B \to C$, entonces $(\exists n < \omega)(\rho \upharpoonright S = g_n)$, luego $\rho \upharpoonright B_n$ será una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_n$ que extiende a g_n y que se extiende a una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_{n+1}$. Concluimos que B no es un W-grupo. Esto es una contradicción. $\square$

Así, sean $\{g_n \big| n < \omega\}$ todas las funciones que van de S en $S \times \mathbb{Z}$. Definimos C_0 como $B_0 \oplus \mathbb{Z}$. Una vez que ya conocemos C_n, hay dos casos:

1. Si g_n puede extenderse a una escisión ρ para $\pi : C_n \to B_n$, entonces por el lema anterior existe un $(B_{n+1}, \mathbb{Z})$-grupo C_{n+1}, que es extensión de C_n y tal que ρ no se extiende a una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_{n+1}$.
2. En caso contrario, tomamos ρ como cualquier escisión para $\pi : C_n \to B_n$ y definimos a C_{n+1} igual que en el caso anterior.

Así, tendremos que $\pi : C = \bigcup\limits_{n<\omega} C_n \to B$ no se escinde, pues si lo hiciera mediante $\rho : B \to C$, entonces $(\exists n < \omega)(\rho \restriction S = g_n)$, luego $\rho \restriction B_n$ será una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_n$ que extiende a g_n y que se extiende a una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_{n+1}$. Concluimos que B no es un W-grupo. Esto es una contradicción. $\square$

Así, sean $\{g_n | n < \omega\}$ todas las funciones que van de S en $S \times \mathbb{Z}$. Definimos C_0 como $B_0 \oplus \mathbb{Z}$. Una vez que ya conocemos C_n, hay dos casos:

1. Si g_n puede extenderse a una escisión ρ para $\pi : C_n \to B_n$, entonces por el lema anterior existe un $(B_{n+1}, \mathbb{Z})$-grupo C_{n+1}, que es extensión de C_n y tal que ρ no se extiende a una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_{n+1}$.
2. En caso contrario, tomamos ρ como cualquier escisión para $\pi : C_n \to B_n$ y definimos a C_{n+1} igual que en el caso anterior.

Así, tendremos que $\pi : C = \bigcup_{n<\omega} C_n \to B$ no se escinde, pues si lo hiciera mediante $\rho : B \to C$, entonces $(\exists n < \omega)(\rho \restriction S = g_n)$, luego $\rho \restriction B_n$ será una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_n$ que extiende a g_n y que se extiende a una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_{n+1}$. Concluimos que B no es un W-grupo. Esto es una contradicción. $\square$

Así, sean $\{g_n \big| n < \omega\}$ todas las funciones que van de S en $S \times \mathbb{Z}$. Definimos C_0 como $B_0 \oplus \mathbb{Z}$. Una vez que ya conocemos C_n, hay dos casos:

1. Si g_n puede extenderse a una escisión ρ para $\pi : C_n \to B_n$, entonces por el lema anterior existe un $(B_{n+1}, \mathbb{Z})$-grupo C_{n+1}, que es extensión de C_n y tal que ρ no se extiende a una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_{n+1}$.
2. En caso contrario, tomamos ρ como cualquier escisión para $\pi : C_n \to B_n$ y definimos a C_{n+1} igual que en el caso anterior.

Así, tendremos que $\pi : C = \bigcup_{n<\omega} C_n \to B$ no se escinde, pues si lo hiciera mediante $\rho : B \to C$, entonces $(\exists n < \omega)(\rho \restriction S = g_n)$, luego $\rho \restriction B_n$ será una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_n$ que extiende a g_n y que se extiende a una escisión para $\pi : C_{n+1} \to B_{n+1}$. Concluimos que B no es un W-grupo. Esto es una contradicción. $\square$

Definición

Sean $\kappa \in \mathrm{Card}$ *y* A *un grupo abeliano.*

(i) *Decimos que* A *es* κ***-libre*** *si* $(\forall B \leq A)(|B| < \kappa \Rightarrow B \text{ es libre})$*.*

(ii) *Siendo* A κ*-libre y* $B \leq A$*, decimos que* B *es* κ***-puro*** *en* A *si* A/B *es* κ*-libre.*

Corolario

Todo W-grupo es $\aleph_1$*-libre.* □

Definición

Sean $\kappa \in \mathrm{Card}$ *y* A *un grupo abeliano.*

- (i) *Decimos que* A *es* κ***-libre*** *si* $(\forall B \leq A)(|B| < \kappa \Rightarrow B \text{ es libre})$.
- (ii) *Siendo* A κ*-libre y* $B \leq A$*, decimos que* B *es* κ***-puro*** *en* A *si* A/B *es* κ*-libre.*

Corolario

Todo W-grupo es $\aleph_1$*-libre.* □

Definición

Sean $\kappa \in \mathrm{Card}$ *y* A *un grupo abeliano.*

(i) *Decimos que* A *es* κ***-libre*** *si* $(\forall B \leq A)(|B| < \kappa \Rightarrow B \text{ es libre})$.

(ii) *Siendo* A κ*-libre y* $B \leq A$*, decimos que* B *es* κ***-puro*** *en* A *si* A/B *es* κ*-libre.*

Corolario

Todo W-grupo es $\aleph_1$*-libre.* □

Definición

Sean $\kappa \in \mathrm{Card}$ *y* A *un grupo abeliano.*

(i) *Decimos que* A *es* κ***-libre*** *si* $(\forall B \leq A)(|B| < \kappa \Rightarrow B \text{ es libre})$.

(ii) *Siendo* A κ*-libre y* $B \leq A$*, decimos que* B *es* κ***-puro*** *en* A *si* A/B *es* κ*-libre.*

Corolario

Todo W-grupo es $\aleph_1$*-libre.*

Definición

Sean $\kappa \in \mathrm{Card}$ *y* A *un grupo abeliano.*

(i) *Decimos que* A *es* κ***-libre*** *si* $(\forall B \leq A)(|B| < \kappa \Rightarrow B \text{ es libre})$.

(ii) *Siendo* A κ*-libre y* $B \leq A$*, decimos que* B *es* κ***-puro*** *en* A *si* A/B *es* κ*-libre.*

Corolario

Todo W-grupo es $\aleph_1$*-libre.* □

Lo que sigue a continuación, es generalizar las hipótesis del Criterio de Pontryagin.

Definición

Sea A un grupo abeliano. Diremos que A satisface la ***condición de Chase*** *si A es un grupo $\aleph_1$-libre tal que todo subgrupo numerable de A está contenido en un subgrupo numerable $\aleph_1$-puro en A.*

Lema

Sea A un grupo abeliano de orden $\aleph_1$. Entonces, A satisface la condición de Chase $\iff$ A es la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que $A_0 = \langle 0 \rangle$ y que para todo $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}$ es $\aleph_1$-puro en A.

Lo que sigue a continuación, es generalizar las hipótesis del Criterio de Pontryagin.

Definición

Sea A un grupo abeliano. Diremos que A satisface la ***condición de Chase*** *si A es un grupo $\aleph_1$-libre tal que todo subgrupo numerable de A está contenido en un subgrupo numerable $\aleph_1$-puro en A.*

Lema

Sea A un grupo abeliano de orden $\aleph_1$. Entonces, A satisface la condición de Chase $\iff$ A es la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que $A_0 = \langle 0 \rangle$ y que para todo $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}$ es $\aleph_1$-puro en A.

Lo que sigue a continuación, es generalizar las hipótesis del Criterio de Pontryagin.

Definición

*Sea A un grupo abeliano. Diremos que A satisface la **condición de Chase** si A es un grupo $\aleph_1$-libre tal que todo subgrupo numerable de A está contenido en un subgrupo numerable $\aleph_1$-puro en A.*

Lema

Sea A un grupo abeliano de orden $\aleph_1$. Entonces, A satisface la condición de Chase $\iff$ A es la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que $A_0 = \langle 0 \rangle$ y que para todo $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}$ es $\aleph_1$-puro en A.

Teorema

Sea A un grupo abeliano que satisface la condición de Chase, y que por lo tanto es, por el lema anterior, la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ con $A_0 = \langle 0 \rangle$ y $A_{\alpha+1}$ $\aleph_1$-puro en A para todo $\alpha < \omega_1$. Sea

$$E = \{\alpha < \omega_1 \big| A_\alpha \text{ no es } \aleph_1\text{−puro en } A\}$$

(nótese que E consta de puros ordinales límite). Entonces, A es libre $\iff$ E no es estacionario en ω_1.

Demostración: ($\Leftarrow$) Si E no es estacionario, sea $\langle \alpha_\beta \big| \beta < \omega_1 \rangle$ un club que no intersecta a E, y consideremos los grupos $B_\beta = A_{\alpha_\beta}$. Entonces, $\langle B_\beta \big| \beta < \omega_1 \rangle$ será una cadena suave de grupos cuya unión es A.Observamos que B_β es $\aleph_1$-puro en A, para todo $\alpha < \omega_1$, por lo tanto A/B_β es $\aleph_1$-libre. Concluimos que para todo $\beta < \omega_1$, $B_{\beta+1}/B_\beta$ es libre.Sin perder generalidad puedo suponer que $B_0 = A_0 = \langle 0 \rangle$. Luego A es libre.

Teorema

Sea A un grupo abeliano que satisface la condición de Chase, y que por lo tanto es, por el lema anterior, la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ con $A_0 = \langle 0 \rangle$ y $A_{\alpha+1}$ $\aleph_1$-puro en A para todo $\alpha < \omega_1$. Sea

$$E = \{\alpha < \omega_1 \big| A_\alpha \text{ no es } \aleph_1\text{-puro en } A\}$$

(nótese que E consta de puros ordinales límite). Entonces, A es libre $\iff$ E no es estacionario en ω_1.

DEMOSTRACIÓN: ($\Leftarrow$) Si E no es estacionario, sea $\langle \alpha_\beta \big| \beta < \omega_1 \rangle$ un club que no intersecta a E, y consideremos los grupos $B_\beta = A_{\alpha_\beta}$. Entonces, $\langle B_\beta \big| \beta < \omega_1 \rangle$ será una cadena suave de grupos cuya unión es A.Observamos que B_β es $\aleph_1$-puro en A, para todo $\alpha < \omega_1$, por lo tanto A/B_β es $\aleph_1$-libre. Concluimos que para todo $\beta < \omega_1$, $B_{\beta+1}/B_\beta$ es libre.Sin perder generalidad puedo suponer que $B_0 = A_0 = \langle 0 \rangle$. Luego A es libre.

Teorema

Sea A un grupo abeliano que satisface la condición de Chase, y que por lo tanto es, por el lema anterior, la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ con $A_0 = \langle 0 \rangle$ y $A_{\alpha+1}$ $\aleph_1$-puro en A para todo $\alpha < \omega_1$. Sea

$$E = \{\alpha < \omega_1 \big| A_\alpha \text{ no es } \aleph_1\text{-puro en } A\}$$

(nótese que E consta de puros ordinales límite). Entonces, A es libre $\iff$ E no es estacionario en ω_1.

Demostración: ($\Leftarrow$) Si E no es estacionario, sea $\langle \alpha_\beta \big| \beta < \omega_1 \rangle$ un club que no intersecta a E, y consideremos los grupos $B_\beta = A_{\alpha_\beta}$. Entonces, $\langle B_\beta \big| \beta < \omega_1 \rangle$ será una cadena suave de grupos cuya unión es A. Observamos que B_β es $\aleph_1$-puro en A, para todo $\alpha < \omega_1$, por lo tanto A/B_β es $\aleph_1$-libre. Concluimos que para todo $\beta < \omega_1$, $B_{\beta+1}/B_\beta$ es libre. Sin perder generalidad puedo suponer que $B_0 = A_0 = \langle 0 \rangle$. Luego A es libre.

Teorema

Sea A un grupo abeliano que satisface la condición de Chase, y que por lo tanto es, por el lema anterior, la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ con $A_0 = \langle 0 \rangle$ y $A_{\alpha+1}$ $\aleph_1$-puro en A para todo $\alpha < \omega_1$. Sea

$$E = \{\alpha < \omega_1 \big| A_\alpha \text{ no es } \aleph_1\text{-puro en } A\}$$

(nótese que E consta de puros ordinales límite). Entonces, A es libre $\iff$ E no es estacionario en ω_1.

Demostración: ($\Leftarrow$) Si E no es estacionario, sea $\langle \alpha_\beta \big| \beta < \omega_1 \rangle$ un club que no intersecta a E, y consideremos los grupos $B_\beta = A_{\alpha_\beta}$. Entonces, $\langle B_\beta \big| \beta < \omega_1 \rangle$ será una cadena suave de grupos cuya unión es A.Observamos que B_β es $\aleph_1$-puro en A, para todo $\alpha < \omega_1$, por lo tanto A/B_β es $\aleph_1$-libre. Concluimos que para todo $\beta < \omega_1$, $B_{\beta+1}/B_\beta$ es libre.Sin perder generalidad puedo suponer que $B_0 = A_0 = \langle 0 \rangle$. Luego A es libre.

Teorema

Sea A un grupo abeliano que satisface la condición de Chase, y que por lo tanto es, por el lema anterior, la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ con $A_0 = \langle 0 \rangle$ y $A_{\alpha+1}$ $\aleph_1$-puro en A para todo $\alpha < \omega_1$. Sea

$$E = \{\alpha < \omega_1 \big| A_\alpha \text{ no es } \aleph_1\text{−puro en } A\}$$

(nótese que E consta de puros ordinales límite). Entonces, A es libre $\iff$ E no es estacionario en ω_1.

Demostración: ($\Leftarrow$) Si E no es estacionario, sea $\langle \alpha_\beta \big| \beta < \omega_1 \rangle$ un club que no intersecta a E, y consideremos los grupos $B_\beta = A_{\alpha_\beta}$. Entonces, $\langle B_\beta \big| \beta < \omega_1 \rangle$ será una cadena suave de grupos cuya unión es A.Observamos que B_β es $\aleph_1$-puro en A, para todo $\alpha < \omega_1$, por lo tanto A/B_β es $\aleph_1$-libre. Concluimos que para todo $\beta < \omega_1$, $B_{\beta+1}/B_\beta$ es libre.Sin perder generalidad puedo suponer que $B_0 = A_0 = \langle 0 \rangle$. Luego A es libre.

($\Rightarrow$) Supongamos que A es un grupo abeliano libre con base X. Construiremos una cadena suave $\langle X_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de subconjuntos de X y una función normal $f : \omega_1 \to \omega_1$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$, X_α será una base de $A_{f(\alpha)}$. Ponemos $X_0 = \varnothing$ y $f(0) = 0$. Para el caso cuando $\alpha < \omega_1$ es un ordinal límite, basta poner $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$ y $f(\alpha) = \sup\{f(\beta) \big| \beta < \alpha\}$. Ahora, si ya conocemos X_α, tomemos un $Y_0 \in [X]^{\leq\omega}$ tal que $X_\alpha \subsetneq Y_0$, y $\sigma_0 \in \mathrm{Ord}$ tal que $Y_0 \subseteq A_{\sigma_0}$, a continuación tomamos $Y_1 \in [X]^{\leq\omega}$ tal que $A_{\sigma_0} \subseteq \langle Y_1 \rangle$, y así por inducción obtenemos una cadena $\langle Y_n \big| n < \omega \rangle$ de subconjuntos numerables de X que contienen a X_α, y una sucesión creciente de ordinales $\langle \sigma_n \big| n < \omega \rangle$ mayores que $f(\alpha)$ tales que para cada $n < \omega$, se tiene que $Y_n \subseteq A_{\sigma_n} \subseteq \langle Y_{n+1} \rangle$. Si hacemos $X_{\alpha+1} = \bigcup_{n<\omega} Y_n$ y $f(\alpha+1) = \sup\{\sigma_n \big| n < \omega\}$, entonces $X_{\alpha+1}$ será base de $A_{f(\alpha+1)} = \bigcup_{n<\omega} A_{\sigma_n} = \bigcup_{n<\omega} \langle Y_n \rangle$. Para cada $\alpha < \omega_1$, al ser $A/A_{f(\alpha)}$ grupo libre con base $\{x + A_{f(\alpha)} \big| x \in X \setminus X_\alpha\}$, en particular es $\aleph_1$-libre y por lo tanto $A_{f(\alpha)}$ será $\aleph_1$-puro en A, por lo cual $\{f(\alpha) \big| \alpha < \omega_1\}$ será un conjunto cerrado y no acotado que no intersecta a E.

($\Rightarrow$) Supongamos que A es un grupo abeliano libre con base X. Construiremos una cadena suave $\langle X_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de subconjuntos de X y una función normal $f : \omega_1 \to \omega_1$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$, X_α será una base de $A_{f(\alpha)}$.Ponemos $X_0 = \varnothing$ y $f(0) = 0$. Para el caso cuando $\alpha < \omega_1$ es un ordinal límite, basta poner $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$ y $f(\alpha) = \sup\{f(\beta) \big| \beta < \alpha\}$.Ahora, si ya conocemos X_α, tomemos un $Y_0 \in [X]^{\leq\omega}$ tal que $X_\alpha \subsetneq Y_0$, y $\sigma_0 \in \mathrm{Ord}$ tal que $Y_0 \subseteq A_{\sigma_0}$, a continuación tomamos $Y_1 \in [X]^{\leq\omega}$ tal que $A_{\sigma_0} \subseteq \langle Y_1 \rangle$, y así por inducción obtenemos una cadena $\langle Y_n \big| n < \omega \rangle$ de subconjuntos numerables de X que contienen a X_α, y una sucesión creciente de ordinales $\langle \sigma_n \big| n < \omega \rangle$ mayores que $f(\alpha)$ tales que para cada $n < \omega$, se tiene que $Y_n \subseteq A_{\sigma_n} \subseteq \langle Y_{n+1} \rangle$.Si hacemos $X_{\alpha+1} = \bigcup_{n<\omega} Y_n$ y $f(\alpha+1) = \sup\{\sigma_n \big| n < \omega\}$, entonces $X_{\alpha+1}$ será base de $A_{f(\alpha+1)} = \bigcup_{n<\omega} A_{\sigma_n} = \bigcup_{n<\omega} \langle Y_n \rangle$. Para cada $\alpha < \omega_1$, al ser $A/A_{f(\alpha)}$ grupo libre con base $\{x + A_{f(\alpha)} \big| x \in X \setminus X_\alpha\}$, en particular es $\aleph_1$-libre y por lo tanto $A_{f(\alpha)}$ será $\aleph_1$-puro en A, por lo cual $\{f(\alpha) \big| \alpha < \omega_1\}$ será un conjunto cerrado y no acotado que no intersecta a E.

($\Rightarrow$) Supongamos que A es un grupo abeliano libre con base X. Construiremos una cadena suave $\langle X_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de subconjuntos de X y una función normal $f : \omega_1 \to \omega_1$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$, X_α será una base de $A_{f(\alpha)}$.Ponemos $X_0 = \varnothing$ y $f(0) = 0$. Para el caso cuando $\alpha < \omega_1$ es un ordinal límite, basta poner $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$ y $f(\alpha) = \sup\{f(\beta) \big| \beta < \alpha\}$.Ahora, si ya conocemos X_α, tomemos un $Y_0 \in [X]^{\leq\omega}$ tal que $X_\alpha \subsetneq Y_0$, y $\sigma_0 \in \mathrm{Ord}$ tal que $Y_0 \subseteq A_{\sigma_0}$, a continuación tomamos $Y_1 \in [X]^{\leq\omega}$ tal que $A_{\sigma_0} \subseteq \langle Y_1 \rangle$, y así por inducción obtenemos una cadena $\langle Y_n \big| n < \omega \rangle$ de subconjuntos numerables de X que contienen a X_α, y una sucesión creciente de ordinales $\langle \sigma_n \big| n < \omega \rangle$ mayores que $f(\alpha)$ tales que para cada $n < \omega$, se tiene que $Y_n \subseteq A_{\sigma_n} \subseteq \langle Y_{n+1} \rangle$.Si hacemos $X_{\alpha+1} = \bigcup_{n<\omega} Y_n$ y $f(\alpha+1) = \sup\{\sigma_n \big| n < \omega\}$, entonces $X_{\alpha+1}$ será base de $A_{f(\alpha+1)} = \bigcup_{n<\omega} A_{\sigma_n} = \bigcup_{n<\omega} \langle Y_n \rangle$. Para cada $\alpha < \omega_1$, al ser $A/A_{f(\alpha)}$ grupo libre con base $\{x + A_{f(\alpha)} \big| x \in X \setminus X_\alpha\}$, en particular es $\aleph_1$-libre y por lo tanto $A_{f(\alpha)}$ será $\aleph_1$-puro en A, por lo cual $\{f(\alpha) \big| \alpha < \omega_1\}$ será un conjunto cerrado y no acotado que no intersecta a E.

($\Rightarrow$) Supongamos que A es un grupo abeliano libre con base X. Construiremos una cadena suave $\langle X_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de subconjuntos de X y una función normal $f : \omega_1 \to \omega_1$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$, X_α será una base de $A_{f(\alpha)}$.Ponemos $X_0 = \varnothing$ y $f(0) = 0$. Para el caso cuando $\alpha < \omega_1$ es un ordinal límite, basta poner $X_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta$ y $f(\alpha) = \sup\{f(\beta) \big| \beta < \alpha\}$.Ahora, si ya conocemos X_α, tomemos un $Y_0 \in [X]^{\leq \omega}$ tal que $X_\alpha \subsetneq Y_0$, y $\sigma_0 \in \mathrm{Ord}$ tal que $Y_0 \subseteq A_{\sigma_0}$, a continuación tomamos $Y_1 \in [X]^{\leq \omega}$ tal que $A_{\sigma_0} \subseteq \langle Y_1 \rangle$, y así por inducción obtenemos una cadena $\langle Y_n \big| n < \omega \rangle$ de subconjuntos numerables de X que contienen a X_α, y una sucesión creciente de ordinales $\langle \sigma_n \big| n < \omega \rangle$ mayores que $f(\alpha)$ tales que para cada $n < \omega$, se tiene que $Y_n \subseteq A_{\sigma_n} \subseteq \langle Y_{n+1} \rangle$.Si hacemos $X_{\alpha+1} = \bigcup_{n<\omega} Y_n$ y $f(\alpha+1) = \sup\{\sigma_n \big| n < \omega\}$, entonces $X_{\alpha+1}$ será base de $A_{f(\alpha+1)} = \bigcup_{n<\omega} A_{\sigma_n} = \bigcup_{n<\omega} \langle Y_n \rangle$. Para cada $\alpha < \omega_1$, al ser $A/A_{f(\alpha)}$ grupo libre con base $\{x + A_{f(\alpha)} \big| x \in X \setminus X_\alpha\}$, en particular es $\aleph_1$-libre y por lo tanto $A_{f(\alpha)}$ será $\aleph_1$-puro en A, por lo cual $\{f(\alpha) \big| \alpha < \omega_1\}$ será un conjunto cerrado y no acotado que no intersecta a E.

($\Rightarrow$) Supongamos que A es un grupo abeliano libre con base X. Construiremos una cadena suave $\langle X_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de subconjuntos de X y una función normal $f : \omega_1 \to \omega_1$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$, X_α será una base de $A_{f(\alpha)}$.Ponemos $X_0 = \varnothing$ y $f(0) = 0$. Para el caso cuando $\alpha < \omega_1$ es un ordinal límite, basta poner $X_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} X_\beta$ y $f(\alpha) = \sup\{f(\beta) \big| \beta < \alpha\}$.Ahora, si ya conocemos X_α, tomemos un $Y_0 \in [X]^{\leq\omega}$ tal que $X_\alpha \subsetneq Y_0$, y $\sigma_0 \in \mathrm{Ord}$ tal que $Y_0 \subseteq A_{\sigma_0}$, a continuación tomamos $Y_1 \in [X]^{\leq\omega}$ tal que $A_{\sigma_0} \subseteq \langle Y_1 \rangle$, y así por inducción obtenemos una cadena $\langle Y_n \big| n < \omega \rangle$ de subconjuntos numerables de X que contienen a X_α, y una sucesión creciente de ordinales $\langle \sigma_n \big| n < \omega \rangle$ mayores que $f(\alpha)$ tales que para cada $n < \omega$, se tiene que $Y_n \subseteq A_{\sigma_n} \subseteq \langle Y_{n+1} \rangle$.Si hacemos $X_{\alpha+1} = \bigcup\limits_{n<\omega} Y_n$ y $f(\alpha+1) = \sup\{\sigma_n \big| n < \omega\}$, entonces $X_{\alpha+1}$ será base de $A_{f(\alpha+1)} = \bigcup\limits_{n<\omega} A_{\sigma_n} = \bigcup\limits_{n<\omega} \langle Y_n \rangle$. Para cada $\alpha < \omega_1$, al ser $A/A_{f(\alpha)}$ grupo libre con base $\{x + A_{f(\alpha)} \big| x \in X \setminus X_\alpha\}$, en particular es $\aleph_1$-libre y por lo tanto $A_{f(\alpha)}$ será $\aleph_1$-puro en A, por lo cual $\{f(\alpha) \big| \alpha < \omega_1\}$ será un conjunto cerrado y no acotado que no intersecta a E.

Teorema

Sea $\kappa \in \mathrm{Card}$ *regular y* E *un subconjunto estacionario en* κ. *Entonces,* $V = L$ *implica que hay una sucesión* $\langle S_\alpha \big| \alpha \in E \rangle$ *con* $S_\alpha \subseteq \alpha$ *para todo* $\alpha \in E$ *y tal que dado cualquier* $X \subseteq \kappa$, *el conjunto* $\{\alpha \in E \big| X \cap \alpha = S_\alpha\}$ *es estacionario en* κ.

Corolario

Sea B *la unión de una cadena suave estricta de conjuntos numerables* $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$, Y *un conjunto numerable, y* $E \subseteq \omega_1$ *estacionario. Entonces, hay una sucesión* $\langle g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times Y \big| \alpha \in E \rangle$ *tal que para toda función* $h : B \to B \times Y$ *que* $(\forall \alpha \in E)(h[B_\alpha] \subseteq B_\alpha \times Y)$, *entonces existe* $\alpha \in E$ *tal que* $h \restriction B_\alpha = g_\alpha$.

Teorema

Sea $\kappa \in \mathrm{Card}$ regular y E un subconjunto estacionario en κ. Entonces, $V = L$ implica que hay una sucesión $\langle S_\alpha \big| \alpha \in E\rangle$ con $S_\alpha \subseteq \alpha$ para todo $\alpha \in E$ y tal que dado cualquier $X \subseteq \kappa$, el conjunto $\{\alpha \in E \big| X \cap \alpha = S_\alpha\}$ es estacionario en κ.

Corolario

Sea B la unión de una cadena suave estricta de conjuntos numerables $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1\rangle$, Y un conjunto numerable, y $E \subseteq \omega_1$ estacionario. Entonces, hay una sucesión $\langle g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times Y \big| \alpha \in E\rangle$ tal que para toda función $h : B \to B \times Y$ que $(\forall \alpha \in E)(h[B_\alpha] \subseteq B_\alpha \times Y)$, entonces existe $\alpha \in E$ tal que $h \restriction B_\alpha = g_\alpha$.

Teorema

Sea $\kappa \in \mathrm{Card}$ *regular y* E *un subconjunto estacionario en* κ*. Entonces,* $V = L$ *implica que hay una sucesión* $\langle S_\alpha \big| \alpha \in E \rangle$ *con* $S_\alpha \subseteq \alpha$ *para todo* $\alpha \in E$ *y tal que dado cualquier* $X \subseteq \kappa$*, el conjunto* $\{\alpha \in E \big| X \cap \alpha = S_\alpha\}$ *es estacionario en* κ*.*

Corolario

Sea B *la unión de una cadena suave estricta de conjuntos numerables* $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$*,* Y *un conjunto numerable, y* $E \subseteq \omega_1$ *estacionario. Entonces, hay una sucesión* $\langle g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times Y \big| \alpha \in E \rangle$ *tal que para toda función* $h : B \to B \times Y$ *que* $(\forall \alpha \in E)(h[B_\alpha] \subseteq B_\alpha \times Y)$*, entonces existe* $\alpha \in E$ *tal que* $h \restriction B_\alpha = g_\alpha$*.*

Teorema

Sea B la unión de una cadena suave estricta $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de grupos libres numerables tales que $E = \{\alpha < \omega_1 \big| B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no es libre}\}$ es estacionario en ω_1. Entonces, B no es un W-grupo.

Demostración: Definiremos una cadena de grupos $\langle C_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que cada C_α sea un $(B_\alpha, \mathbb{Z})$-grupo y su unión C sea un $(B, \mathbb{Z})$-grupo tal que $\pi : C \to B$ no se escinda.Por el corolario anterior, tenemos funciones $\{g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z} \big| \alpha \in E\}$ tales que para cada $h : B \to B \times \mathbb{Z}$ que cumpla $\pi h = \mathrm{id}_B$, tendremos que $\mathrm{id}_{B_\alpha} = \mathrm{id}_B \restriction B_\alpha = (\pi h) \restriction B_\alpha = \pi(h \restriction B_\alpha)$, lo cual nos dice que $h[B_\alpha] \subseteq B_\alpha \times \mathbb{Z}$.Por lo tanto, hay un $\beta \in E$ tal que $h \restriction B_\beta = g_\beta$.

Teorema

Sea B la unión de una cadena suave estricta $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de grupos libres numerables tales que $E = \{\alpha < \omega_1 \big| B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no es libre}\}$ es estacionario en ω_1. Entonces, B no es un W-grupo.

Demostración: Definiremos una cadena de grupos $\langle C_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que cada C_α sea un $(B_\alpha, \mathbb{Z})$-grupo y su unión C sea un $(B, \mathbb{Z})$-grupo tal que $\pi : C \to B$ no se escinda.Por el corolario anterior, tenemos funciones $\{g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z} \big| \alpha \in E\}$ tales que para cada $h : B \to B \times \mathbb{Z}$ que cumpla $\pi h = \mathrm{id}_B$, tendremos que $\mathrm{id}_{B_\alpha} = \mathrm{id}_B \upharpoonright B_\alpha = (\pi h) \upharpoonright B_\alpha = \pi(h \upharpoonright B_\alpha)$, lo cual nos dice que $h[B_\alpha] \subseteq B_\alpha \times \mathbb{Z}$.Por lo tanto, hay un $\beta \in E$ tal que $h \upharpoonright B_\beta = g_\beta$.

Teorema

Sea B la unión de una cadena suave estricta $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de grupos libres numerables tales que $E = \{\alpha < \omega_1 \big| B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no es libre}\}$ es estacionario en ω_1. Entonces, B no es un W-grupo.

Demostración: Definiremos una cadena de grupos $\langle C_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que cada C_α sea un $(B_\alpha, \mathbb{Z})$-grupo y su unión C sea un $(B, \mathbb{Z})$-grupo tal que $\pi : C \to B$ no se escinda. Por el corolario anterior, tenemos funciones $\{g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z} \big| \alpha \in E\}$ tales que para cada $h : B \to B \times \mathbb{Z}$ que cumpla $\pi h = \mathrm{id}_B$, tendremos que $\mathrm{id}_{B_\alpha} = \mathrm{id}_B \restriction B_\alpha = (\pi h) \restriction B_\alpha = \pi(h \restriction B_\alpha)$, lo cual nos dice que $h[B_\alpha] \subseteq B_\alpha \times \mathbb{Z}$. Por lo tanto, hay un $\beta \in E$ tal que $h \restriction B_\beta = g_\beta$.

Teorema

Sea B la unión de una cadena suave estricta $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de grupos libres numerables tales que $E = \{\alpha < \omega_1 \big| B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no es libre}\}$ es estacionario en ω_1. Entonces, B no es un W-grupo.

DEMOSTRACIÓN: Definiremos una cadena de grupos $\langle C_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que cada C_α sea un $(B_\alpha, \mathbb{Z})$-grupo y su unión C sea un $(B, \mathbb{Z})$-grupo tal que $\pi : C \to B$ no se escinda.Por el corolario anterior, tenemos funciones $\{g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z} \big| \alpha \in E\}$ tales que para cada $h : B \to B \times \mathbb{Z}$ que cumpla $\pi h = \mathrm{id}_B$, tendremos que $\mathrm{id}_{B_\alpha} = \mathrm{id}_B \restriction B_\alpha = (\pi h) \restriction B_\alpha = \pi(h \restriction B_\alpha)$, lo cual nos dice que $h[B_\alpha] \subseteq B_\alpha \times \mathbb{Z}$.Por lo tanto, hay un $\beta \in E$ tal que $h \restriction B_\beta = g_\beta$.

Teorema

Sea B la unión de una cadena suave estricta $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de grupos libres numerables tales que $E = \{\alpha < \omega_1 \big| B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no es libre}\}$ es estacionario en ω_1. Entonces, B no es un W-grupo.

Demostración: Definiremos una cadena de grupos $\langle C_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que cada C_α sea un $(B_\alpha, \mathbb{Z})$-grupo y su unión C sea un $(B, \mathbb{Z})$-grupo tal que $\pi : C \to B$ no se escinda.Por el corolario anterior, tenemos funciones $\{g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z} \big| \alpha \in E\}$ tales que para cada $h : B \to B \times \mathbb{Z}$ que cumpla $\pi h = \mathrm{id}_B$, tendremos que $\mathrm{id}_{B_\alpha} = \mathrm{id}_B \restriction B_\alpha = (\pi h) \restriction B_\alpha = \pi(h \restriction B_\alpha)$, lo cual nos dice que $h[B_\alpha] \subseteq B_\alpha \times \mathbb{Z}$.Por lo tanto, hay un $\beta \in E$ tal que $h \restriction B_\beta = g_\beta$.

Sea C_0 cualquier $(B_0, \mathbb{Z})$-grupo. Si α es un ordinal límite, entonces hacemos $C_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$. Ahora, si conocemos C_α, para definir $C_{\alpha+1}$ hay dos casos:

1. Si $\alpha \in E$ y $g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z}$ es una escisión para $\pi : C_\alpha \to B_\alpha$. Entonces hay una extensión $C_{\alpha+1}$ de C_α tal que es un $(B_{\alpha+1}, \mathbb{Z})$-grupo de tal suerte que g_α no puede extenderse a una escisión para $\pi : C_{\alpha+1} \to B_{\alpha+1}$.
2. Si $\alpha \notin E$ o bien si $g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z}$ no es una escisión para $\pi : C_\alpha \to B_\alpha$, entonces tomamos $C_{\alpha+1}$ como cualquier $(B_{\alpha+1}, \mathbb{Z})$-grupo que extienda a C_α.

Ponemos $C = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$. Si hubiera una escisión $\rho : B \to C$, entonces habría un $\alpha \in E$ tal que $\rho \restriction B_\alpha = g_\alpha$, pero esto contradiría la definición de $C_{\alpha+1}$. Es por ello que π no se escinde y consecuentemente B no es un W-grupo. $\square$

Sea C_0 cualquier $(B_0, \mathbb{Z})$-grupo. Si α es un ordinal límite, entonces hacemos $C_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$. Ahora, si conocemos C_α, para definir $C_{\alpha+1}$ hay dos casos:

1. Si $\alpha \in E$ y $g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z}$ es una escisión para $\pi : C_\alpha \to B_\alpha$. Entonces hay una extensión $C_{\alpha+1}$ de C_α tal que es un $(B_{\alpha+1}, \mathbb{Z})$-grupo de tal suerte que g_α no puede extenderse a una escisión para $\pi : C_{\alpha+1} \to B_{\alpha+1}$.
2. Si $\alpha \notin E$ o bien si $g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z}$ no es una escisión para $\pi : C_\alpha \to B_\alpha$, entonces tomamos $C_{\alpha+1}$ como cualquier $(B_{\alpha+1}, \mathbb{Z})$-grupo que extienda a C_α.

Ponemos $C = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$. Si hubiera una escisión $\rho : B \to C$, entonces habría un $\alpha \in E$ tal que $\rho \upharpoonright B_\alpha = g_\alpha$, pero esto contradiría la definición de $C_{\alpha+1}$. Es por ello que π no se escinde y consecuentemente B no es un W-grupo. $\square$

Sea C_0 cualquier $(B_0, \mathbb{Z})$-grupo. Si α es un ordinal límite, entonces hacemos $C_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$. Ahora, si conocemos C_α, para definir $C_{\alpha+1}$ hay dos casos:

1. Si $\alpha \in E$ y $g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z}$ es una escisión para $\pi : C_\alpha \to B_\alpha$. Entonces hay una extensión $C_{\alpha+1}$ de C_α tal que es un $(B_{\alpha+1}, \mathbb{Z})$-grupo de tal suerte que g_α no puede extenderse a una escisión para $\pi : C_{\alpha+1} \to B_{\alpha+1}$.
2. Si $\alpha \notin E$ o bien si $g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z}$ no es una escisión para $\pi : C_\alpha \to B_\alpha$, entonces tomamos $C_{\alpha+1}$ como cualquier $(B_{\alpha+1}, \mathbb{Z})$-grupo que extienda a C_α.

Ponemos $C = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$. Si hubiera una escisión $\rho : B \to C$, entonces habría un $\alpha \in E$ tal que $\rho \restriction B_\alpha = g_\alpha$, pero esto contradiría la definición de $C_{\alpha+1}$. Es por ello que π no se escinde y consecuentemente B no es un W-grupo. □

Sea C_0 cualquier $(B_0, \mathbb{Z})$-grupo. Si α es un ordinal límite, entonces hacemos $C_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$. Ahora, si conocemos C_α, para definir $C_{\alpha+1}$ hay dos casos:

1. Si $\alpha \in E$ y $g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z}$ es una escisión para $\pi : C_\alpha \to B_\alpha$. Entonces hay una extensión $C_{\alpha+1}$ de C_α tal que es un $(B_{\alpha+1}, \mathbb{Z})$-grupo de tal suerte que g_α no puede extenderse a una escisión para $\pi : C_{\alpha+1} \to B_{\alpha+1}$.
2. Si $\alpha \notin E$ o bien si $g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z}$ no es una escisión para $\pi : C_\alpha \to B_\alpha$, entonces tomamos $C_{\alpha+1}$ como cualquier $(B_{\alpha+1}, \mathbb{Z})$-grupo que extienda a C_α.

Ponemos $C = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$. Si hubiera una escisión $\rho : B \to C$, entonces habría un $\alpha \in E$ tal que $\rho \restriction B_\alpha = g_\alpha$, pero esto contradiría la definición de $C_{\alpha+1}$. Es por ello que π no se escinde y consecuentemente B no es un W-grupo. $\square$

Sea C_0 cualquier $(B_0,\mathbb{Z})$-grupo. Si α es un ordinal límite, entonces hacemos $C_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$. Ahora, si conocemos C_α, para definir $C_{\alpha+1}$ hay dos casos:

1. Si $\alpha \in E$ y $g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z}$ es una escisión para $\pi : C_\alpha \to B_\alpha$. Entonces hay una extensión $C_{\alpha+1}$ de C_α tal que es un $(B_{\alpha+1},\mathbb{Z})$-grupo de tal suerte que g_α no puede extenderse a una escisión para $\pi : C_{\alpha+1} \to B_{\alpha+1}$.
2. Si $\alpha \notin E$ o bien si $g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z}$ no es una escisión para $\pi : C_\alpha \to B_\alpha$, entonces tomamos $C_{\alpha+1}$ como cualquier $(B_{\alpha+1},\mathbb{Z})$-grupo que extienda a C_α.

Ponemos $C = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$. Si hubiera una escisión $\rho : B \to C$, entonces habría un $\alpha \in E$ tal que $\rho \restriction B_\alpha = g_\alpha$, pero esto contradiría la definición de $C_{\alpha+1}$. Es por ello que π no se escinde y consecuentemente B no es un W-grupo. □

Sea C_0 cualquier $(B_0, \mathbb{Z})$-grupo. Si α es un ordinal límite, entonces hacemos $C_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$. Ahora, si conocemos C_α, para definir $C_{\alpha+1}$ hay dos casos:

1. Si $\alpha \in E$ y $g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z}$ es una escisión para $\pi : C_\alpha \to B_\alpha$. Entonces hay una extensión $C_{\alpha+1}$ de C_α tal que es un $(B_{\alpha+1}, \mathbb{Z})$-grupo de tal suerte que g_α no puede extenderse a una escisión para $\pi : C_{\alpha+1} \to B_{\alpha+1}$.
2. Si $\alpha \notin E$ o bien si $g_\alpha : B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z}$ no es una escisión para $\pi : C_\alpha \to B_\alpha$, entonces tomamos $C_{\alpha+1}$ como cualquier $(B_{\alpha+1}, \mathbb{Z})$-grupo que extienda a C_α.

Ponemos $C = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$. Si hubiera una escisión $\rho : B \to C$, entonces habría un $\alpha \in E$ tal que $\rho \upharpoonright B_\alpha = g_\alpha$, pero esto contradiría la definición de $C_{\alpha+1}$. Es por ello que π no se escinde y consecuentemente B no es un W-grupo. $\square$

Teorema (Shelah)

$ZFC + V = L$ *implica que todo W-grupo de cardinalidad* $\aleph_1$ *es libre.*

Demostración: Sea A un W-grupo de orden $\aleph_1$. Si A no satisfaciera la condición de Chase, habría un $B_0 \leq A$ numerable tal que para todo $C \leq A$ numerable con $B_0 \subseteq C$, hay un $C' \leq A$ numerable tal que C'/C no es libre.En particular, hay un $B_1 \leq A$ numerable tal que B_1/B_0 no es libre. Y si conocemos $B_\alpha \leq A$ numerable con $B_0 \subseteq B_\alpha$, entonces si $\alpha < \omega_1$ existirá un $B_{\alpha+1} \leq A$ numerable tal que $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre. Si α es un ordinal límite, definimos simplemente $B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$.Tenemos así una cadena suave estricta de subgrupos numerables de A, $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$, tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre y tal que $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$.En particular, $\{\alpha < \omega_1 \big| B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no es libre}\} = \omega_1$, el cual es estacionario en ω_1, por lo que el teorema anterior asegura que A no es un W-grupo y esto es autocontradictorio. Por lo tanto A satisface la condición de Chase.

Teorema (Shelah)

$ZFC + V = L$ *implica que todo W-grupo de cardinalidad* $\aleph_1$ *es libre.*

Demostración: Sea A un W-grupo de orden $\aleph_1$. Si A no satisfaciera la condición de Chase, habría un $B_0 \leq A$ numerable tal que para todo $C \leq A$ numerable con $B_0 \subseteq C$, hay un $C' \leq A$ numerable tal que C'/C no es libre.En particular, hay un $B_1 \leq A$ numerable tal que B_1/B_0 no es libre. Y si conocemos $B_\alpha \leq A$ numerable con $B_0 \subseteq B_\alpha$, entonces si $\alpha < \omega_1$ existirá un $B_{\alpha+1} \leq A$ numerable tal que $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre. Si α es un ordinal límite, definimos simplemente $B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$.Tenemos así una cadena suave estricta de subgrupos numerables de A, $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$, tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre y tal que $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$.En particular, $\{\alpha < \omega_1 \big| B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no es libre}\} = \omega_1$, el cual es estacionario en ω_1, por lo que el teorema anterior asegura que A no es un W-grupo y esto es autocontradictorio. Por lo tanto A satisface la condición de Chase.

Teorema (Shelah)

$ZFC + V = L$ *implica que todo W-grupo de cardinalidad* $\aleph_1$ *es libre.*

Demostración: Sea A un W-grupo de orden $\aleph_1$. Si A no satisfaciera la condición de Chase, habría un $B_0 \leq A$ numerable tal que para todo $C \leq A$ numerable con $B_0 \subseteq C$, hay un $C' \leq A$ numerable tal que C'/C no es libre. En particular, hay un $B_1 \leq A$ numerable tal que B_1/B_0 no es libre. Y si conocemos $B_\alpha \leq A$ numerable con $B_0 \subseteq B_\alpha$, entonces si $\alpha < \omega_1$ existirá un $B_{\alpha+1} \leq A$ numerable tal que $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre. Si α es un ordinal límite, definimos simplemente $B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$. Tenemos así una cadena suave estricta de subgrupos numerables de A, $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$, tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre y tal que $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$. En particular, $\{\alpha < \omega_1 \big| B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no es libre}\} = \omega_1$, el cual es estacionario en ω_1, por lo que el teorema anterior asegura que A no es un W-grupo y esto es autocontradictorio. Por lo tanto A satisface la condición de Chase.

Teorema (Shelah)

$ZFC + V = L$ *implica que todo W-grupo de cardinalidad* $\aleph_1$ *es libre.*

Demostración: Sea A un W-grupo de orden $\aleph_1$. Si A no satisfaciera la condición de Chase, habría un $B_0 \leq A$ numerable tal que para todo $C \leq A$ numerable con $B_0 \subseteq C$, hay un $C' \leq A$ numerable tal que C'/C no es libre.En particular, hay un $B_1 \leq A$ numerable tal que B_1/B_0 no es libre. Y si conocemos $B_\alpha \leq A$ numerable con $B_0 \subseteq B_\alpha$, entonces si $\alpha < \omega_1$ existirá un $B_{\alpha+1} \leq A$ numerable tal que $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre. Si α es un ordinal límite, definimos simplemente $B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$.Tenemos así una cadena suave estricta de subgrupos numerables de A, $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$, tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre y tal que $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$.En particular, $\{\alpha < \omega_1 \big| B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no es libre}\} = \omega_1$, el cual es estacionario en ω_1, por lo que el teorema anterior asegura que A no es un W-grupo y esto es autocontradictorio. Por lo tanto A satisface la condición de Chase.

Teorema (Shelah)

$ZFC + V = L$ implica que todo W-grupo de cardinalidad $\aleph_1$ es libre.

Demostración: Sea A un W-grupo de orden $\aleph_1$. Si A no satisfaciera la condición de Chase, habría un $B_0 \leq A$ numerable tal que para todo $C \leq A$ numerable con $B_0 \subseteq C$, hay un $C' \leq A$ numerable tal que C'/C no es libre.En particular, hay un $B_1 \leq A$ numerable tal que B_1/B_0 no es libre. Y si conocemos $B_\alpha \leq A$ numerable con $B_0 \subseteq B_\alpha$, entonces si $\alpha < \omega_1$ existirá un $B_{\alpha+1} \leq A$ numerable tal que $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre. Si α es un ordinal límite, definimos simplemente $B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$.Tenemos así una cadena suave estricta de subgrupos numerables de A, $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$, tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre y tal que $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$.En particular, $\{\alpha < \omega_1 \big| B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no es libre}\} = \omega_1$, el cual es estacionario en ω_1, por lo que el teorema anterior asegura que A no es un W-grupo y esto es autocontradictorio. Por lo tanto A satisface la condición de Chase.

Teorema (Shelah)

$ZFC + V = L$ *implica que todo W-grupo de cardinalidad* $\aleph_1$ *es libre.*

Demostración: Sea A un W-grupo de orden $\aleph_1$. Si A no satisfaciera la condición de Chase, habría un $B_0 \leq A$ numerable tal que para todo $C \leq A$ numerable con $B_0 \subseteq C$, hay un $C' \leq A$ numerable tal que C'/C no es libre.En particular, hay un $B_1 \leq A$ numerable tal que B_1/B_0 no es libre. Y si conocemos $B_\alpha \leq A$ numerable con $B_0 \subseteq B_\alpha$, entonces si $\alpha < \omega_1$ existirá un $B_{\alpha+1} \leq A$ numerable tal que $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre. Si α es un ordinal límite, definimos simplemente $B_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} B_\beta$.Tenemos así una cadena suave estricta de subgrupos numerables de A, $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$, tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre y tal que $A = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$.En particular, $\{\alpha < \omega_1 \big| B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no es libre}\} = \omega_1$, el cual es estacionario en ω_1, por lo que el teorema anterior asegura que A no es un W-grupo y esto es autocontradictorio. Por lo tanto A satisface la condición de Chase.

En consecuencia, A es la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ con $A_0 = \langle 0 \rangle$ y tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}$ es $\aleph_1$-puro en A. Sea $E = \{\alpha < \omega_1 \big| A_\alpha \text{ no es } \aleph_1\text{-puro en } A\}$ y $E' = \{\alpha < \omega_1 \big| A_{\alpha+1}/A_\alpha \text{ no es libre}\}$. Por el teorema anterior, dado que A es un W-grupo entonces E' no es estacionario. Pero resulta que se puede demostrar que $E' = E$, luego E no es estacionario, y así obtenemos que A es libre. □

En consecuencia, A es la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ con $A_0 = \langle 0 \rangle$ y tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}$ es $\aleph_1$-puro en A.Sea $E = \{\alpha < \omega_1 \big| A_\alpha \text{ no es } \aleph_1\text{−puro en } A\}$ y $E' = \{\alpha < \omega_1 \big| A_{\alpha+1}/A_\alpha \text{ no es libre}\}$. Por el teorema anterior, dado que A es un W-grupo entonces E' no es estacionario. Pero resulta que se puede demostrar que $E' = E$, luego E no es estacionario, y así obtenemos que A es libre. $\square$

En consecuencia, A es la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ con $A_0 = \langle 0 \rangle$ y tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}$ es $\aleph_1$-puro en A.Sea $E = \{\alpha < \omega_1 \big| A_\alpha \text{ no es } \aleph_1\text{−puro en } A\}$ y $E' = \{\alpha < \omega_1 \big| A_{\alpha+1}/A_\alpha \text{ no es libre}\}$. Por el teorema anterior, dado que A es un W-grupo entonces E' no es estacionario.Pero resulta que se puede demostrar que $E' = E$, luego E no es estacionario, y así obtenemos que A es libre. □

Teorema

Hay un grupo abeliano A de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase pero que no es libre.

Demostración: Definimos una cadena suave $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de grupos numerables, con $A_0 = \langle 0 \rangle$, tales que $(\forall \alpha < \omega_1)(A_\alpha \text{ es libre})$, $(\forall \beta < \alpha < \omega_1)(A_\alpha / A_{\beta+1} \text{ es libre})$, y para cada ordinal límite $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ no es libre.Una vez que tengamos esto, bastará poner $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ para obtener lo deseado:A satisface la condición de Chase, y la última condición de la cadena nos dice que el conjunto de $\alpha < \omega_1$ tales que A_α no es $\aleph_1$-libre consta al menos de todos los ordinales límite, luego dicho conjunto es estacionario. $A_0 = \langle 0 \rangle$. Si α es ordinal límite y conocemos A_β para cada $\beta < \alpha < \omega_1$, entonces escogemos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ con límite α ta que cada α_n sea un ordinal sucesor. Ponemos $A_\alpha = \bigcup_{n<\omega} A_{\alpha_n}$.

Teorema

Hay un grupo abeliano A de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase pero que no es libre.

Demostración: Definimos una cadena suave $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de grupos numerables, con $A_0 = \langle 0 \rangle$, tales que $(\forall \alpha < \omega_1)(A_\alpha \text{ es libre})$, $(\forall \beta < \alpha < \omega_1)(A_\alpha / A_{\beta+1} \text{ es libre})$, y para cada ordinal límite $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ no es libre.Una vez que tengamos esto, bastará poner $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ para obtener lo deseado:A satisface la condición de Chase, y la última condición de la cadena nos dice que el conjunto de $\alpha < \omega_1$ tales que A_α no es $\aleph_1$-libre consta al menos de todos los ordinales límite, luego dicho conjunto es estacionario. $A_0 = \langle 0 \rangle$. Si α es ordinal límite y conocemos A_β para cada $\beta < \alpha < \omega_1$, entonces escogemos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ con límite α ta que cada α_n sea un ordinal sucesor. Ponemos $A_\alpha = \bigcup_{n<\omega} A_{\alpha_n}$.

Teorema

Hay un grupo abeliano A de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase pero que no es libre.

Demostración: Definimos una cadena suave $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de grupos numerables, con $A_0 = \langle 0 \rangle$, tales que $(\forall \alpha < \omega_1)(A_\alpha \text{ es libre})$, $(\forall \beta < \alpha < \omega_1)(A_\alpha / A_{\beta+1} \text{ es libre})$, y para cada ordinal límite $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ no es libre. Una vez que tengamos esto, bastará poner $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ para obtener lo deseado: A satisface la condición de Chase, y la última condición de la cadena nos dice que el conjunto de $\alpha < \omega_1$ tales que A_α no es $\aleph_1$-libre consta al menos de todos los ordinales límite, luego dicho conjunto es estacionario. $A_0 = \langle 0 \rangle$. Si α es ordinal límite y conocemos A_β para cada $\beta < \alpha < \omega_1$, entonces escogemos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ con límite α ta que cada α_n sea un ordinal sucesor. Ponemos $A_\alpha = \bigcup_{n<\omega} A_{\alpha_n}$.

Teorema

Hay un grupo abeliano A de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase pero que no es libre.

Demostración: Definimos una cadena suave $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de grupos numerables, con $A_0 = \langle 0 \rangle$, tales que $(\forall \alpha < \omega_1)(A_\alpha \text{ es libre})$, $(\forall \beta < \alpha < \omega_1)(A_\alpha / A_{\beta+1} \text{ es libre})$, y para cada ordinal límite $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ no es libre.Una vez que tengamos esto, bastará poner $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ para obtener lo deseado:A satisface la condición de Chase, y la última condición de la cadena nos dice que el conjunto de $\alpha < \omega_1$ tales que A_α no es $\aleph_1$-libre consta al menos de todos los ordinales límite, luego dicho conjunto es estacionario. $A_0 = \langle 0 \rangle$. Si α es ordinal límite y conocemos A_β para cada $\beta < \alpha < \omega_1$, entonces escogemos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ con límite α ta que cada α_n sea un ordinal sucesor. Ponemos $A_\alpha = \bigcup_{n<\omega} A_{\alpha_n}$.

Teorema

Hay un grupo abeliano A de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase pero que no es libre.

Demostración: Definimos una cadena suave $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de grupos numerables, con $A_0 = \langle 0 \rangle$, tales que $(\forall \alpha < \omega_1)(A_\alpha \text{ es libre})$, $(\forall \beta < \alpha < \omega_1)(A_\alpha / A_{\beta+1} \text{ es libre})$, y para cada ordinal límite $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ no es libre.Una vez que tengamos esto, bastará poner $A = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ para obtener lo deseado:A satisface la condición de Chase, y la última condición de la cadena nos dice que el conjunto de $\alpha < \omega_1$ tales que A_α no es $\aleph_1$-libre consta al menos de todos los ordinales límite, luego dicho conjunto es estacionario. $A_0 = \langle 0 \rangle$. Si α es ordinal límite y conocemos A_β para cada $\beta < \alpha < \omega_1$, entonces escogemos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ con límite α ta que cada α_n sea un ordinal sucesor. Ponemos $A_\alpha = \bigcup\limits_{n<\omega} A_{\alpha_n}$.

Teorema

Hay un grupo abeliano A de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase pero que no es libre.

Demostración: Definimos una cadena suave $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de grupos numerables, con $A_0 = \langle 0 \rangle$, tales que $(\forall \alpha < \omega_1)(A_\alpha \text{ es libre})$, $(\forall \beta < \alpha < \omega_1)(A_\alpha / A_{\beta+1} \text{ es libre})$, y para cada ordinal límite $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ no es libre.Una vez que tengamos esto, bastará poner $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ para obtener lo deseado:A satisface la condición de Chase, y la última condición de la cadena nos dice que el conjunto de $\alpha < \omega_1$ tales que A_α no es $\aleph_1$-libre consta al menos de todos los ordinales límite, luego dicho conjunto es estacionario. $A_0 = \langle 0 \rangle$. Si α es ordinal límite y conocemos A_β para cada $\beta < \alpha < \omega_1$, entonces escogemos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ con límite α ta que cada α_n sea un ordinal sucesor. Ponemos $A_\alpha = \bigcup_{n<\omega} A_{\alpha_n}$.

Ahora supóngase que conocemos A_α, y que queremos definir $A_{\alpha+1}$, para $\alpha < \omega_1$. Entonces tenemos dos casos:

1. α no es límite. Entonces, hacemos $A_{\alpha+1} = A_\alpha \oplus \mathbb{Z}$.
2. α es un ordinal límite. Nuevamente tomamos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ con límite α, y de tal forma que cada α_n sea un ordinal sucesor y $\alpha_0 = 0$.Hay una cadena suave $\langle X_n \big| n < \omega \rangle$ de tal forma que cada X_n es base de A_{α_n}. Para cada $1 \leq n < \omega$ escogemos un $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$.Sea, para cada $n < \omega$, $Y_n = X_n \setminus \{x_n\}$ y sea B el subgrupo de A_α generado por $\bigcup_{n<\omega} Y_n$.Sea $P = \prod_{n=1}^{\infty} \langle x_n \rangle$, y para cada $1 \leq m < \omega$ sea
$$z_m = \sum_{n \geq m} \frac{n!}{m!} x_n \in P.$$
Definimos $A_{\alpha+1}$ como el subgrupo de $B \oplus P$ generado por $A_\alpha \cup \{z_m \big| 1 \leq m < \omega\}$.

Ahora supóngase que conocemos A_α, y que queremos definir $A_{\alpha+1}$, para $\alpha < \omega_1$. Entonces tenemos dos casos:

1. α no es límite. Entonces, hacemos $A_{\alpha+1} = A_\alpha \oplus \mathbb{Z}$.
2. α es un ordinal límite. Nuevamente tomamos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n | n < \omega \rangle$ con límite α, y de tal forma que cada α_n sea un ordinal sucesor y $\alpha_0 = 0$.Hay una cadena suave $\langle X_n | n < \omega \rangle$ de tal forma que cada X_n es base de A_{α_n}. Para cada $1 \leq n < \omega$ escogemos un $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$.Sea, para cada $n < \omega$, $Y_n = X_n \setminus \{x_n\}$ y sea B el subgrupo de A_α generado por $\bigcup_{n<\omega} Y_n$.Sea $P = \prod_{n=1}^{\infty} \langle x_n \rangle$, y para cada $1 \leq m < \omega$ sea
$$z_m = \sum_{n \geq m} \frac{n!}{m!} x_n \in P.$$
Definimos $A_{\alpha+1}$ como el subgrupo de $B \oplus P$ generado por $A_\alpha \cup \{z_m | 1 \leq m < \omega\}$.

Ahora supóngase que conocemos A_α, y que queremos definir $A_{\alpha+1}$, para $\alpha < \omega_1$. Entonces tenemos dos casos:

1. α no es límite. Entonces, hacemos $A_{\alpha+1} = A_\alpha \oplus \mathbb{Z}$.
2. α es un ordinal límite. Nuevamente tomamos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ con límite α, y de tal forma que cada α_n sea un ordinal sucesor y $\alpha_0 = 0$.Hay una cadena suave $\langle X_n \big| n < \omega \rangle$ de tal forma que cada X_n es base de A_{α_n}. Para cada $1 \leq n < \omega$ escogemos un $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$.Sea, para cada $n < \omega$, $Y_n = X_n \setminus \{x_n\}$ y sea B el subgrupo de A_α generado por $\bigcup_{n<\omega} Y_n$.Sea $P = \prod_{n=1}^{\infty} \langle x_n \rangle$, y para cada $1 \leq m < \omega$ sea
$$z_m = \sum_{n \geq m} \frac{n!}{m!} x_n \in P.$$
Definimos $A_{\alpha+1}$ como el subgrupo de $B \oplus P$ generado por $A_\alpha \cup \{z_m \big| 1 \leq m < \omega\}$.

Ahora supóngase que conocemos A_α, y que queremos definir $A_{\alpha+1}$, para $\alpha < \omega_1$. Entonces tenemos dos casos:

1. α no es límite. Entonces, hacemos $A_{\alpha+1} = A_\alpha \oplus \mathbb{Z}$.
2. α es un ordinal límite. Nuevamente tomamos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ con límite α, y de tal forma que cada α_n sea un ordinal sucesor y $\alpha_0 = 0$. Hay una cadena suave $\langle X_n \big| n < \omega \rangle$ de tal forma que cada X_n es base de A_{α_n}. Para cada $1 \leq n < \omega$ escogemos un $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$. Sea, para cada $n < \omega$, $Y_n = X_n \setminus \{x_n\}$ y sea B el subgrupo de A_α generado por $\bigcup_{n<\omega} Y_n$. Sea $P = \prod_{n=1}^{\infty} \langle x_n \rangle$, y para cada $1 \leq m < \omega$ sea
$$z_m = \sum_{n \geq m} \frac{n!}{m!} x_n \in P.$$
Definimos $A_{\alpha+1}$ como el subgrupo de $B \oplus P$ generado por $A_\alpha \cup \{z_m \big| 1 \leq m < \omega\}$.

Ahora supóngase que conocemos A_α, y que queremos definir $A_{\alpha+1}$, para $\alpha < \omega_1$. Entonces tenemos dos casos:

1. α no es límite. Entonces, hacemos $A_{\alpha+1} = A_\alpha \oplus \mathbb{Z}$.
2. α es un ordinal límite. Nuevamente tomamos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ con límite α, y de tal forma que cada α_n sea un ordinal sucesor y $\alpha_0 = 0$. Hay una cadena suave $\langle X_n \big| n < \omega \rangle$ de tal forma que cada X_n es base de A_{α_n}. Para cada $1 \leq n < \omega$ escogemos un $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$. Sea, para cada $n < \omega$, $Y_n = X_n \setminus \{x_n\}$ y sea B el subgrupo de A_α generado por $\bigcup_{n<\omega} Y_n$. Sea $P = \prod_{n=1}^{\infty} \langle x_n \rangle$, y para cada $1 \leq m < \omega$ sea
$$z_m = \sum_{n \geq m} \frac{n!}{m!} x_n \in P.$$
Definimos $A_{\alpha+1}$ como el subgrupo de $B \oplus P$ generado por $A_\alpha \cup \{z_m \big| 1 \leq m < \omega\}$.

Ahora supóngase que conocemos A_α, y que queremos definir $A_{\alpha+1}$, para $\alpha < \omega_1$. Entonces tenemos dos casos:

1. α no es límite. Entonces, hacemos $A_{\alpha+1} = A_\alpha \oplus \mathbb{Z}$.
2. α es un ordinal límite. Nuevamente tomamos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ con límite α, y de tal forma que cada α_n sea un ordinal sucesor y $\alpha_0 = 0$.Hay una cadena suave $\langle X_n \big| n < \omega \rangle$ de tal forma que cada X_n es base de A_{α_n}. Para cada $1 \leq n < \omega$ escogemos un $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$.Sea, para cada $n < \omega$, $Y_n = X_n \setminus \{x_n\}$ y sea B el subgrupo de A_α generado por $\bigcup_{n<\omega} Y_n$.Sea $P = \prod_{n=1}^{\infty} \langle x_n \rangle$, y para cada $1 \leq m < \omega$ sea
$$z_m = \sum_{n \geq m} \frac{n!}{m!} x_n \in P.$$
Definimos $A_{\alpha+1}$ como el subgrupo de $B \oplus P$ generado por $A_\alpha \cup \{z_m \big| 1 \leq m < \omega\}$.

Ahora supóngase que conocemos A_α, y que queremos definir $A_{\alpha+1}$, para $\alpha < \omega_1$. Entonces tenemos dos casos:

1. α no es límite. Entonces, hacemos $A_{\alpha+1} = A_\alpha \oplus \mathbb{Z}$.
2. α es un ordinal límite. Nuevamente tomamos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ con límite α, y de tal forma que cada α_n sea un ordinal sucesor y $\alpha_0 = 0$.Hay una cadena suave $\langle X_n \big| n < \omega \rangle$ de tal forma que cada X_n es base de A_{α_n}. Para cada $1 \leq n < \omega$ escogemos un $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$.Sea, para cada $n < \omega$, $Y_n = X_n \setminus \{x_n\}$ y sea B el subgrupo de A_α generado por $\bigcup_{n<\omega} Y_n$.Sea $P = \prod_{n=1}^{\infty} \langle x_n \rangle$, y para cada $1 \leq m < \omega$ sea
$$z_m = \sum_{n \geq m} \frac{n!}{m!} x_n \in P.$$
Definimos $A_{\alpha+1}$ como el subgrupo de $B \oplus P$ generado por $A_\alpha \cup \{z_m \big| 1 \leq m < \omega\}$.

Ahora supóngase que conocemos A_α, y que queremos definir $A_{\alpha+1}$, para $\alpha < \omega_1$. Entonces tenemos dos casos:

1. α no es límite. Entonces, hacemos $A_{\alpha+1} = A_\alpha \oplus \mathbb{Z}$.
2. α es un ordinal límite. Nuevamente tomamos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ con límite α, y de tal forma que cada α_n sea un ordinal sucesor y $\alpha_0 = 0$.Hay una cadena suave $\langle X_n \big| n < \omega \rangle$ de tal forma que cada X_n es base de A_{α_n}. Para cada $1 \leq n < \omega$ escogemos un $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$.Sea, para cada $n < \omega$, $Y_n = X_n \setminus \{x_n\}$ y sea B el subgrupo de A_α generado por $\bigcup_{n<\omega} Y_n$.Sea $P = \prod_{n=1}^{\infty} \langle x_n \rangle$, y para cada $1 \leq m < \omega$ sea
$$z_m = \sum_{n \geq m} \frac{n!}{m!} x_n \in P.$$
Definimos $A_{\alpha+1}$ como el subgrupo de $B \oplus P$ generado por $A_\alpha \cup \{z_m \big| 1 \leq m < \omega\}$.

Ahora supóngase que conocemos A_α, y que queremos definir $A_{\alpha+1}$, para $\alpha < \omega_1$. Entonces tenemos dos casos:

1. α no es límite. Entonces, hacemos $A_{\alpha+1} = A_\alpha \oplus \mathbb{Z}$.
2. α es un ordinal límite. Nuevamente tomamos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ con límite α, y de tal forma que cada α_n sea un ordinal sucesor y $\alpha_0 = 0$.Hay una cadena suave $\langle X_n \big| n < \omega \rangle$ de tal forma que cada X_n es base de A_{α_n}. Para cada $1 \leq n < \omega$ escogemos un $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$.Sea, para cada $n < \omega$, $Y_n = X_n \setminus \{x_n\}$ y sea B el subgrupo de A_α generado por $\bigcup\limits_{n<\omega} Y_n$.Sea $P = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \langle x_n \rangle$, y para cada $1 \leq m < \omega$ sea
$$z_m = \sum_{n \geq m} \frac{n!}{m!} x_n \in P.$$
Definimos $A_{\alpha+1}$ como el subgrupo de $B \oplus P$ generado por $A_\alpha \cup \{z_m \big| 1 \leq m < \omega\}$.

Teorema

$ZFC + MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implica que todo grupo abeliano de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase es un W-grupo.

Demostración: Sea A un grupo de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase, y $\pi : B \to A$ un epimorfismo con $\ker(\pi) \cong \mathbb{Z}$.Sea $\mathbb{P} = \{\varphi : S \to B \in \mathrm{Hom}(S, B) \big| \pi\varphi = \mathrm{id}_S \wedge (S \text{ es un subgrupo finitamente generado puro en } A)\}$, equipado con la relación de preorden $\varphi \leq \psi \iff \psi \subseteq \varphi$.Entonces, $\mathbb{P}$ es un conjunto preordenado no vacío, y cumple c.c.c. (esto último es bastante latoso de demostrar).Para cada $a \in A$, sea $D_a = \{\varphi \in \mathbb{P} \big| a \in \mathrm{dom}(\varphi)\}$, y resulta más o menos rutinario observar que D_a es denso en $\mathbb{P}$.Por lo tanto, MA nos asegura que, si $\mathcal{D} = \{D_a \big| a \in A\}$, entonces hay un filtro G que es $\mathcal{D}$-genérico.

Teorema

$ZFC + MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implica que todo grupo abeliano de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase es un W-grupo.

Demostración: Sea A un grupo de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase, y $\pi : B \to A$ un epimorfismo con $\ker(\pi) \cong \mathbb{Z}$.Sea $\mathbb{P} = \{\varphi : S \to B \in \mathrm{Hom}(S, B) \big| \pi\varphi = \mathrm{id}_S \wedge (S \text{ es un subgrupo finitamente generado puro en } A)\}$, equipado con la relación de preorden $\varphi \leq \psi \iff \psi \subseteq \varphi$.Entonces, $\mathbb{P}$ es un conjunto preordenado no vacío, y cumple c.c.c. (esto último es bastante latoso de demostrar).Para cada $a \in A$, sea $D_a = \{\varphi \in \mathbb{P} \big| a \in \mathrm{dom}(\varphi)\}$, y resulta más o menos rutinario observar que D_a es denso en $\mathbb{P}$.Por lo tanto, MA nos asegura que, si $\mathcal{D} = \{D_a \big| a \in A\}$, entonces hay un filtro G que es $\mathcal{D}$-genérico.

Teorema

$ZFC + MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implica que todo grupo abeliano de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase es un W-grupo.

Demostración: Sea A un grupo de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase, y $\pi : B \to A$ un epimorfismo con $\ker(\pi) \cong \mathbb{Z}$.Sea $\mathbb{P} = \{\varphi : S \to B \in \mathrm{Hom}(S, B) \big| \pi\varphi = \mathrm{id}_S \wedge (S \text{ es un subgrupo finitamente generado puro en } A)\}$, equipado con la relación de preorden $\varphi \leq \psi \iff \psi \subseteq \varphi$.Entonces, $\mathbb{P}$ es un conjunto preordenado no vacío, y cumple c.c.c. (esto último es bastante latoso de demostrar).Para cada $a \in A$, sea $D_a = \{\varphi \in \mathbb{P} \big| a \in \mathrm{dom}(\varphi)\}$, y resulta más o menos rutinario observar que D_a es denso en $\mathbb{P}$.Por lo tanto, MA nos asegura que, si $\mathcal{D} = \{D_a \big| a \in A\}$, entonces hay un filtro G que es $\mathcal{D}$-genérico.

Teorema

$ZFC + MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implica que todo grupo abeliano de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase es un W-grupo.

Demostración: Sea A un grupo de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase, y $\pi : B \to A$ un epimorfismo con $\ker(\pi) \cong \mathbb{Z}$.Sea $\mathbb{P} = \{\varphi : S \to B \in \mathrm{Hom}(S, B) \big| \pi\varphi = \mathrm{id}_S \wedge (S \text{ es un subgrupo finitamente generado puro en } A)\}$, equipado con la relación de preorden $\varphi \leq \psi \iff \psi \subseteq \varphi$.Entonces, $\mathbb{P}$ es un conjunto preordenado no vacío, y cumple c.c.c. (esto último es bastante latoso de demostrar).Para cada $a \in A$, sea $D_a = \{\varphi \in \mathbb{P} \big| a \in \mathrm{dom}(\varphi)\}$, y resulta más o menos rutinario observar que D_a es denso en $\mathbb{P}$.Por lo tanto, MA nos asegura que, si $\mathcal{D} = \{D_a \big| a \in A\}$, entonces hay un filtro G que es $\mathcal{D}$-genérico.

Teorema

$ZFC + MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implica que todo grupo abeliano de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase es un W-grupo.

Demostración: Sea A un grupo de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase, y $\pi : B \to A$ un epimorfismo con $\ker(\pi) \cong \mathbb{Z}$.Sea $\mathbb{P} = \{\varphi : S \to B \in \mathrm{Hom}(S, B) \big| \pi\varphi = \mathrm{id}_S \wedge (S \text{ es un subgrupo finitamente generado puro en } A)\}$, equipado con la relación de preorden $\varphi \leq \psi \iff \psi \subseteq \varphi$.Entonces, $\mathbb{P}$ es un conjunto preordenado no vacío, y cumple c.c.c. (esto último es bastante latoso de demostrar).Para cada $a \in A$, sea $D_a = \{\varphi \in \mathbb{P} \big| a \in \mathrm{dom}(\varphi)\}$, y resulta más o menos rutinario observar que D_a es denso en $\mathbb{P}$.Por lo tanto, MA nos asegura que, si $\mathcal{D} = \{D_a \big| a \in A\}$, entonces hay un filtro G que es $\mathcal{D}$-genérico.

Teorema

$ZFC + MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implica que todo grupo abeliano de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase es un W-grupo.

Demostración: Sea A un grupo de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase, y $\pi : B \to A$ un epimorfismo con $\ker(\pi) \cong \mathbb{Z}$.Sea $\mathbb{P} = \{\varphi : S \to B \in \mathrm{Hom}(S, B) \big| \pi\varphi = \mathrm{id}_S \wedge (S \text{ es un subgrupo finitamente generado puro en } A)\}$, equipado con la relación de preorden $\varphi \leq \psi \iff \psi \subseteq \varphi$.Entonces, $\mathbb{P}$ es un conjunto preordenado no vacío, y cumple c.c.c. (esto último es bastante latoso de demostrar).Para cada $a \in A$, sea $D_a = \{\varphi \in \mathbb{P} \big| a \in \mathrm{dom}(\varphi)\}$, y resulta más o menos rutinario observar que D_a es denso en $\mathbb{P}$.Por lo tanto, MA nos asegura que, si $\mathcal{D} = \{D_a \big| a \in A\}$, entonces hay un filtro G que es $\mathcal{D}$-genérico.

Teorema

$ZFC + MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ *implica que todo grupo abeliano de cardinalidad* $\aleph_1$ *que satisface la condición de Chase es un W-grupo.*

Demostración: Sea A un grupo de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase, y $\pi : B \to A$ un epimorfismo con $\ker(\pi) \cong \mathbb{Z}$.Sea $\mathbb{P} = \{\varphi : S \to B \in \mathrm{Hom}(S, B) \big| \pi\varphi = \mathrm{id}_S \wedge (S \text{ es un subgrupo finitamente generado puro en } A)\}$, equipado con la relación de preorden $\varphi \leq \psi \iff \psi \subseteq \varphi$.Entonces, $\mathbb{P}$ es un conjunto preordenado no vacío, y cumple c.c.c. (esto último es bastante latoso de demostrar).Para cada $a \in A$, sea $D_a = \{\varphi \in \mathbb{P} \big| a \in \mathrm{dom}(\varphi)\}$, y resulta más o menos rutinario observar que D_a es denso en $\mathbb{P}$.Por lo tanto, MA nos asegura que, si $\mathcal{D} = \{D_a \big| a \in A\}$, entonces hay un filtro G que es $\mathcal{D}$-genérico.

Es claro que, al ser G filtro, $g = \bigcup G$ será una función, y por ser $\mathcal{D}$-genérico tendremos que $A = \mathrm{dom}(g)$. Además, g cumple con la siguiente propiedad: Para cada $F \in [A]^{<\omega}$ hay una $f \in \mathbb{P}$ tal que $F \subseteq \mathrm{dom}(f)$ y $g \upharpoonright F = f \upharpoonright F$. En efecto, al ser $F = \{a_1, \dots, a_n\}$, hay elementos $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{P}$ tales que $(\forall i \in n+1 \setminus \{0\})(g_i \in G \cap D_{a_i})$, al ser G un filtro y n finito, existe una $h \in G$ que extiende a todas las f_i, h es el elemento que estamos buscando. Finalmente, g es homomorfismo: pues si $a, b \in A$ entonces hay una $f \in \mathbb{P}$ tal que $f \upharpoonright \{a, b, a+b\} = g \upharpoonright \{a, b, a+b\}$, luego $g(a+b) = f(a+b) = f(a) + f(b) = g(a) + g(b)$. Además, tenemos que $\pi g(a) = \pi(f(a)) = a$, luego $\pi g = \mathrm{id}_A$ y g es escisión para π, con lo cual concluimos que A es un W-grupo. $\square$

Es claro que, al ser G filtro, $g = \bigcup G$ será una función, y por ser $\mathcal{D}$-genérico tendremos que $A = \mathrm{dom}(g)$.Además, g cumple con la siguiente propiedad: Para cada $F \in [A]^{<\omega}$ hay una $f \in \mathbb{P}$ tal que $F \subseteq \mathrm{dom}(f)$ y $g \upharpoonright F = f \upharpoonright F$. En efecto, al ser $F = \{a_1, \dots, a_n\}$, hay elementos $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{P}$ tales que $(\forall i \in n+1 \setminus \{0\})(g_i \in G \cap D_{a_i})$, al ser G un filtro y n finito, existe una $h \in G$ que extiende a todas las f_i, h es el elemento que estamos buscando.
Finalmente, g es homomorfismo: pues si $a, b \in A$ entonces hay una $f \in \mathbb{P}$ tal que $f \upharpoonright \{a, b, a+b\} = g \upharpoonright \{a, b, a+b\}$, luego $g(a+b) = f(a+b) = f(a) + f(b) = g(a) + g(b)$. Además, tenemos que $\pi g(a) = \pi(f(a)) = a$, luego $\pi g = \mathrm{id}_A$ y g es escisión para π, con lo cual concluimos que A es un W-grupo. □

Es claro que, al ser G filtro, $g = \bigcup G$ será una función, y por ser $\mathcal{D}$-genérico tendremos que $A = \mathrm{dom}(g)$.Además, g cumple con la siguiente propiedad: Para cada $F \in [A]^{<\omega}$ hay una $f \in \mathbb{P}$ tal que $F \subseteq \mathrm{dom}(f)$ y $g \upharpoonright F = f \upharpoonright F$. En efecto, al ser $F = \{a_1, \dots, a_n\}$, hay elementos $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{P}$ tales que $(\forall i \in n+1 \setminus \{0\})(g_i \in G \cap D_{a_i})$, al ser G un filtro y n finito, existe una $h \in G$ que extiende a todas las f_i, h es el elemento que estamos buscando. Finalmente, g es homomorfismo: pues si $a, b \in A$ entonces hay una $f \in \mathbb{P}$ tal que $f \upharpoonright \{a, b, a+b\} = g \upharpoonright \{a, b, a+b\}$, luego $g(a+b) = f(a+b) = f(a) + f(b) = g(a) + g(b)$. Además, tenemos que $\pi g(a) = \pi(f(a)) = a$, luego $\pi g = \mathrm{id}_A$ y g es escisión para π, con lo cual concluimos que A es un W-grupo. $\square$

- Devlin, Keith J. *Constructibility*, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag.
- Eklof, Paul C., “Whitehead Problem is Undecidable"; *American Mathematical Monthly* **83** 10 (1976), 775-788.
- Hrbacek, Karel y Jech, Thomas; *Introduction to set theory.* 3rd. ed., Pure and Applied Mathematics (220), Marcel Dekker, 1999.
- Shelah, Saharon, “Infinite abelian groups, whitehead problem and some constructions"; *Israel Journal of Mathematics*; **18** (1974), 243-256.
- Shelah, Saharon, “A compactness theorem for singular cardinals, free algebras, Whitehead problem and transversals"; *Israel Journal of Mathematics*; **21** (1975), 319-349.

- Devlin, Keith J. *Constructibility*, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag.
- Eklof, Paul C., “Whitehead Problem is Undecidable"; *American Mathematical Monthly* **83** 10 (1976), 775-788.
- Hrbacek, Karel y Jech, Thomas; *Introduction to set theory.* 3rd. ed., Pure and Applied Mathematics (220), Marcel Dekker, 1999.
- Shelah, Saharon, “Infinite abelian groups, whitehead problem and some constructions"; *Israel Journal of Mathematics*; **18** (1974), 243-256.
- Shelah, Saharon, “A compactness theorem for singular cardinals, free algebras, Whitehead problem and transversals"; *Israel Journal of Mathematics*; **21** (1975), 319-349.

- Devlin, Keith J. *Constructibility*, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag.
- Eklof, Paul C., “Whitehead Problem is Undecidable"; *American Mathematical Monthly* **83** 10 (1976), 775-788.
- Hrbacek, Karel y Jech, Thomas; *Introduction to set theory.* 3rd. ed., Pure and Applied Mathematics (220), Marcel Dekker, 1999.
- Shelah, Saharon, “Infinite abelian groups, whitehead problem and some constructions"; *Israel Journal of Mathematics*; **18** (1974), 243-256.
- Shelah, Saharon, “A compactness theorem for singular cardinals, free algebras, Whitehead problem and transversals"; *Israel Journal of Mathematics*; **21** (1975), 319-349.

- Devlin, Keith J. *Constructibility*, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag.
- Eklof, Paul C., “Whitehead Problem is Undecidable"; *American Mathematical Monthly* **83** 10 (1976), 775-788.
- Hrbacek, Karel y Jech, Thomas; *Introduction to set theory.* 3rd. ed., Pure and Applied Mathematics (220), Marcel Dekker, 1999.
- Shelah, Saharon, “Infinite abelian groups, whitehead problem and some constructions"; *Israel Journal of Mathematics*; **18** (1974), 243-256.
- Shelah, Saharon, “A compactness theorem for singular cardinals, free algebras, Whitehead problem and transversals"; *Israel Journal of Mathematics*; **21** (1975), 319-349.

- Devlin, Keith J. *Constructibility*, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag.
- Eklof, Paul C., “Whitehead Problem is Undecidable"; *American Mathematical Monthly* **83** 10 (1976), 775-788.
- Hrbacek, Karel y Jech, Thomas; *Introduction to set theory.* 3rd. ed., Pure and Applied Mathematics (220), Marcel Dekker, 1999.
- Shelah, Saharon, “Infinite abelian groups, whitehead problem and some constructions"; *Israel Journal of Mathematics*; **18** (1974), 243-256.
- Shelah, Saharon, “A compactness theorem for singular cardinals, free algebras, Whitehead problem and transversals"; *Israel Journal of Mathematics*; **21** (1975), 319-349.

Si te interesan las notas sobre este tema, pídemelas escribiendo a:

`davidfb@matmor.unam.mx`