# Minicurso: Teoría de Ramsey (y algunas aplicaciones)

David Fernández (UNAM/IPN); Alfonso Ruiz (Escuela Bourbaki)

**Slogan:** "El caos (total) es imposible"

"Toda estructura matemática lo suficientemente grande tendrá subestructuras con cierto orden".

"Dado $n$, hay un $N$ (suficientemente grande) tal que: siempre que $\boxed{\text{coloreo}}$ una estructura de tamaño $N$, habrá una subestructura de tamaño $n$ que es monocromática."

en dos colores

(1) Estructura $\equiv$ sin estructura.

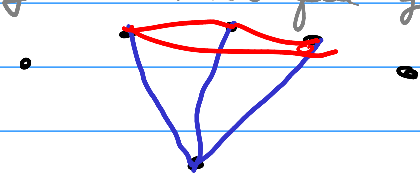
$n=2 \rightsquigarrow N=3$

en general, $n \rightsquigarrow N=2n-1$

(2) Estructura $\equiv$ Gráficas completas (aristas)

$n=3 \rightsquigarrow N=6$

"Si coloreo las aristas de $K_6$, hay 3 vértices que forman un triángulo monocromático."



(Teorema de Ramsey): Dado $n$, hay $N$ tal que: $\forall$ coloración de $K_N$, existen $n$ vértices $v_1, \dots, v_n$ tales que $[v_1, \dots, v_n]$ es monocromático.

Números de Ramsey $\quad R(n) = \min\{N \mid \text{-----}\}$

$R(3)=6$; $\quad R(4)=18$,

$43 \le R(5) \le 48 \qquad 102 \le R(6) \le 165$, ----

③ Estructura: Segmento inicial de $\mathbb{N}$; equipado con $+$.

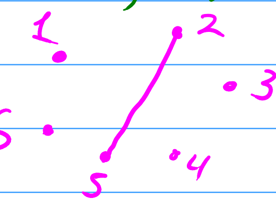
Subestructura: Generadores $\rightsquigarrow$ Sus sumas finitas (sin repeticiones)

$n=2 \rightsquigarrow N=6$: Si coloreo los enteros $1,\dots,6$ hay $x,y$ tales que $\{x, y, x+y\}$ es monocromático.

(teorema de Schur, ~1912)

Dada una coloración $C$

Colorea $K_6 \xrightarrow{d} 6$




$d(nm) = C(|n-m|)$

Por Ramsey, hay $a,b,c$, tales que $\Delta_{abc}$ es monocromático. $a<b<c$

$x = b-a$; $y = c-b$.

Folkman-Rado-Sanders ~64

$n=3 \rightsquigarrow$ Hay $N$ tal que: Si coloreo $1,\dots,N$ hay $x,y,z$ tales que $\{x, y, z, x+y, y+z, x+z, x+y+z\}$

Dado $n$, hay $N$ tal que: si coloreo $1,\dots,N$ hay $x_1,\dots,x_n$ con $FS(x_1,\dots,x_n)$ monocromático

④ Estructura: Segmentos iniciales de $\mathbb{N}$ con estructura métrica/orden

subestructura: Sucesión aritmética

el mínimo $N$ se denota $W(n)$

Teorema de van der Waerden: Dado $n$, existe $N$ tal que: si coloreo $1,\dots,N$; hay una sucesión aritmética de longitud $n$ monocromática

$a,b$ tales que $\{a, a+b, a+2b, \dots, a+(n-1)b\}$

$n=3$; $W(3)=9$

Gowers $W(n) \leq 2^{2^{2^{2^{2^{n+9}}}}}$

# Teoremas de Goodman

$n=3 \rightsquigarrow$ triángulo.

Dado $N$, si yo coloreo las aristas de $K_N$... ¿Cuántos triángulos monocromáticos hay?

$T$ = número de triángulos monocromáticos.

Ramsey: $N \le 5 \Rightarrow T = 0$

$N \ge 6 \Rightarrow T \ge 1$

Teorema (Goodman): Dado $N$,

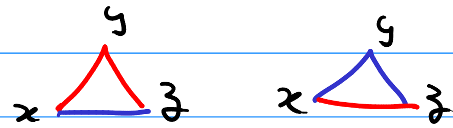
$$T \ge \begin{cases} \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3}; & \text{si } N = 2n \\ \dfrac{2(n)(n-1)(4n+1)}{3}; & \text{si } N = 4n+1 \\ \dfrac{2n(n+1)(4n-1)}{3}; & \text{si } N = 4n+3 \end{cases}$$

(Para $N=6$ Goodman dice: $T \ge 2$)

Supongamos que coloreamos $K_6$

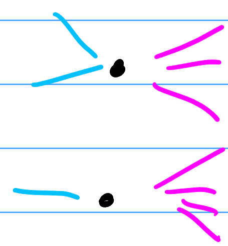
Total de triángulos: $\binom{6}{3} = 20$

Contando triángulos no monocromáticos...




Por cada triángulo no mono., hay 2 —•—

¿Cuántos —•— hay?



$\le 6$

$\le 4$

6 vértices,

$\le 6 \times 6 = 36$

$\therefore \le 18$ triángulos no monocromáticos.

$\therefore T \ge 2$. ∎