Números ordinales

David J. FernándezBretón*

Miércoles 17 de marzo de 2010

1. Recordatorio, hechos básicos

Axioma (Fundación o Regularidad)**.**

$$(\forall X)(X \neq \varnothing \Rightarrow (\exists x \in X)(X \cap x = \varnothing))$$

Observación 1. Una aplicación interesante del Axioma de Fundación es para demostrar que $(\forall x)(x \notin x)$. En efecto, pues suponiendo por el contrario que para algún x tenemos $x \in x$, entonces resulta que el conjunto $\{x\}$ (que existe por el axioma del par) no satisface fundación, dado que todos sus elementos, es decir, x, satisface que $x \in x \cap \{x\} \neq \varnothing$.

Ejercicio 1. *Demuestre que no existen conjuntos $x_1, \ldots, x_n$ tales que $x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x_1$. (Sugerencia: considere el conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y utilice el axioma de fundación.)*

Axioma (Reemplazo)**.** *Éste es en realidad un esquema de axioma: sea $\varphi(x, y)$ una función proposicional. Entonces, la proposición*

$$(\forall x)(\exists! y)(\varphi(x, y)) \Rightarrow (\forall A)(\exists B)(\forall y)(y \in B \iff (\exists x \in A)(\varphi(x, y)))$$

es un axioma.

Observaciones 2.

1. Aterricemos lo que nos dice el Axioma de Reemplazo: la función proposicional $\varphi(x, y)$ puede interpretarse como una especie de "relación" cuyo "dominio" es todo el universo de conjuntos $\mathbf{V}$, y a la cual no hace daño denotar por $\mathbf{R}_\varphi$. Así, tenemos que $x\mathbf{R}_\varphi y \iff \varphi(x, y)$. Ahora bien, si el antecedente en el condicional del axioma es verdadero, entonces $\mathbf{R}_\varphi$ se comporta como una función con dominio $\mathbf{V}$, es decir, para cada $x \in \mathbf{V}$ hay un único y tal que $x\mathbf{R}_\varphi y$. Así, podemos denotar a esta función como $\mathbf{F}_\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$, lo cual quiere decir que para cada x representaremos por $\mathbf{F}_\varphi(x)$ al único y tal que $x\mathbf{R}_\varphi y$, es decir, que $\varphi(x, y)$. De esta forma, lo que el axioma de reemplazo viene a decirnos es que siempre que tengamos una "función" (definible en términos de una función proposicional de dos variables en el lenguaje de la teoría de conjuntos[1]) sobre todo el universo $\mathbf{F} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$, entonces la imagen $\mathbf{F}[A]$ de todo conjunto A es a su vez un conjunto.

2. En particular, el Axioma de Reemplazo nos permite prescindir del axioma de comprensión. En efecto, sea $\varphi(x)$ una función proposicional. Entonces, es fácil ver que la función proposicional $\psi(x, y)$ dada por

$$\psi(x, y) \equiv (\varphi(x) \wedge y = \{x\}) \vee (\neg\varphi(x) \wedge y = \varnothing)$$

define una "función" $\mathbf{F}_\psi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ dada por

$$\mathbf{F}_\psi(x) = \begin{cases} \{x\}; & \varphi(x) \\ \varnothing; & \neg\varphi(x) \end{cases}$$

*Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas; Instituto de Matemáticas UNAM, campus Morelia y Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

[1]Es decir, lógica de primer orden con igualdad equipada con el símbolo de relación binaria $\in$ y símbolos de constante para cada conjunto.

ahora basta notar que, para cada conjunto A, por el axioma de reemplazo junto con el axioma de unión existe el conjunto $\bigcup\limits_{y\in\mathbf{F}_\psi[A]} y = \bigcup\limits_{x\in A}\mathbf{F}_\psi(x) = \left(\bigcup\limits_{\substack{x\in A\\ \varphi(x)}}\{x\}\right)\cup\left(\bigcup\limits_{\substack{x\in A\\ \neg\varphi(x)}}\varnothing\right) = \{x\in A\big|\varphi(x)\}$, que es justamente aquél cuya existencia nos aseguraba el axioma de comprensión. De hecho, el axioma de reemplazo es estrictamente más fuerte que el axioma de comprensión, pues es posible demostrar que podría cumplirse este último sin que el primero se cumpliera.

3. Asimismo el axioma de reemplazo, junto con el axioma del conjunto potencia, nos permiten prescindir del axioma del par. Dado que existe el conjunto $\varnothing$, por el axioma del conjunto potencia existe el conjunto $\wp(\varnothing)=\{\varnothing\}$. Por una segunda aplicación del axioma del conjunto potencia existe el conjunto $\wp(\wp(\varnothing)) = \wp(\{\varnothing\}) = \{\varnothing,\{\varnothing\}\} =: X$. En este punto, notemos que X es un conjunto que contiene exactamente dos elementos: $\varnothing$ y $\{\varnothing\}$. Así, sean A y B conjuntos arbitrarios. Consideremos la función proposicional $\varphi(x,y)$ dada por:

$$\varphi(x,y)\equiv(x=\varnothing\wedge y=A)\vee(x=\{\varnothing\}\wedge y=B)\vee[(x\neq\varnothing)\wedge(x\neq\{\varnothing\})\wedge(y=\varnothing)].$$

Es claro que $\varphi(x,y)$ define la "función" $\mathbf{F}_\varphi:\mathbf{V}\longrightarrow\mathbf{V}$ dada por

$$\mathbf{F}_\varphi(x)=\begin{cases}A; & x=\varnothing\\ B; & x=\{\varnothing\}\\ \varnothing; & \text{otro caso.}\end{cases}$$

Luego, por el axioma de reemplazo existe el conjunto $\mathbf{F}_\varphi[X]=\mathbf{F}_\varphi[\{\varnothing,\{\varnothing\}\}]=\{\mathbf{F}_\varphi(\varnothing),\mathbf{F}_\varphi(\{\varnothing\})\}=\{A,B\}$; que es justamente el conjunto cuya existencia garantizaba el axioma del par. Sobra decir que el axioma de reemplazo es más fuerte que el axioma del par, pues puede construirse un universo de teoría de conjuntos donde se cumpla el axioma del par pero no el axioma de reemplazo.

Definición 3. *Un conjunto A es* ***transitivo*** *si $(\forall x\in A)(x\subseteq A)$.*

Ejercicio 2. *Sea A un conjunto. Demuestre que las siguientes tres proposiciones son equivalentes:*

(i) *A es transitivo.*

(ii) $(\forall x,y\in A)(x\in y\in A\Rightarrow x\in A)$.

(iii) $A\subseteq\wp(A)$.

(iv) $\bigcup\limits_{x\in A} x\subseteq A$.

Ejemplos 4. *(i)* $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$.

(ii) $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

(iii) $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

(iv) $\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\}$ no es transitivo.

Ejercicio 3. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de conjuntos transitivos. Entonces, $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ y $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ son transitivos.*

2. Conjuntos bien ordenados

Definición 5. *Sea $(L,\leq)$ un conjunto totalmente ordenado, y $S\subseteq L$. Decimos que S es un* ***segmento inicial*** *de L si $(\forall a\in S)(\forall x\in L)(x<a\Rightarrow x\in S)$. Si además $S\neq L$, decimos que L es un segmento* ***propio****.*

Lema 6. *Sea $(W,\leq)$ un conjunto bien ordenado y S un segmento inicial propio de W. Entonces $(\exists a\in W)(S=\{x\in W\big|x<a\}=:W[a])$.*

Demostración: Al ser $S \subsetneq W$, tenemos que $W \setminus S \neq \varnothing$, por lo tanto $(\exists a)(a = \text{mín}(W \setminus S))$. Afirmamos que $S = W[a]$. Sea $x \in W[a]$, luego $x < a$ por lo tanto no puede ocurrir que $x \in W \setminus S$ (pues lo contrario contradiría la minimalidad de a) por lo tanto $x \in S$ y $W[a] \subseteq S$. Ahora, si suponemos que $W[a] \subsetneq S$ entonces hay un $x \in S \setminus W[a]$. Luego, $x \in S$ y $x \geq a$. Como $a \notin S$, concluimos que $x \neq a$. Por lo tanto, $x \in S$ y $x > a$, y al ser S un segmento inicial concluimos que $a \in S$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto $S = W[a]$. □

Lema 7. *Sea $(W, \leq)$ un conjunto bien ordenado y $f : W \to W$ una función creciente. Entonces $(\forall x \in W)(f(x) \geq x)$.*

Demostración: Supongamos lo contrario, es decir, $\{x \in W \big| x > f(x)\} \neq \varnothing$, luego este conjunto tiene un elemento mínimo x. Pero entonces, al ser f creciente, tenemos que $f(x) > f(f(x))$, y esto contradice la minimalidad de x. □

Corolario 8.

(i) *Ningún conjunto bien ordenado es isomorfo a uno de sus segmentos iniciales propios.*

(ii) *Todo conjunto bien ordenado tiene un único automorfismo.*

(iii) *Si $W_1 \cong W_2$ como conjuntos bien ordenados, entonces el isomorfismo entre ellos es único.*

Demostración:

(i) Supóngase que para algún $a \in W$, $f : W \xrightarrow{\sim} W[a]$. En particular, f es creciente, luego por el lema 7 tenemos que $(\forall x \in W)(f(x) \geq x)$. Por otro lado, $a \in W$ y $f(a) \in W[a]$, por lo tanto $f(a) < a$, lo cual es absurdo.

(ii) Sea $f : W \xrightarrow{\sim} W$. Entonces, dado que $(\forall x, y \in W)(f(x) < f(y) \iff x < y)$, concluimos que tanto f como $\text{inv}(f)$ son crecientes. Luego, por el lema 7, dado $x \in W$ tenemos que $\text{inv}(f)(x) \geq x$. Luego, $x = f(\text{inv}(f)(x)) \geq f(x)$ y por lo tanto, como también (por el lema 7) $f(x) \geq x$, esto implica que $f(x) = x$. Así, $(\forall x \in W)(f(x) = x)$, por lo tanto $f = \text{id}_W$.

(iii) Sean $W_1 \underset{\sim g}{\overset{f\sim}{\rightrightarrows}} W_2$, luego $f \circ \text{inv}(g) : W_2 \xrightarrow{\sim} W_2$, cuya inversa es $g \circ \text{inv}(f)$. Por lo tanto, $f \circ \text{inv}(g) = \text{id}_{W_2} = g \circ \text{inv}(f)$, lo cual implica que $f = g$.

□

Teorema 9 (Tricotomía)**.** *Sean $(W_1, \leq)$ y $(W_2, \lesssim)$ conjuntos bien ordenados. Entonces, se cumple una y sólo una de las siguientes proposiciones:*

(i) $W_1 \cong W_2$,

(ii) $(\exists a \in W_2)(W_1 \cong W_2[a])$, *o*

(iii) $(\exists a \in W_1)(W_2 \cong W_1[a])$.

Demostración: Veamos primero que (i), (ii) y (iii) son mutuamente excluyentes: si se cumple (i), entonces suponiendo que se cumpliera además (ii) tendríamos que $W_2 \cong W_1 \cong W_2[a]$, lo cual es contradictorio por el corolario 8 parte (i); similarmente es contradictorio que se cumplan simultáneamente (i) y (iii). Ahora supongamos que se cumplen simultáneamente (ii) y (iii): entonces, si por ejemplo $W_1 \cong W_2[a]$ y $W_2 \cong W_1[b]$, tendríamos (suponiendo que $f : W_2 \xrightarrow{\sim} W_1[b]$) que $W_1 \cong (W_1[b])[f(a)] = W_1[\text{mín}\{b, f(a)\}]$, contradicción con el corolario 8 parte (i).

Veamos ahora que se cumple una de las opciones (i), (ii) o (iii). Sea

$$f := \{(x, y) \in W_1 \times W_2 \big| W_1[x] \cong W_2[y]\}.$$

Observemos que si $(x, y), (x, y') \in f$, entonces $W_2[y'] \cong W_1[x] \cong W_2[y]$, luego $y = y'$. Similarmente, si $(x, y), (x', y) \in f \Rightarrow x = x'$. Por lo tanto, f es una función y es inyectiva. Ahora, supongamos que $x \in \text{dom}(f)$ y que $x' < x$. Entonces, $W_1[x] \cong W_2[f(x)]$, sea $g : W_1[x] \xrightarrow{\sim} W_2[f(x)]$. Comprobemos que $h := g \restriction W_1[x'] : W_1[x'] \to W_2[g(x')]$ es un isomorfismo: h es inyectiva ya que g lo es, y para $z, z' \in W_1[x']$, tenemos que $z < z' \iff g(z) < g(z') \iff h(z) < h(z')$. Sólo resta ver que h es suprayectiva: sea $w \in W_2[g(x')]$. Entonces, $w < g(x')$; al ser g isomorfismo hay un $a < x$ tal que $g(a) = w < g(x')$, como g era creciente tenemos que $a < x'$ y por lo tanto $a \in W[x']$ con $h(a) = w$. Luego, $W_1[x'] \cong W_2[g(x')]$, con lo cual $(x', g(x')) \in f$. Por ello, $x' \in \text{dom}(f)$ y $f(x') = g(x') < f(x)$.

Esto nos dice que $\mathrm{dom}(f)$ es un segmento inicial de W_1, y además que f es creciente. Realizando razonamientos por completo análogos, podemos concluir que $\mathrm{ran}(f)$ es un segmento inicial de W_2; y que además $\mathrm{inv}(f)$ es creciente. Por lo tanto, f es un isomorfismo de su dominio en su rango. Si $\mathrm{dom}(f) = W_1$ y $\mathrm{ran}(f) = W_2$ entonces se cumple (i); si $\mathrm{dom}(f) = W_1$ y $\mathrm{ran}(f)$ es segmento inicial propio de W_2 entonces se cumple (ii); finalmente, si $\mathrm{dom}(f)$ es segmento inicial propio de W_1 y $\mathrm{ran}(f) = W_2$ entonces se cumple (iii). En principio, hay una cuarta posibilidad, a saber, que tanto $\mathrm{dom}(f)$ como $\mathrm{ran}(f)$ sean segmentos iniciales propios de W_1 y de W_2, respectivamente; veamos que esto no puede suceder. Pues en tal caso, hay elementos $a \in W_1$ y $b \in W_2$ tales que $f : W_1[a] \xrightarrow{\sim} W_2[b]$. Sea $x = \mathrm{mín}(W_1 \setminus W_1[a])$ y $y = \mathrm{mín}(W_2 \setminus W_2[b])$. Es fácil comprobar que $x = a$, $y = b$ y que $W_1[a] \cup \{a\}$ (resp. $W_2[b] \cup \{b\}$) es un segmento inicial de W_1 (resp. de W_2); luego hay elementos $c \in W_1$ y $d \in W_2$ tales que $W_1[a] \cup \{a\} = W_1[c]$ y $W_2[b] \cup \{b\} = W_2[d]$. Sea $g : W_1[c] \longrightarrow W_2[d]$ dada por

$$g(z) = \begin{cases} f(z); \ z < a \\ y = b; \ x = a = z. \end{cases}$$

Resulta inmediato comprobar que h es un isomorfismo, luego $(c, d) \in f$; es decir, $c \in \mathrm{dom}(f)$ y $d \in \mathrm{ran}(f)$, con $a < c$, $b < d$ y $\mathrm{dom}(f)$, $\mathrm{ran}(f)$ segmentos iniciales, lo cual nos permite inferir que $a \in \mathrm{dom}(f)$ y $b \in \mathrm{ran}(f)$, y esto resulta ser irremediablemente un absurdo. □

3. Los ordinales *à la* Von Neumann

Definición 10. *Un conjunto α es un **número ordinal** si es transitivo y $\in \cap (\alpha \times \alpha)$ es un orden total en α.*

Ejemplos 11. $\varnothing$, $\{\varnothing\} = 1$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} = 2$, $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $w = \{0, 1, \ldots\}$.

Ejercicio 4. *Si α es un número ordinal, entonces $\in \cap (\alpha \times \alpha)$ es un buen orden en α. (Sugerencia: Dado $\varnothing \neq X \subseteq \alpha$, utilize el axioma de fundación para encontrar un $x \in X$ tal que $x \cap X = \varnothing$, compruebe que de hecho $x = \mathrm{mín}(X)$.)*

Proposición 12. *Si α es un número ordinal, entonces $S(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$ también lo es.*

Demostración: $\alpha \cup \{\alpha\}$ es en efecto transitivo: si $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$ entonces $x \in \alpha$ o $x = \alpha$, si $x \in \alpha$ entonces (ya que α es transitivo) $x \subseteq \alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$; mientras que si $x = \alpha$ entonces $x \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$.

Además, $\alpha \cup \{\alpha\}$ está totalmente ordenado por $\in$: pues si $x, y \in \alpha \cup \{\alpha\}$ y $x \neq y$ entonces hay tres casos: puede ocurrir que $x, y \in \alpha$, en cuyo caso $x \in y$ o $y \in x$ debido a que α es ordinal. Si, por otra parte, $x \in \alpha$ y $y = \alpha$ entonces $x \in y$; mientras que si $y \in \alpha$ y $x = \alpha$ entonces $y \in x$. Por lo tanto $\alpha \cup \{\alpha\}$ es también un número ordinal. □

Definición 13. *Sean $\alpha, \beta \in$ **Ord**.*

(i) $\alpha + 1 := S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.

(ii) *Decimos que α es un **ordinal sucesor** si* $(\exists\beta)(\beta \text{ es ordinal} \wedge \alpha = \beta + 1)$.

(iii) *Decimos que α es un **ordinal límite** si no es un ordinal sucesor.*

(iv) *Definimos el orden en los ordinales, $\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta$.*

Observación 14. Nótese que, si α es un ordinal límite, entonces ocurre $(\forall\beta)((\beta \text{ es ordinal} \wedge \beta < \alpha) \Rightarrow \beta + 1 < \alpha)$.

Lema 15. *Todo elemento de un ordinal es un ordinal (es decir, la clase* **Ord** *de los números ordinales es una clase transitiva).*

Demostración: Sea $\alpha \in$ **Ord** y $x \in \alpha$. Veamos que x es transitivo: si $z \in y \in x$, como $x \in \alpha$ entonces $x \subseteq \alpha$, luego $y \in \alpha$, por lo tanto $y \subseteq \alpha$ y así $z \in \alpha$. Así, $x, y, z \in \alpha$ y $z \in y \in x$, dado que $\in$ es un orden total en α, entonces es transitivo, luego podemos concluir que $z \in x$.

Ahora, al ser α un conjunto transitivo, entonces $x \subseteq \alpha$ y $\in_x$ es la restricción de $\in_\alpha$ a x, por lo tanto $\in$ ordena totalmente a x, mismo que por esta razón resulta ser un número ordinal. □

Lema 16. *Sean $\alpha, \beta \in$ **Ord** con $\alpha \subsetneq \beta$. Entonces, $\alpha \in \beta$.*

Demostración: Por hipótesis $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$, luego $(\exists\gamma)(\gamma = \text{mín}(\beta \setminus \alpha))$. Luego, $\gamma \in \beta$. Veamos que, de hecho, $\gamma = \alpha$, de donde concluiremos que $\alpha \in \beta$. Sea $\delta \in \alpha \subseteq \beta$, luego $\delta \in \beta$. Al ser $\in$ un orden total para β, entonces o bien $\delta \in \gamma$ o bien $\delta = \gamma$ o bien $\gamma \in \delta$. En caso de que $\delta = \gamma$, concluimos que $\gamma \in \alpha$, lo cual es autocontradictorio. Si, por otra parte, $\gamma \in \delta \in \alpha$, al ser α transitivo entonces $\gamma \in \alpha$, lo cual vuelve a ser contradictorio. Por lo tanto, concluimos que $\delta \in \gamma$, por lo tanto $\alpha \subseteq \gamma$. Ahora, si fuera el caso que $\alpha \subsetneq \gamma$, entonces habría un $\delta \in \gamma \setminus \alpha$, luego $\delta \in \beta$, y $\delta \notin \alpha$, con lo que concluimos que $\delta \in \beta \setminus \alpha$, como $\delta \in \gamma$ esto contradice que $\gamma = \text{mín}(\beta \setminus \alpha)$, por lo tanto $\alpha = \gamma \in \beta$. □

Teorema 17. *Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Ord}$, y $X \subseteq \mathbf{Ord}$. Entonces,*

(*i*) $(\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma) \Rightarrow \alpha < \gamma$.

(*ii*) $\neg(\alpha < \beta \wedge \beta < \alpha)$.

(*iii*) $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta < \alpha$.

(*iv*) *Si $X \neq \varnothing$ entonces X tiene un elemento $<$-mínimo. (Es decir, la clase* **Ord** *de los números ordinales está bien ordenada por $<$.)*

(*v*) *X tiene un supremo.*

Demostración:

(*i*) Dado que γ es, en particular, un conjunto transitivo y la hipótesis asegura que $\alpha \in \beta \in \gamma$, concluimos que $\alpha \in \gamma$, es decir, $\alpha < \gamma$.

(*ii*) Supongamos lo contrario, entonces tendríamos que $\alpha \in \beta \in \alpha$, y al ser α un conjunto transitivo concluimos que $\alpha \in \alpha$, la negación de lo cual fue demostrada poco después de introducir el axioma de fundación.

(*iii*) Al ser α y β números ordinales, también $\alpha \cap \beta$ lo es (el hecho de que sea transitivo viene del ejercicio 3, y el que sea totalmente ordenado es bastante fácil de ver) con $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$, $\alpha \cap \beta \subseteq \beta$. Si ambas contenciones fueran propias, el lema 16 nos permitiría concluir que $\alpha \cap \beta \in \alpha$ y $\alpha \cap \beta \in \beta$ con lo cual llegamos al hecho contradictorio de que $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$. De esta forma, debe tenerse que o bien $\alpha \cap \beta = \alpha$ o bien $\alpha \cap \beta = \beta$. Si se cumplen ambas tenemos que $\alpha = \beta$, mientras que si la primera no se cumple tenemos entonces que $\beta = \alpha \cap \beta \subset \alpha$, lo cual junto con el lema 16 nos permite concluir que $\beta \in \alpha$. Similarmente, si la segunda no se cumple llegaremos a que $\alpha \in \beta$, y estas tres son las únicas posibilidades (por cierto, mutuamente excluyentes) admisibles.

(*iv*) Una aplicación del ejercicio 3 muestra que $\alpha := \bigcap\limits_{\beta \in X} \beta$ es un conjunto transitivo, y es fácil ver que además está bien ordenado por $\in$. Luego $\alpha \in \mathbf{Ord}$, y no sólo eso, sino que $(\forall\beta \in X)(\alpha \subseteq \beta)$. Si $\alpha \notin X$, el lema 16 nos hará concluir que $(\forall\beta \in X)(\alpha \in \beta)$, luego $\alpha \in \bigcap\limits_{\beta \in X} \beta = \alpha$, lo cual es absurdo. Por lo tanto hay un $\beta \in X$ tal que $\alpha = \beta$, y resulta inmediato ver que $(\forall\gamma \in X)(\beta \leq \gamma)$, luego $\beta = \text{mín}(X)$.

(*v*) Una aplicación del ejercicio 3 muestra que $\alpha := \bigcup\limits_{\beta \in X} \beta$ es un conjunto transitivo, y es fácil ver que además está bien ordenado por $\in$. Luego $\alpha \in \mathbf{Ord}$, y no sólo eso, sino que $(\forall\beta \in X)(\beta \subseteq \alpha)$. Luego, por el lema 16 debemos tener que, para cada $\beta \in X$, o bien $\beta \in \alpha$ o bien $\beta = \alpha$. Luego, $(\forall\beta \in X)(\beta \leq \alpha)$. Si $\alpha \in X$, entonces es claro que $\alpha = \text{máx}(X) = \sup(X)$. En caso contrario, si tenemos otra cota superior para X, digamos γ, entonces para cada $\beta \in X$ tenemos que $\beta \leq \gamma$, es decir, $\beta \in \gamma$ o $\beta = \gamma$. En cualquier caso $\beta \subseteq \gamma$, luego $\alpha = \bigcup\limits_{\beta \in X} \beta \subseteq \gamma$, por lo tanto $\alpha \leq \gamma$, es decir, $\alpha = \sup(X)$.

□

Corolario 18. *La clase* **Ord** *de los números ordinales es una* ***clase propia*** *(es demasiado grande como para ser un conjunto).*

Demostración: A estas alturas tenemos ya bastante herramienta como para elaborar dos demostraciones distintas de este hecho. Como ambas operan por contradicción, comencemos por suponer $\mathbf{Ord} \in \mathbf{V}$.

El primer razonamiento es el siguiente: por el lema 15 sabemos que **Ord** es un conjunto transitivo, mientras que el teorema 17 partes (*i*), (*ii*) y (*iii*) nos permite concluir que además **Ord** está totalmente ordenado por $\in$. En consecuencia, **Ord** $\in$ **Ord**, lo cual está flagrantemente prohibido por el axioma de fundación. Esta contradicción es lo que se conoce como **paradoja de Burali-Forti**, la cual en su momento cimbró los cimientos de la teoría de conjuntos casi tanto como la paradoja de Russell. Pero al igual que esta última, una vez que se hubieron formulado los axiomas de Zermelo-Fraenkel, dejó de ser una paradoja para convertirse en una demostración (del presente corolario).

Como segundo razonamiento, observemos que por el teorema 17 se tiene que **Ord** tiene un supremo, digamos α. Luego, tomando $\beta = \alpha + 1$ tenemos que $\beta \in \mathbf{Ord}$ mas sin embargo $(\forall\gamma \in \mathbf{Ord})(\gamma < \beta)$. En este momento estamos ya en los linderos de una contradicción: una opción es derivar que, en particular, $\beta < \beta$, es decir $\beta \in \beta$; mientras que otra opción es concluir que en particular $(\forall\gamma \in \mathbf{Ord})(\gamma \neq \beta)$, lo cual nos dice que $\beta \notin \mathbf{Ord}$. De cualquier forma, nos hallamos en el punto cúspide de una flagrante contradicción. ☐

4. El axioma de infinitud

Definición 19. *Definimos al conjunto ω, el* ***primer ordinal infinito*** *como el conjunto de los números naturales junto con el cero. Es decir, $\omega := \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Observación 20. Como ya hemos visto, se define $0 := \varnothing$, y de ahí por inducción para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se define $n + 1 := n \cup \{n\} = \{0, 1, \ldots, n\}$, en donde la última igualdad puede demostrarse por inducción. Similarmente, el proceso inductivo muestra que todo número natural es un ordinal (dado que 0, el punto de partida, lo es). Sin embargo, en este caso no estamos hablando de una inducción "formal", sino que estamos razonando de manera "metamatemática". Esto es, los axiomas de Zermelo-Fraenkel (exceptuando al axioma de infinitud) no nos permiten hablar de inducción matemática sobre el conjunto de los números naturales, mismo que ni siquiera está definido. Sin embargo, nosotros conocemos de manera intuitiva a (en lenguaje Kantiano, casi sería capaz de afirmar que tenemos la *intuición intelectual* de) los números naturales, y sabemos que ellos nos permiten utilizar la inducción matemática, misma que utilizamos para definir aquellos entes matemáticos que, dentro de la teoría de conjuntos, representarán a estos números naturales intuitivos, metamatemáticos. Utilizando las comillas de Quine $\ulcorner$, $\urcorner$ que sirven para distinguir entre un ente externo al sistema formal (representado sin comillas) y su representación dentro de dicho sistema (escrita con comillas), diríamos que para cada número natural (metamatemático) n, podemos encontrar un conjunto $\ulcorner n \urcorner \in \omega$ (definible dentro de la teoría ZF) que cuenta con exactamente n elementos (una cantidad finita), y que utilizaremos para "representar" a n dentro de la teoría. Sin embargo, arriba hemos definido el conjunto ω, mismo que, en teoría, cuenta con una cantidad infinita de elementos, y que, visto desde fuera de la teoría, debería de representar al conjunto de todos los números naturales metamatemáticos junto con el cero (también metamatemático). Esto es un poco "truculento", pues no es razonable esperar que quien no está familiarizado con el cálculo proposicional sobre sistemas axiomáticos comprenda todos los detalles, mas sin embargo trataremos de dar al menos la idea intuitiva de lo que está pasando. Hay una infinidad de entes de esos que acabamos de definir como números naturales dentro de ZF, en el sentido de que es posible demostrar que $(\forall n)(n \text{ es un número natural} \Rightarrow (\exists m)(m \text{ es un número natural} \wedge m > n))$ (basta tomar $m = n + 1$). Esto refleja nuestra idea intuitiva de que hay una infinidad de números naturales debido a que éstos "no se acaban nunca", es decir, siempre que tenemos uno de ellos, es posible sumarle 1 para obtener el siguiente. Sin embargo, lo que no es posible demostrar con los axiomas ZF sin infinitud es que exista un conjunto con una cantidad infinita de elementos, en particular, que ω exista. De hecho, considérese el conjunto de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, usualmente denotado como $[\mathbb{N}]^{<\aleph_0}$. Es posible demostrar que, en el modelo que tiene a ese conjunto por universo (lo cual quiere decir más o menos que nos olvidamos de todos los conjuntos que conocemos y "simulamos"que los únicos conjuntos que existen son los elementos de $[\mathbb{N}]^{<\aleph_0}$; es decir, hablando sin demasiado rigor diríamos que añadimos el axioma $\mathbf{V} = [\mathbb{N}]^{<\aleph_0}$) se cumplen todos los axiomas de Zermelo-Fraenkel salvo el axioma de infinitud, esto es, no existe conjunto alguno que tenga una cantidad infinita de elementos. De hecho, trabajando en este universo llegamos a la conclusión de que el conjunto de todos los números naturales junto con el cero es exactamente igual al conjunto de todos los ordinales (es decir, los únicos números ordinales que viven en $[\mathbb{N}]^{<\aleph_0}$ son los naturales y el cero; en teoría de modelos usualmente escribimos este hecho diciendo que $\mathbf{Ord}^{[\mathbb{N}]^{<\aleph_0}} = \omega$). Esto es lo que motiva la introducción del axioma de infinitud.

Axioma (Infinitud)**.** *Existe el conjunto ω tal y como fue descrito en la definición 19.*

A continuación, enunciaremos sin demostración una serie de equivalencias del anterior axioma, para ilustrar cómo esta suposición puede verse, desde cierto punto de vista, como absolutamente razonable. Debemos de tomar en cuenta que, para demostrar algunas de las implicaciones que mencionaremos a continuación, resulta indispensable hacer uso del axioma de elección.

Teorema 21. *En el sistema axiomático* $\mathsf{ZFE} \setminus \{\mathsf{infinitud}\}$*, puede demostrarse que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *El axioma de infinitud, es decir,* ω *existe.*

(*ii*) *Existe un conjunto infinito, es decir,* $(\exists x)(x \neq \varnothing \wedge (\forall y \in x)(\exists z \in x)(y \in z))$.

(*iii*) *Existe un conjunto Dedekind-infinito (es decir, un conjunto* x *tal que existe un subconjunto propio* $y \subset x$ *y una biyección* $f : y \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow x$.

(*iv*) *Existe un conjunto inductivo, es decir, un conjunto* A *tal que* $\varnothing \in A$ *y* $(\forall x \in A)(x \cup \{x\} \in A)$.

Observación 22. Así, hemos visto que sin el axioma de infinitud, correríamos el riesgo de no tener a nuestra disposición mas que conjuntos finitos. Sin embargo, el axioma de infinitud como tal resulta filosóficamente complicado de justificar. Que exista una colección que conste de una infinidad de cosas, es una suposición bastante fuerte, que llegó a asustar al mismísimo Bertrand Russel, quien sostuvo [Rus] que debía averiguarse por la vía empírica si en verdad existen una infinidad de entidades en el mundo (por increíble que suene) y que, en cualquier caso, al ser lógicamente posible la no existencia de dichas entidades, no tenía caso aceptar el axioma de infinitud, pues no sería un principio lógicamente necesario, y por tanto los teoremas que de él se dedujeran carecerían de la certeza apodíctica que debe caracterizar a la matemática.

Dejando atrás a nuestro británico autor, ya hemos mencionado cómo los números naturales nunca se acaban, en el sentido de que siempre puedo sumarle 1 al más grande que tenga en ese momento en mi poder, y obtendré otro número natural aún más grande. Pero la existencia de ω es algo mucho más fuerte que sólo la existencia de una infinidad de entidades (lo cual, como hemos visto, sí es demostrable en ZF sin infinitud), pues es la posibilidad de finalizar ese proceso, de llevarlo a cabo infinitas veces hasta que en verdad los números naturales “se me hayan terminado”, y de a partir de ahí tener “en la mano”, como quien dice, a todos y cada uno de los números naturales en el mismo instante. Es, por tanto, un axioma bastante fuerte. Desde luego, desde el punto de vista del formalismo, el axioma no es más que una sucesión de símbolos lógicos, variables, y los símbolos $=$ y $\in$, sucesión que podemos invocar en cualquier momento para obtener nuevos teoremas. Pero si uno resulta ser más platónico que formalista[2], lo cual desde mi punto de vista es muchísimo más aceptable (incluso desde un punto de vista pragmático: conviene más ser platónico si se es un matemático que debe justificar el hecho de que se le pague por hacer matemáticas) entonces el axioma de infinitud adquiere un nuevo significado. Observemos que, por la parte (*iv*) del teorema anterior, el axioma de infinitud es equivalente a poder aplicar el principio de inducción (pues ω resulta ser un conjunto inductivo y, de hecho, corresponde al conjunto inductivo más pequeño que existe en el universo de los conjuntos, y para una proposición $\varphi(n)$ que depende de los números naturales, la conjunción $\varphi(0) \wedge (\forall n)(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1))$ nos está diciendo que el conjunto $\{n \big| \varphi(n)\} =: B$ es inductivo, luego $\omega \subseteq B$ y por lo tanto $\omega = B$), y en cierta ocasión, Henri Poincaré [Poi] afirmó, respecto del principio de inducción matemática, lo siguiente:

> Esta regla inaccesible a la demostración analítica y a la experiencia, es el verdadero tipo de juicio sintético a priori. Por otra parte, no se podría pensar en considerarla como una convención como ocurre con algunos postulados de la geometría [...] no es más que la afirmación de la potencia del espíritu que se sabe capaz de concebir la repetición indefinida de un mismo acto, desde que ese acto es posible una vez.

Creo que esas palabras encierran gran parte de la esencia del axioma de infinitud, y de nuestras razones para adoptarlo. Otra razón poderosa y emparentada con la anterior es que, sin conjuntos infinitos, gran parte de la matemática actual colapsaría, pues simplemente sin ir más lejos, el proceso de tomar límites, derivadas e integrales en análisis matemático resulta estar estrechamente ligado con el infinito:

> Trabajar con los números naturales sin tener al conjunto de todos los números naturales no causa más inconvenientes que, digamos, trabajar con conjuntos sin tener al conjunto de todos los conjuntos. Asimismo la aritmética de los números racionales puede desarrollarse en este marco de trabajo. Sin embargo, si uno se interesa por el análisis entonces los conjuntos infinitos son indispensables dado que incluso la noción de un número real no puede ser desarrollada únicamente por medio de conjuntos finitos.

[2]Sobresimplificando las cosas, diríamos que para un formalista la matemática no es más que manipulación de símbolos (los cuales no son vistos como representaciones de entes objetivos) sobre el papel; mientras que el platónico en verdad cree que en algún lugar (probablemente el en topos uranos descrito por Platón en sus obras) o de alguna manera los entes matemáticos existen, de modo que al demostrar teoremas, los matemáticos en verdad están descubriendo verdades objetivas acerca de alguna parte o aspecto del mundo.

> De modo que tenemos que añadir un axioma de existencia que garantice la existencia de un conjunto infinito.[3]

Todo esto es evidencia suficiente de que podemos aducir, como el mismo Russell afirmó, que:

> La razón para aceptar un axioma [...] es siempre en gran parte inductiva; es decir, que muchas proposiciones que son casi indubitables pueden deducirse a partir de él, y que no se conoce otro camino igualmente aceptable por el cual estas proposiciones pudieran ser verdaderas si el axioma fuera falso, y que nada que sea probablemente falso pueda deducirse de él[4]

Por otra parte, puede argumentarse que el axioma de infinitud no es tan fuerte, pues únicamente postula la existencia del conjunto infinito más pequeño posible, y con esta única suposición es posible remontarse hasta conjuntos infinitos que resultan enormes a comparación de ω, como veremos a posteriormente[5]. Volviendo a citar a Poincaré [Poi], comprendemos que efectivamente

> No podemos elevarnos sino por la inducción matemática, única que nos puede enseñar algo nuevo.

Finalmente, como última evidencia a favor de la adopción del axioma de infinitud, no queda sino recordar la "demostración" de Dedekind de que existe un conjunto Dedekind-infinito:

> Demostración: Mi propia esfera de pensamiento, i.e., la totalidad S de todas las cosas, que pueden ser objetos de mi pensamiento, es infinita. Pues si s significa un elemento de S, entonces el pensamiento s', de que s puede ser objeto de mi pensamiento, es él mismo un elemento de S. Si consideramos esto como transformación $\phi(s)$ del elemento s entonces tiene la transformación ϕ de S, así determinada, la propiedad de que la transformación S' [i.e. el rango $\phi[S]$] es parte de S; y S' es ciertamente parte propia de S, dado que hay elementos en S (e.g., mi propio ego) que son diferentes de tales pensamientos s' y por consiguiente no están contenidos en S'. Finalmente es claro que si a, b son elementos diferentes de S, sus transformaciones a', b' son también diferentes, por consiguiente la transformación ϕ es una transformación distinta (similar) [i.e. inyectiva]. Por lo tanto S es infinito, que era lo que había que probar.[6]

Teorema 23.

$$(\forall \alpha \in \mathbf{Ord})(\alpha \in \omega \iff \alpha \text{ es finito})$$

Es decir, ω es el conjunto de todos los ordinales finitos.

Demostración: La implicación en la dirección $\Rightarrow$ viene de la observación 20. En la otra dirección, observemos que si $\alpha \notin \omega$ entonces, dado que $\in$ es un orden total en **Ord**, no hay más remedio que concluir que o bien $\alpha = \omega$ o bien $\omega < \alpha$, en ambos casos tendremos que $\omega \subseteq \alpha$, luego α tiene por lo menos a todos los números naturales y por lo tanto debe de ser infinito. □

5. Más sobre ordinales

Ya mencionamos que, si $\alpha \in \mathbf{Ord}$ y $\beta \in \alpha$, entonces $\beta \in \mathbf{Ord}$. Esto nos da una agradable característica de los números ordinales: sus elementos son exactamente aquellos ordinales que son menores. Es decir, $\alpha \in \mathbf{Ord} \Rightarrow \alpha = \{\beta \in \mathbf{Ord} \big| \beta < \alpha\}$. Esto indica que, si en analogía con los conjuntos bien ordenados, hablamos de **segmentos**

[3] A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, y A. Levy. *Foundations of set theory*, 2nd. edition, North-Holland. Amsterdam, 1973, p. 45. Citado en [Mad], p. 486. Traducción mía.

[4] A. N. Whitehead y B. Russell, Principia Mathematica vol. 1, citado en [Fer].

[5] Aunque puede postularse la existencia de infinitos "muchísimo más grandes", de ordinales comparado con los cuales ω mismo resulta ser "casi finito". Suponer la existencia de este tipo de ordinales es lo que comúnmente se conoce como los **axiomas de cardinales grandes**. Desde mi punto de vista, justificar la adopción de algunos de estos axiomas también requiere su buena dosis de argumentación filosófica, pero en una dirección opuesta. No se trata ya de preguntarse por qué nuestras mentes finitas pueden (o deberían poder) *aprehender* un objeto infinito, sino por el contrario, de que debido a que nuestras mentes son finitas, debe resultar imposible que éstas sean capaces de aprehender de manera positiva la totalidad de los conjuntos, por tanto, deben de existir conjuntos tan grandes que impliquen la existencia de conjuntos indescriptibles. Vagamente hablando, creo que estas son las razones fundamentales para enriquecer el sistema axiomático ZFE con ciertos axiomas adicionales, de cardinales grandes —que son una especie de ≪axiomas de infinitud fuerte≫—. En particular, creo que esa línea de pensamiento nos da importantísimas razones para suponer la existencia de $0^{\#}$.

[6] [Ded], p. 64. Traducción mía.

iniciales de la clase bien ordenada **Ord** como clases de la forma $\mathbf{Ord}[\alpha] = \{\beta \in \mathbf{Ord} \big| \beta < \alpha\}$, entonces $(\forall \alpha \in \mathbf{Ord})(\mathbf{Ord}[\alpha] = \alpha)$. Es decir, cada ordinal es un segmento inicial de **Ord** y, recíprocamente, cada segmento inicial de **Ord** es un número ordinal (en particular, cada segmento inicial de **Ord**, que es una clase propia (una clase "demasiado grande" como para ser un conjunto), ya es un conjunto (ya es suficientemente pequeño)). En este sentido, a **Ord** le ocurre algo análogo a lo que sucede con el ordinal ω: él es un ordinal infinito, "demasiado grande" como para ser finito; sin embargo cada uno de sus segmentos iniciales (i.e. cada ordinal finito) es finito, ya es "pequeño". Así pues, ω no sólo es un ordinal infinito sino que es el más pequeño posible. Similarmente, podríamos decir que **Ord** es la clase propia (bien ordenable) más "pequeña posible"(es, de lo "demasiado grande", lo más "pequeño"que existe).

Hay, como hemos visto más arriba, dos clases de ordinales. $\alpha \in \mathbf{Ord}$ es ordinal sucesor si hay un $\beta \in \mathbf{Ord}$ tal que $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, nótese que en este caso $\beta = \max \alpha$. Por otro lado, si $\alpha \in \mathbf{Ord}$ no es ordinal sucesor, entonces decimos que α es ordinal límite y, en este caso, tenemos que si $\beta < \alpha$ entonces $\beta + 1 < \alpha$. Esto nos permite asegurar que $\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \beta$. En efecto, es claro que $\alpha \geq \sup_{\beta<\alpha} \beta$; por otro lado, si la desigualdad fuera estricta entonces debería tenerse que $\sup_{\beta<\alpha} \beta + 1 \geq \alpha$, para no contradecir a la definición de supremo. Pero entonces no queda más remedio que concluir $\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \beta + 1$ y α sería un ordinal sucesor, contrario a la hipótesis.

A continuación veremos que los ordinales proporcionan una agradable manera de representar a los conjuntos bien ordenados (diríamos, un tanto informalmente, que **Ord** es una clase de representantes para las clases de equivalencia de conjuntos bien ordenados módulo la relación de isomorfismo). El siguiente teorema nos proporciona esa propiedad de los ordinales. Notemos que en su demostración utilizamos fuertemente el axioma de reemplazo y, de hecho, está rigurosamente demostrado que dicha demostración no puede llevarse a cabo sin este axioma.

Teorema 24. *Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.*

Demostración: Sea $(W, \leq)$ un conjunto bien ordenado, y sea $A := \{a \in W \big| (\exists \alpha \in \mathbf{Ord})(\alpha \cong W[a])\}$. Consideremos la siguiente función proposicional:

$$\varphi(a, \alpha) \equiv (a \in W \wedge \alpha \in \mathbf{Ord} \wedge W[a] \cong \alpha) \vee [(\neg(a \in W) \vee (a \in W \wedge W[a] \ncong \alpha) \wedge \alpha = \varnothing].$$

Obsérvese que, si $W[a]$ es isomorfo a algún ordinal, entonces dicho ordinal necesariamente deberá ser único. Es por ello que resulta inmediato observar que $(\forall a)(\exists! \alpha)(\varphi(a, \alpha))$. Luego, la función proposicional $\varphi(a, \alpha)$ determina una "función" $\mathbf{F}_\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$, que viene dada por:

$$\mathbf{F}_\varphi = \begin{cases} \alpha; & a \in W \wedge \alpha \cong W[a], \\ \varnothing; & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Dado que A es un conjunto, el axioma de reemplazo nos garantiza la existencia de $\mathbf{F}_\varphi[A] = \{\mathbf{F}(a) \big| a \in A\}$. En adelante, para $a \in A$, denotemos $\alpha_a := \mathbf{F}_\varphi(a)$. Así, lo que acabamos de concluir hace dos frases es que existe el conjunto $S := \{\alpha_a \big| a \in A\} \subseteq \mathbf{Ord}$, demostremos que de hecho $S \in \mathbf{Ord}$. Al ser S un conjunto de ordinales, entonces está totalmente ordenado por $\in$, sólo resta ver que es transitivo. Sea $\gamma \in \alpha_A \in S$, entonces ha de existir un isomorfismo $f : W[a] \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \alpha_a$, sea $c := \mathrm{inv}(f)(\gamma)$. Comprobemos que la función $g := f \restriction W[c] : W[c] \longrightarrow \gamma$ es un isomorfismo. Efectivamente $\gamma = \mathrm{ran}(g)$. Pues si $\delta \in \gamma$ entonces $\delta < \gamma \in \alpha_a$, luego $\mathrm{inv}(f)(\delta) < \mathrm{inv}(f)(\gamma)$ con $g(\mathrm{inv}(f)(\delta)) = f(\mathrm{inv}(f)(\delta)) = \delta$, luego $\gamma \subseteq \mathrm{ran}(g)$. Ahora, si $\delta \in \mathrm{ran}(g)$, ello quiere decir que, para algún $b \in W[c]$, $\delta = g(b) = f(b)$, siendo $b < c$ y f un isomorfismo, debemos tener que $\delta = f(b) < f(c) = \gamma$ y luego $\delta \in \gamma$, por lo tanto $\mathrm{ran}(g) \subseteq \gamma \Rightarrow \mathrm{ran}(g) = \gamma$. Siendo f inyectiva y creciente, g también debe de serlo. Luego $W[c] \cong \gamma$ y por lo tanto $\gamma = \alpha_c \in S$. Así, S es transitivo y por lo tanto $S \in \mathbf{Ord}$.

Ahora veamos que A es un segmento inicial de W. En efecto, si $a \in A$ entonces hay un isomorfismo $f : W[a] \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \alpha_a$, luego si $b < a$ y hacemos $\gamma = f(b)$ entonces por un argumento idéntico al del párrafo anterior, podemos comprobar que $f \restriction W[b] : W[b] \longrightarrow \gamma$ es un isomorfismo, en donde por lo tanto, necesariamente $\gamma = \alpha_b$. Por lo tanto, $b \in A$ y eso nos dice que o bien $A = W$ o bien $(\exists a \in W)(A = W[a])$. Pero la aplicación $a \longmapsto \alpha_a$ es un isomorfismo (ver ejercicio 6), luego si fuera el caso que $A = W[a]$ entonces tendríamos que $W[a] \cong S \in \mathbf{Ord}$, luego por definición $a \in A = W[a]$, es decir, $a < a$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $A = W$ y $W \cong S \in \mathbf{Ord}$. La unicidad de S es inmediata. $\square$

Ejercicio 5. *Desarrolle el "argumento idéntico al del párrafo anterior" mencionado en la demostración del teorema 24 para demostrar que, si $f : W[a] \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \alpha_a$ es un isomorfismo, entonces $f \restriction W[b]$ es también un isomorfismo con dominio $W[b]$ y rango $f(b)$.*

Ejercicio 6. *Proporcione los detalles necesarios para sustentar la afirmación hecha en la demostración del teorema 24 de que la aplicación $a \longmapsto \alpha_a$ es un isomorfismo entre A y S.*

Es importante notar la similaridad de esta última demostración con la demostración del teorema 9. De hecho, en cierto sentido es exactamente la misma demostración (aunque formalmente esto que acabo de decir no tiene sentido): **Ord** es una clase bien ordenada, y W es un conjunto bien ordenado. Por lo tanto, intuitivamente podríamos decir que debe cumplirse una de las siguientes tres opciones: o bien **Ord** es isomorfo a un segmento inicial propio de W, o bien **Ord** es isomorfo a W, o bien W es isomorfo a un segmento inicial propio de **Ord**. Sin embargo, las dos primeras opciones serían absurdas, pues implicarían que W (que sí es conjunto) debería ser por lo menos "tan grande" como **Ord** (que es "demasiado grande" como para poder ser un conjunto). De modo que debe tenerse que W es isomorfo a un segmento inicial propio de **Ord**, pero los segmentos iniciales de **Ord** son exactamente los ordinales. Luego todo conjunto bien ordenado W es isomorfo a un segmento inicial de **Ord**, que necesariamente debe ser único (pues si $W \cong \alpha$ y $W \cong \beta$, con $\alpha \neq \beta$, por tricotomía debo tener que $\alpha < \beta$ o bien $\beta < \alpha$. Supongamos sin perder generalidad que $\alpha < \beta$, pero en este caso α es un segmento inicial propio de β, con $\beta \cong \alpha$, contradicción). De hecho, la demostración del teorema anterior es en gran medida una calca de la demostración del teorema 9 de tricotomía, pero orientada a demostrar que se cumple el caso que se debe de cumplir, sin tomar en cuenta los otros dos casos, además de que se realiza con cierto cuidado para formalizar el hecho de que **Ord** no es un conjunto, luego no todos los razonamientos que se aplican a conjuntos pueden aplicarse irrestrictamente a la clase propia **Ord**.

Definición 25. *Sea W un conjunto bien ordenado. Al ordinal (que existe y es único por el teorema 24) α tal que $\alpha \cong W$ se le denomina el **tipo ordinal** o **tipo de orden** de W y se le denota por* $\text{t.o.}(W)$.

Teorema 26 (Principio de Inducción Transfinita)**.**

1 ***(Primera versión del principio)*** *Sea $\varphi(x)$ una función proposicional tal que se cumple:*

$$(\forall \alpha \in \mathbf{Ord})[(\forall \beta < \alpha)(\varphi(\beta)) \Rightarrow \varphi(\alpha)].$$

Entonces, se cumple $(\forall \alpha \in \mathbf{Ord})(\varphi(\alpha))$.

2 ***(Segunda versión del principio)*** *Sea $\varphi(x)$ una función proposicional tal que se cumple:*

- *(i)* $\varphi(0)$,
- *(ii)* $(\forall \alpha \in \mathbf{Ord})(\varphi(\alpha) \Rightarrow \varphi(\alpha + 1))$, *y*
- *(iii) para cada ordinal límite no cero α, $(\forall \beta < \alpha)(\varphi(\beta)) \Rightarrow \varphi(\alpha)$.*
  Entonces, se cumple $(\forall \alpha \in \mathbf{Ord})(\varphi(\alpha))$.

DEMOSTRACIÓN:

1 Supóngase que para algún $\gamma \in \mathbf{Ord}$, tenemos que $\neg\varphi(\alpha)$. Sea $S := \{\beta \in \gamma \big| \neg\varphi(\beta)\} \cup \{\gamma\}$. Entonces, tenemos que $S \neq \varnothing$, y que $(\forall \beta \in S)(\neg\varphi(\beta))$. S es un conjunto de ordinales, luego tiene un elemento mínimo, digamos que es β. Ahora veamos qué pasa con $\delta < \beta$: como $\delta \in \beta \leq \gamma$, entonces si se cumpliera $\neg\varphi(\delta)$ tendríamos que $\delta \in S$, lo cual contradice la elección de $\beta = \text{mín}(S)$. Por lo tanto, debe tenerse que $\neg\varphi(\delta)$. Así, hemos probado que se satisface $(\forall \delta < \beta)(\varphi(\delta))$, lo cual implica que $\varphi(\beta)$ y esto contradice que $\beta \in S$. Esta contradicción nos lleva a concluir que para todos los $\gamma \in \mathbf{Ord}$, debe tenerse que $\varphi(\gamma)$.

2 Basta probar que, dado un ordinal α, se cumple $(\forall \beta < \alpha)(\varphi(\beta)) \Rightarrow \varphi(\alpha)$. Entonces, la primera versión del principio de inducción transfinita nos permitirá concluir que $(\forall \alpha \in \mathbf{Ord})(\varphi(\alpha))$.

Sea, pues, α un ordinal tal que $(\forall \beta < \alpha)(\varphi(\beta))$. Hay tres opciones: α es sucesor, α es un ordinal límite no cero, y $\alpha = 0$. Si α es un ordinal sucesor, entonces hay un β tal que $\alpha = \beta + 1$, luego $\beta < \alpha$, así que se cumple $\varphi(\beta)$, y por la parte *(ii)* de la hipótesis eso implica que se cumple $\varphi(\beta + 1) \equiv \varphi(\alpha)$. Por otra parte, si α es un ordinal límite no cero, la parte *(iii)* de la hipótesis nos lleva de manera inmediata a que $\varphi(\alpha)$. Finalmente, si $\alpha = 0$, la parte *(i)* de la hipótesis nos dice que $\varphi(0)$. En cualquier caso, se cumple $\varphi(\alpha)$, luego $(\forall \beta < \alpha)(\varphi(\beta)) \Rightarrow \varphi(\alpha)$ y hemos terminado.

□

Este principio de inducción transfinita se deduce del hecho de que los ordinales están bien ordenados de manera enteramente análoga a como se demuestra el principio de inducción (finita) para números naturales a partir del hecho de que $\mathbb{N}$ es bien ordenado. Para finalizar con nuestro estudio de los números ordinales, mencionemos sin demostrar tres versiones del principio de recursión transfinita, que nos permite realizar construcciones sobre cada número ordinal α una vez que se conoce la construcción en los ordinales menores que α. Estos principios pueden demostrarse a partir del principio de inducción transfinita de manera enteramente análoga a como se demuestra el teorema de recursión en los números naturales a partir del principio de inducción (finita). Espero que con esto quede claro cómo la teoría de ordinales transfinitos no es sino una extensión natural de la teoría de los números naturales, y, tal y como Cantor la concibió, es tan sólo una generalización del concepto de "contar".

Teorema 27 (Teorema de recursión transfinita)**.**

1 *Sea* $\mathbf{G} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ *una "función". Entonces, existe una única "función"* $\mathbf{F} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ *tal que* $(\forall\alpha \in \mathbf{Ord})(\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F} \restriction \alpha))$.

2 *(Versión paramétrica). Sea* $\mathbf{G} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ *una "función de dos variables". Existe una única "función de dos variables"* $\mathbf{F} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ *tal que* $(\forall\alpha \in \mathbf{Ord})(\forall z)(\mathbf{F}(z, \alpha) = \mathbf{G}(z, \mathbf{F}(z, -) \restriction \alpha))$.

3 *Sean* $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3 : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ *"funciones". Luego, existe una única "función"* $\mathbf{F} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ *tal que* $\mathbf{F}(0) = \mathbf{G}_1(0)$, $(\forall\alpha \in \mathbf{Ord})(\mathbf{F}(\alpha + 1) = \mathbf{G}_2(\mathbf{F}(\alpha)))$*, y para cada ordinal límite no cero* α*,* $\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}_3(\mathbf{F} \restriction \alpha)$.

Referencias

[Ded] Dedekind, Richard, *Essays on the Theory of Numbers*, tr. Wooster Woodruff Beman. The open court publishing company. Illinois, 1948.

[Fer] Ferreirós, José; "Certezas e hipótesis: perspectivas históricas y naturalistas sobre la matemática", en Estany, Anna (ed.) *Enciclopedia iberoamericana de filosofía. Vol. 28: Filosofía de las ciencias naturales, sociales y matemáticas.* Trotta-Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 2005.

[Hrb-Jec] Hrbacek, Karel y Jech, Thomas; *Introduction to set theory.* 3rd. ed., Pure and Applied Mathematics (220), Marcel Dekker, 1999.

[Mad] Maddy, Penelope; "Believing the Axioms I". *The Journal of Symbolic Logic* **53** no. 2 (1988), pp. 481-511.

[Poi] Poincaré, Henri; *Filosofía de la ciencia.* Conacyt, México, 1981.

[Rus] Russell, Bertrand; *Introduction to mathematical philosophy.* George Allen & Unwind, Londres, 1956.