Del cálculo integral a los misterios del infinito

David Fernández Bretón

dfernandezb@ipn.mx
https://dfernandezb.web.app/espanol.html

Escuela Superior de Física y Matemáticas,
Instituto Politécnico Nacional

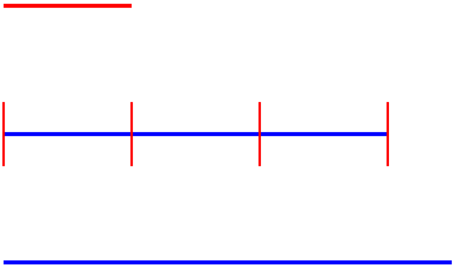
Universidad Nacional Federico Villarreal
19 de octubre de 2021

Cálculo de longitudes

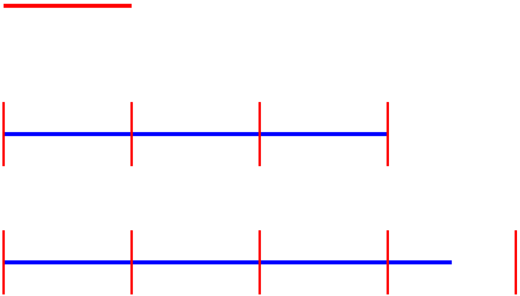
Instituto Politécnico Nacional

Cálculo de longitudes

Cálculo de longitudes

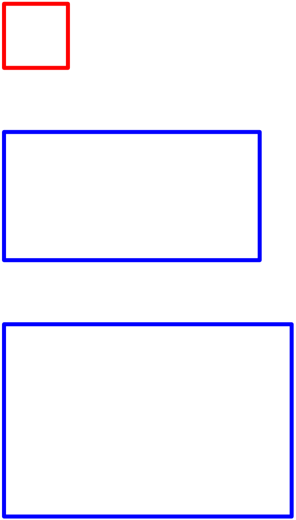


Cálculo de longitudes



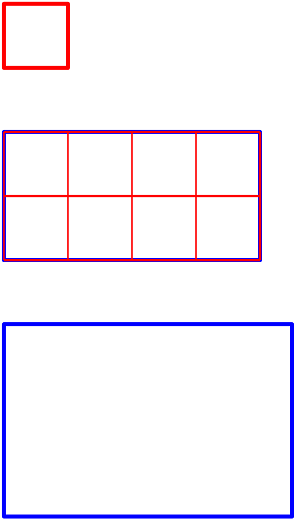
Cálculo de áreas

Cálculo de áreas



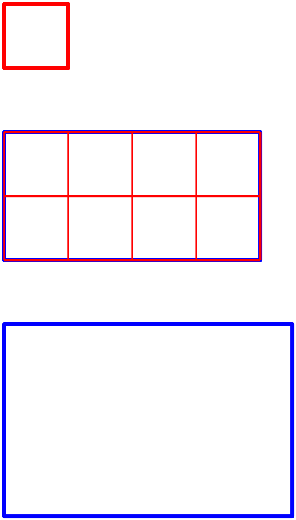
Instituto Politécnico Nacional

Cálculo de áreas



Cálculo de áreas

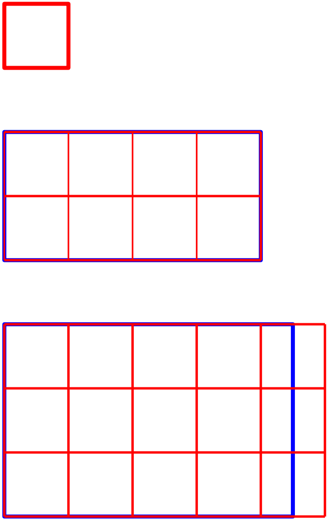
$$A = bh$$



Instituto Politécnico Nacional

Cálculo de áreas

$$A = bh$$



Implícitamente en lo anterior, estamos suponiendo:

Instituto Politécnico Nacional

Implícitamente en lo anterior, estamos suponiendo:

- Que, si R_2 es el resultado de aplicarle un movimiento rígido a R_1, entonces $A(R_2) = A(R_1)$,

Instituto Politécnico Nacional

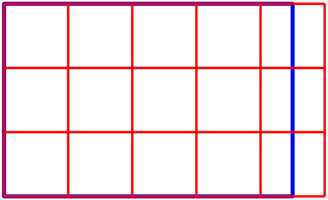
Implícitamente en lo anterior, estamos suponiendo:

- Que, si R_2 es el resultado de aplicarle un movimiento rígido a R_1, entonces $A(R_2) = A(R_1)$,
- Que, si R_1 y R_2 son regiones con $A(R_1 \cap R_2) = 0$, entonces $A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2)$.

Instituto Politécnico Nacional

Implícitamente en lo anterior, estamos suponiendo:

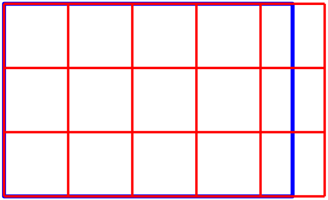
- Que, si R_2 es el resultado de aplicarle un movimiento rígido a R_1, entonces $A(R_2) = A(R_1)$,
- Que, si R_1 y R_2 son regiones con $A(R_1 \cap R_2) = 0$, entonces $A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2)$.



Instituto Politécnico Nacional

Implícitamente en lo anterior, estamos suponiendo:

- Que, si R_2 es el resultado de aplicarle un movimiento rígido a R_1, entonces $A(R_2) = A(R_1)$,
- Que, si R_1 y R_2 son regiones con $A(R_1 \cap R_2) = 0$, entonces $A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2)$.

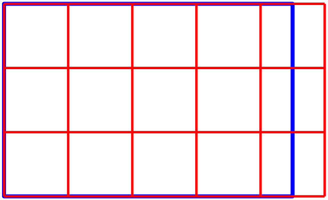


$$A(\square) \quad = \quad A(\square_1 \cup \square_2)$$

Instituto Politécnico Nacional

Implícitamente en lo anterior, estamos suponiendo:

- Que, si R_2 es el resultado de aplicarle un movimiento rígido a R_1, entonces $A(R_2) = A(R_1)$,
- Que, si R_1 y R_2 son regiones con $A(R_1 \cap R_2) = 0$, entonces $A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2)$.

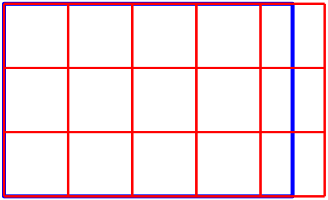


$$\begin{aligned} A(\square) &= A(\square_1 \cup \square_2) \\ &= A(\square_1) + A(\square_2) \end{aligned}$$

Instituto Politécnico Nacional

Implícitamente en lo anterior, estamos suponiendo:

- Que, si R_2 es el resultado de aplicarle un movimiento rígido a R_1, entonces $A(R_2) = A(R_1)$,
- Que, si R_1 y R_2 son regiones con $A(R_1 \cap R_2) = 0$, entonces $A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2)$.

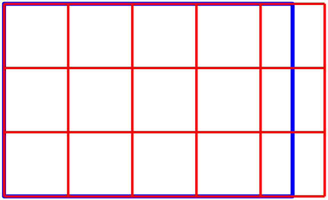


$$\begin{aligned} A(\square) &= A(\square_1 \cup \square_2) \\ &= A(\square_1) + A(\square_2) \\ &= A(\blacksquare) + A(\blacksquare) \end{aligned}$$

Instituto Politécnico Nacional

Implícitamente en lo anterior, estamos suponiendo:

- Que, si R_2 es el resultado de aplicarle un movimiento rígido a R_1, entonces $A(R_2) = A(R_1)$,
- Que, si R_1 y R_2 son regiones con $A(R_1 \cap R_2) = 0$, entonces $A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2)$.

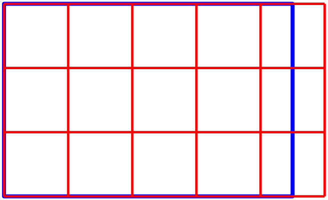


$$
\begin{aligned}
A(\square) &= A(\square_1 \cup \square_2) \\
&= A(\square_1) + A(\square_2) \\
&= A(\blacksquare) + A(\blacksquare) \\
&= 2A(\blacksquare),
\end{aligned}
$$

Instituto Politécnico Nacional

Implícitamente en lo anterior, estamos suponiendo:

- Que, si R_2 es el resultado de aplicarle un movimiento rígido a R_1, entonces $A(R_2) = A(R_1)$,
- Que, si R_1 y R_2 son regiones con $A(R_1 \cap R_2) = 0$, entonces $A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2)$.



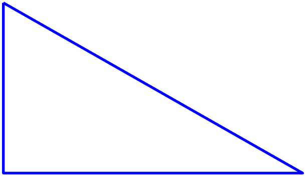
$$\begin{aligned} A(\square) &= A(\square_1 \cup \square_2) \\ &= A(\square_1) + A(\square_2) \\ &= A(\blacksquare) + A(\blacksquare) \\ &= 2A(\blacksquare), \end{aligned}$$

Por lo tanto, $$A(\blacksquare) = \frac{1}{2} A(\square).$$

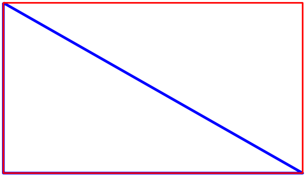
Instituto Politécnico Nacional

Un caso un poco más complicado:

Un caso un poco más complicado:

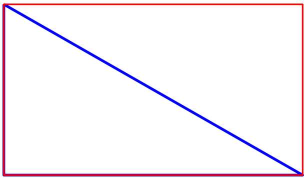


Un caso un poco más complicado:



$$bh = A(\square) = 2A(\triangle)$$

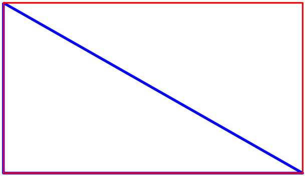
Un caso un poco más complicado:



$$bh = A(\square) = 2A(\triangle)$$

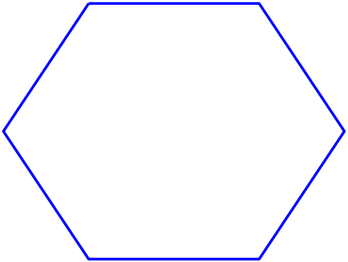
Incluso más complicado:

Un caso un poco más complicado:

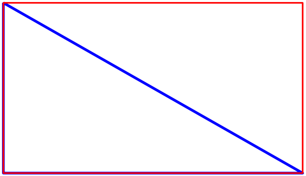


$$bh = A(\square) = 2A(\triangle)$$

Incluso más complicado:

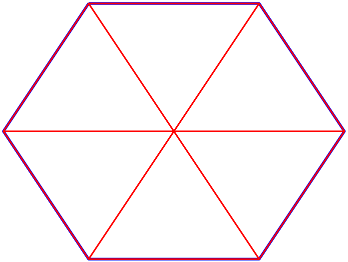


Un caso un poco más complicado:



$$bh = A(\square) = 2A(\triangle)$$

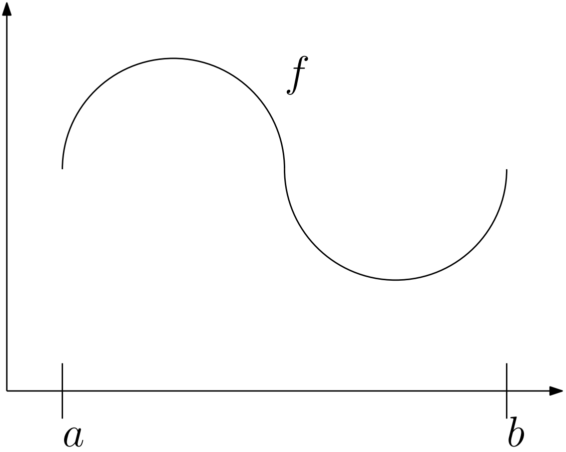
Incluso más complicado:




¡Matemáticas hijo!

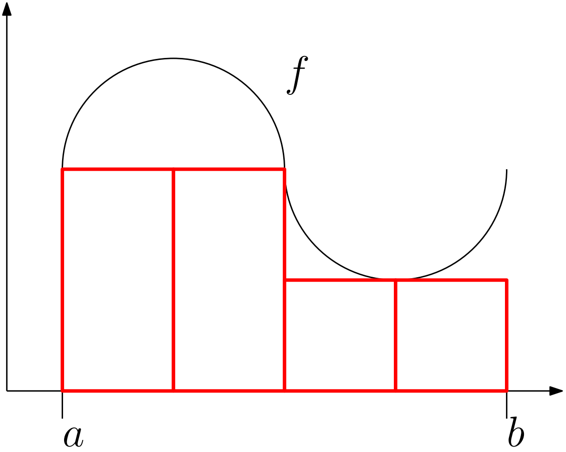
Calculando el área bajo la curva de una función:

Calculando el área bajo la curva de una función:



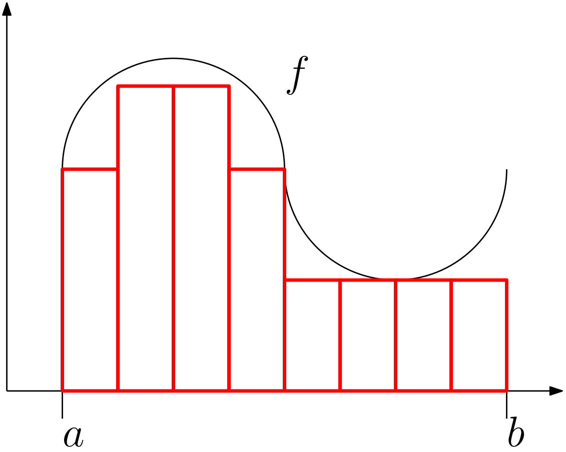
Instituto Politécnico Nacional

Calculando el área bajo la curva de una función:

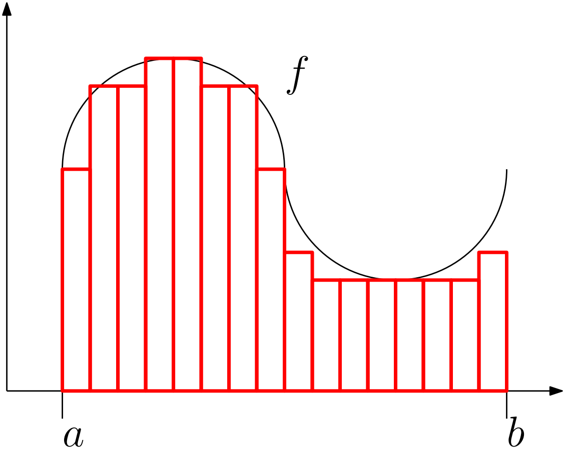


Instituto Politécnico Nacional

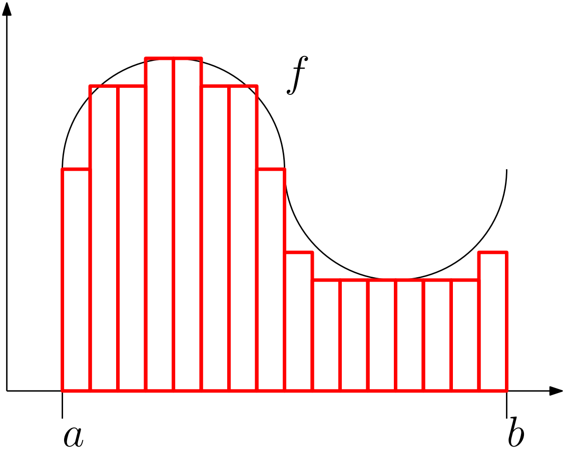
Calculando el área bajo la curva de una función:



Calculando el área bajo la curva de una función:

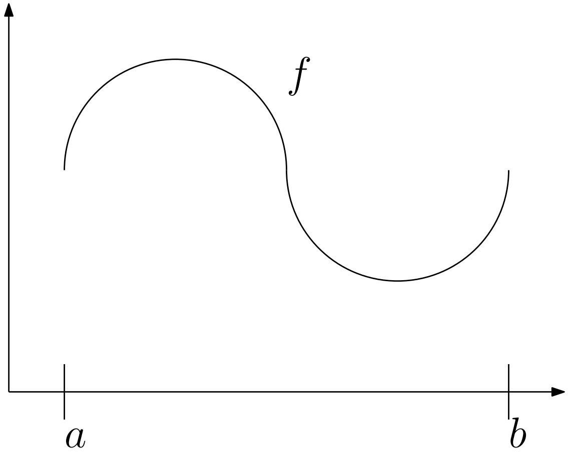


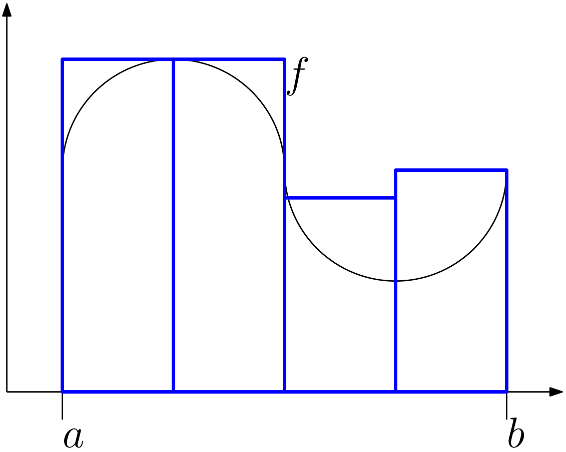
Calculando el área bajo la curva de una función:

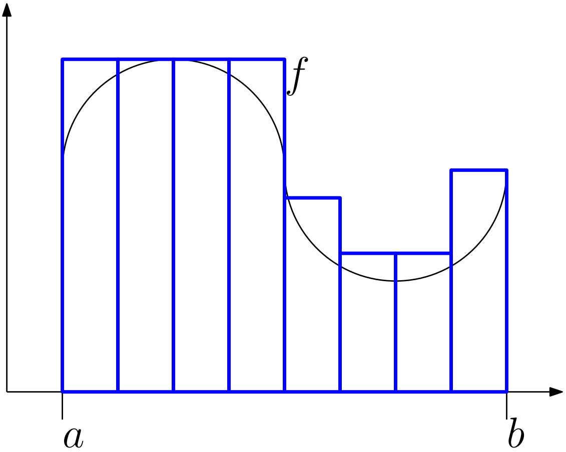


$$\underline{\int_a^b} f = \sup\left\{ A(\varphi) \middle| \varphi \text{ es constante a pedazos y } \varphi \le f \right\}$$

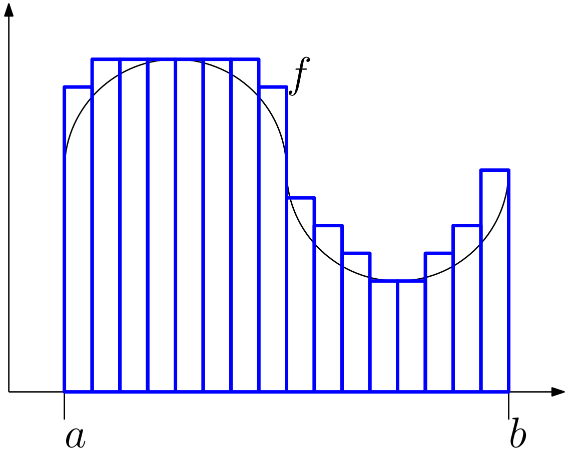
Instituto Politécnico Nacional

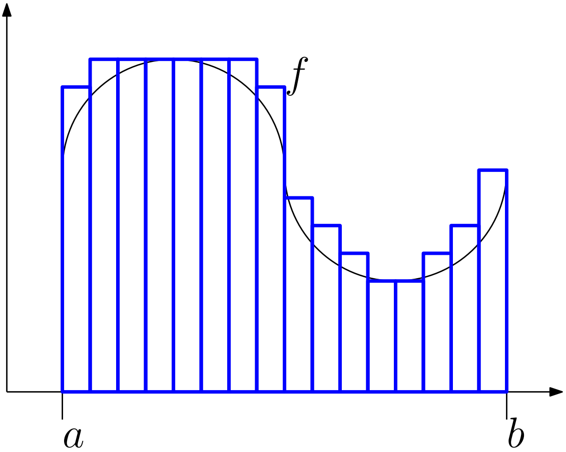

f
a
b


f
a
b



f
a
b


f
a
b



$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\left\{ A(\psi) \middle| \psi \text{ es constante a pedazos y } f \leq \psi \right\}$$

Instituto Politécnico Nacional

Decimos que f es **integrable según Riemann** si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$;

Decimos que f es **integrable según Riemann** si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$; este número es el área bajo la curva de f.

Instituto Politécnico Nacional

Decimos que f es **integrable según Riemann** si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$; este número es el área bajo la curva de f.

Para calcular estas áreas, contamos con el **Teorema Fundamental del Cálculo**:

Instituto Politécnico Nacional

Decimos que f es **integrable según Riemann** si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$; este número es el área bajo la curva de f.

Para calcular estas áreas, contamos con el **Teorema Fundamental del Cálculo**:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a),$$

Decimos que f es **integrable según Riemann** si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$; este número es el área bajo la curva de f.

Para calcular estas áreas, contamos con el **Teorema Fundamental del Cálculo**:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a),$$

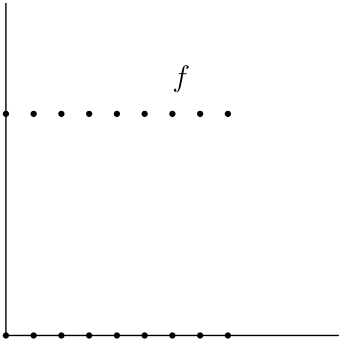
en donde F es tal que $F' = f$ (F es una *antiderivada* de f).

Instituto Politécnico Nacional

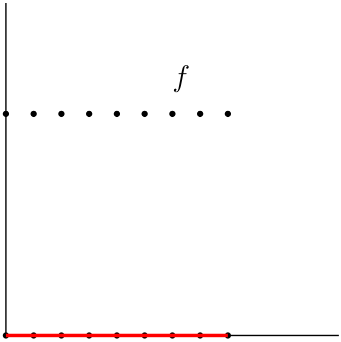
Un momento...

Instituto Politécnico Nacional

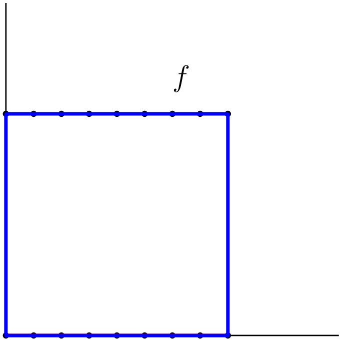
La *función de Dirichlet* $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (en $[0, 1]$).



La *función de Dirichlet* $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (en $[0,1]$).

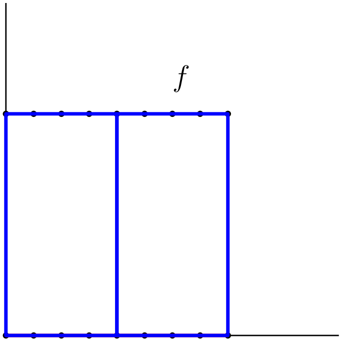


La *función de Dirichlet* $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (en $[0,1]$).



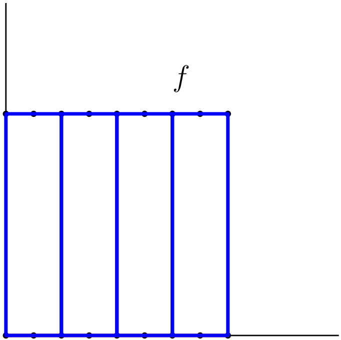
Instituto Politécnico Nacional

La *función de Dirichlet* $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (en $[0, 1]$).



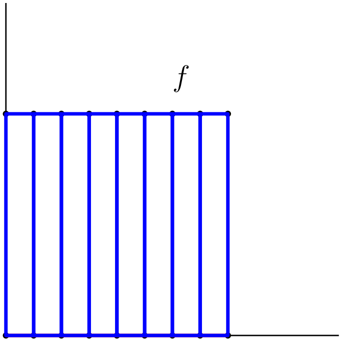
Instituto Politécnico Nacional

La *función de Dirichlet* $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (en $[0,1]$).

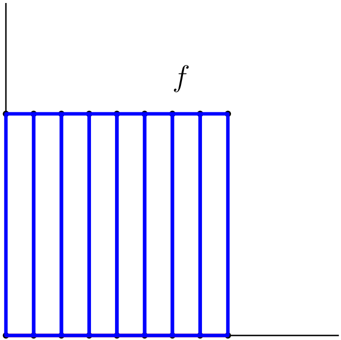


Instituto Politécnico Nacional

La *función de Dirichlet* $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (en $[0,1]$).



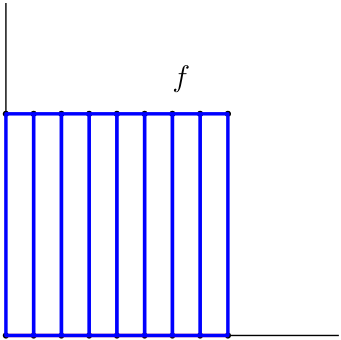
La *función de Dirichlet* $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (en $[0,1]$).



Siempre que $\varphi \leq f$, φ constante por pedazos, $A(\varphi) = 0$;

Instituto Politécnico Nacional

La *función de Dirichlet* $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (en $[0,1]$).



Siempre que $\varphi \leq f$, φ constante por pedazos, $A(\varphi) = 0$;

Siempre que $f \leq \psi$, ψ constante por pedazos, $A(\psi) = 1$...

Instituto Politécnico Nacional

Entonces, $\underline{\int_a^b} f = 0$

Instituto Politécnico Nacional

Entonces, $\underline{\int_a^b} f = 0$

y $\overline{\int_a^b} f = 1$

Entonces, $\underline{\int_a^b} f = 0$

y $\overline{\int_a^b} f = 1$

¿Cuál es el área bajo la curva de esa función?

Instituto Politécnico Nacional

Entonces, $\underline{\int_a^b} f = 0$

y $\overline{\int_a^b} f = 1$

¿Cuál es el área bajo la curva de esa función?

La idea genial de Lebesgue:

La idea genial de Lebesgue:

Cubrir no con una cantidad finita, sino con una cantidad *infinita* de rectángulos...

Instituto Politécnico Nacional

La idea genial de Lebesgue:

Cubrir no con una cantidad finita, sino con una cantidad *infinita* de rectángulos...

$$\lambda^*(R) = \text{ínf}\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A(R_n) \middle| R_n \text{ rectángulos, } R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \right\}$$

Instituto Politécnico Nacional

Por ejemplo:

Por ejemplo:

Recuerde que el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ es *numerable*,

Instituto Politécnico Nacional

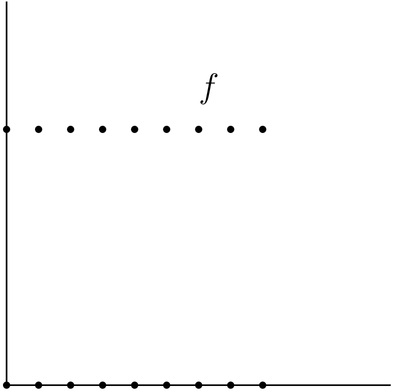
Por ejemplo:

Recuerde que el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ es *numerable*,
$\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots\}$;

Instituto Politécnico Nacional

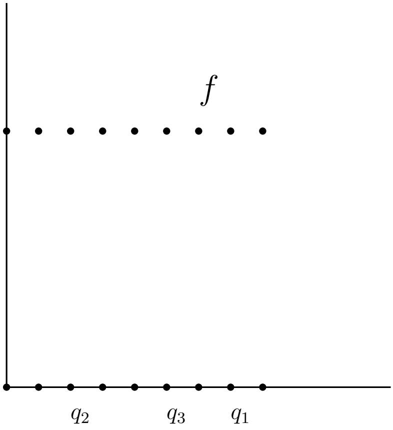
Por ejemplo:

Recuerde que el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ es *numerable*,
$\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$;

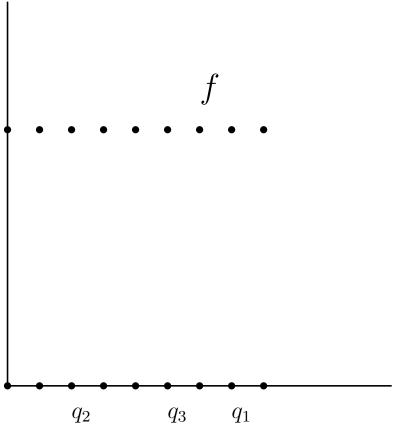


Por ejemplo:

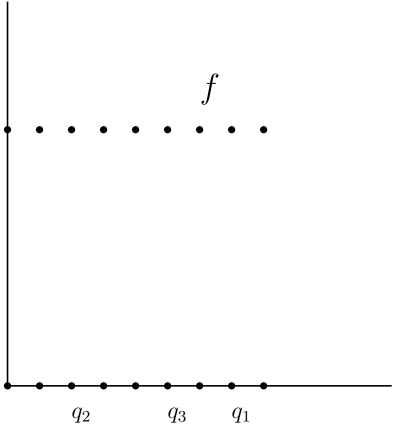
Recuerde que el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ es *numerable*,
$\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$;



Dado $\varepsilon > 0$,

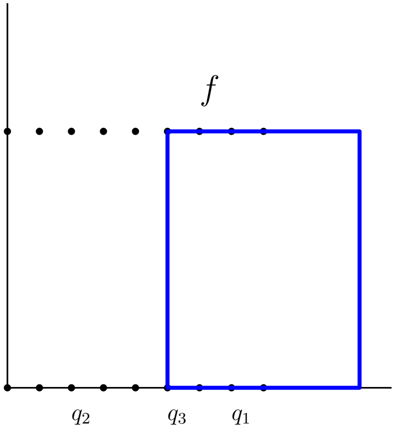


Dado $\varepsilon > 0$,



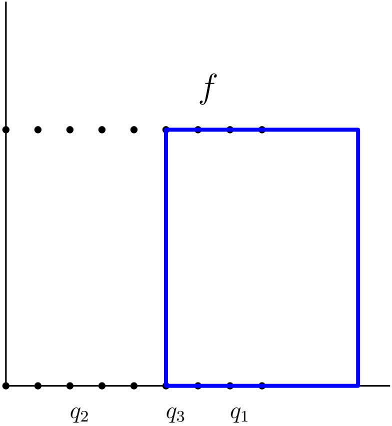
cubrir q_1 con un rectángulo R_1 de base $\frac{\varepsilon}{2}$,

Dado $\varepsilon > 0$,



cubrir q_1 con un rectángulo R_1 de base $\frac{\varepsilon}{2}$,

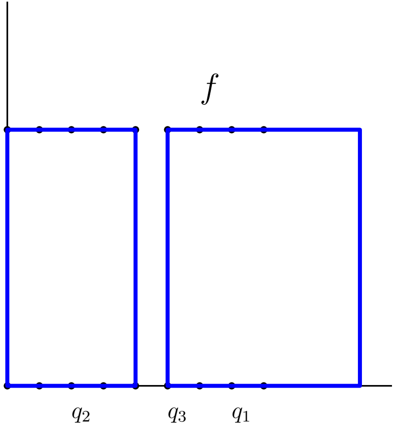
Dado $\varepsilon > 0$,



cubrir q_1 con un rectángulo R_1 de base $\dfrac{\varepsilon}{2}$,

cubrir q_2 con un rectángulo R_2 de base $\dfrac{\varepsilon}{4}$,

Dado $\varepsilon > 0$,

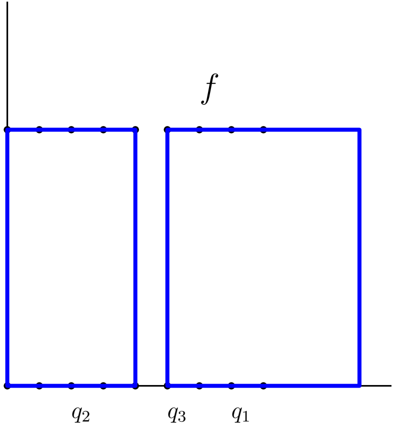


cubrir q_1 con un rectángulo R_1 de base $\frac{\varepsilon}{2}$,

cubrir q_2 con un rectángulo R_2 de base $\frac{\varepsilon}{4}$,

Instituto Politécnico Nacional

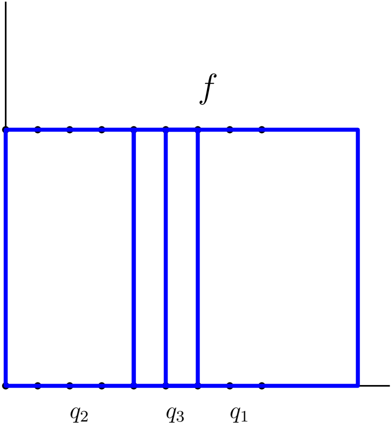
Dado $\varepsilon > 0$,



cubrir q_1 con un rectángulo R_1 de base $\frac{\varepsilon}{2}$,
cubrir q_2 con un rectángulo R_2 de base $\frac{\varepsilon}{4}$,
cubrir q_3 con un rectángulo R_3 de base $\frac{\varepsilon}{8}$,

Instituto Politécnico Nacional

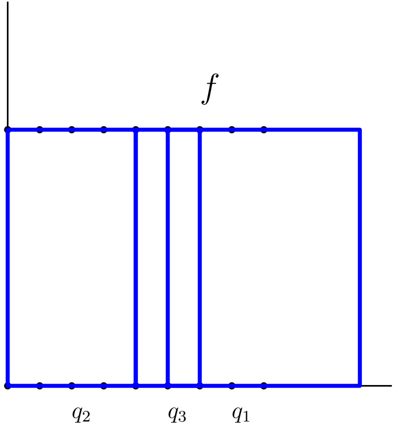
Dado $\varepsilon > 0$,



cubrir q_1 con un rectángulo R_1 de base $\frac{\varepsilon}{2}$,
cubrir q_2 con un rectángulo R_2 de base $\frac{\varepsilon}{4}$,
cubrir q_3 con un rectángulo R_3 de base $\frac{\varepsilon}{8}$,

Instituto Politécnico Nacional

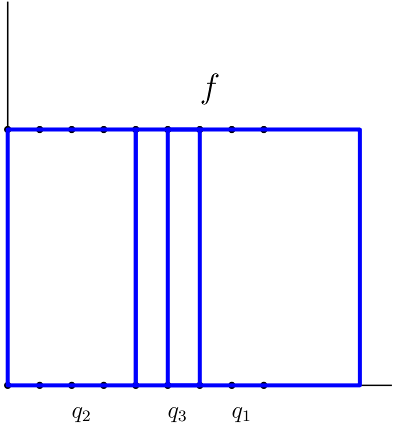
Dado $\varepsilon > 0$,



cubrir q_1 con un rectángulo R_1 de base $\frac{\varepsilon}{2}$,
cubrir q_2 con un rectángulo R_2 de base $\frac{\varepsilon}{4}$,
cubrir q_3 con un rectángulo R_3 de base $\frac{\varepsilon}{8}$,
y así sucesivamente...

Instituto Politécnico Nacional

Dado $\varepsilon > 0$,



$$A(f) \leq \sum_{n=1}^{\infty} A(R_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

cubrir q_1 con un rectángulo R_1 de base $\frac{\varepsilon}{2}$,
cubrir q_2 con un rectángulo R_2 de base $\frac{\varepsilon}{4}$,
cubrir q_3 con un rectángulo R_3 de base $\frac{\varepsilon}{8}$,
y así sucesivamente...

Por lo tanto:

Instituto Politécnico Nacional

Por lo tanto:

$$A(f) \leq \varepsilon$$

Por lo tanto:

$$A(f) \leq \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$...

Instituto Politécnico Nacional

Por lo tanto:

$$A(f) \leq \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$...

Por lo tanto, $A(f) = \lambda^*(R) = 0$.

Instituto Politécnico Nacional

Por lo tanto:

$$A(f) \leq \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$...

Por lo tanto, $A(f) = \lambda^*(R) = 0$.

Instituto Politécnico Nacional

En los conjuntos *bien comportados*

En los conjuntos *bien comportados* (llamados *medibles*),

En los conjuntos *bien comportados* (llamados *medibles*), la medida de Lebesgue λ cumple:

En los conjuntos *bien comportados* (llamados *medibles*), la medida de Lebesgue λ cumple:

- Si R_2 es el resultado de aplicarle un movimiento rígido a R_1, entonces $\lambda(R_2) = \lambda(R_1)$,

Instituto Politécnico Nacional

En los conjuntos *bien comportados* (llamados *medibles*), la medida de Lebesgue λ cumple:

- Si R_2 es el resultado de aplicarle un movimiento rígido a R_1, entonces $\lambda(R_2) = \lambda(R_1)$,
- Si $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ son regiones sin puntos en común, entonces $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(R_n)$.

Instituto Politécnico Nacional

En los conjuntos *bien comportados* (llamados *medibles*), la medida de Lebesgue λ cumple:

- Si R_2 es el resultado de aplicarle un movimiento rígido a R_1, entonces $\lambda(R_2) = \lambda(R_1)$,
- Si $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ son regiones sin puntos en común, entonces $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(R_n)$.

Teorema (Vitali)

Existen regiones R que no son bien comportadas.

Instituto Politécnico Nacional

Paradoja de Banach–Tarski:

Instituto Politécnico Nacional

Paradoja de Banach–Tarski: Es posible partir una esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en cinco piezas R_1, R_2, R_3, R_4, R_5

Instituto Politécnico Nacional

Paradoja de Banach–Tarski: Es posible partir una esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en cinco piezas R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 de tal forma que, después de transformarlas mediante movimientos rígidos

Instituto Politécnico Nacional

Paradoja de Banach–Tarski: Es posible partir una esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en cinco piezas R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 de tal forma que, después de transformarlas mediante movimientos rígidos en T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, tenemos que

Instituto Politécnico Nacional

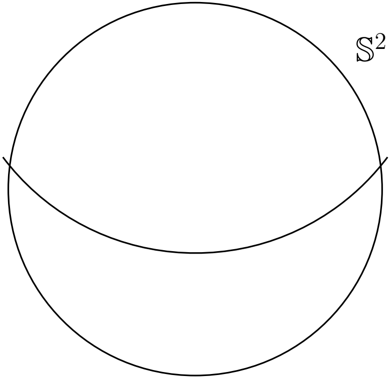
Paradoja de Banach–Tarski: Es posible partir una esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en cinco piezas R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 de tal forma que, después de transformarlas mediante movimientos rígidos en T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, tenemos que $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \mathbb{S}^2$

Instituto Politécnico Nacional

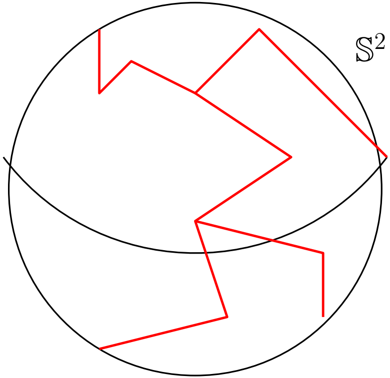
Paradoja de Banach–Tarski: Es posible partir una esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en cinco piezas R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 de tal forma que, después de transformarlas mediante movimientos rígidos en T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, tenemos que $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \mathbb{S}^2$ y $T_4 \cup T_5 = \mathbb{S}^2$.

Instituto Politécnico Nacional

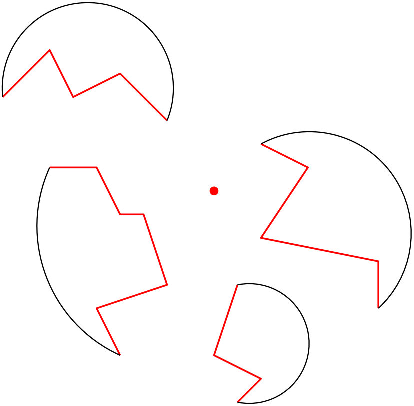
Paradoja de Banach–Tarski: Es posible partir una esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en cinco piezas R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 de tal forma que, después de transformarlas mediante movimientos rígidos en T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, tenemos que $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \mathbb{S}^2$ y $T_4 \cup T_5 = \mathbb{S}^2$.



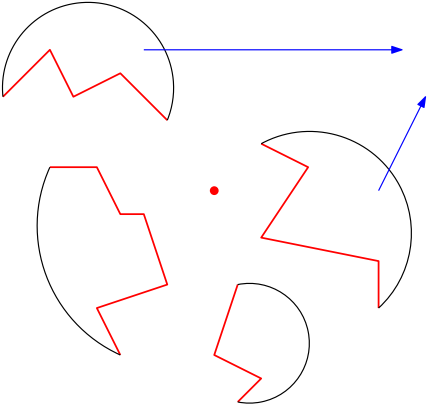
Paradoja de Banach–Tarski: Es posible partir una esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en cinco piezas R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 de tal forma que, después de transformarlas mediante movimientos rígidos en T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, tenemos que $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \mathbb{S}^2$ y $T_4 \cup T_5 = \mathbb{S}^2$.



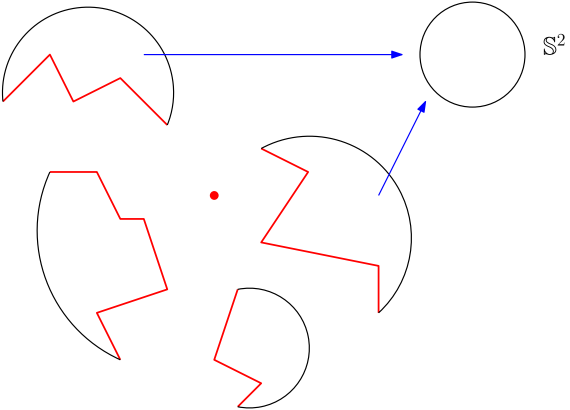
Paradoja de Banach–Tarski: Es posible partir una esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en cinco piezas R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 de tal forma que, después de transformarlas mediante movimientos rígidos en T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, tenemos que $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \mathbb{S}^2$ y $T_4 \cup T_5 = \mathbb{S}^2$.



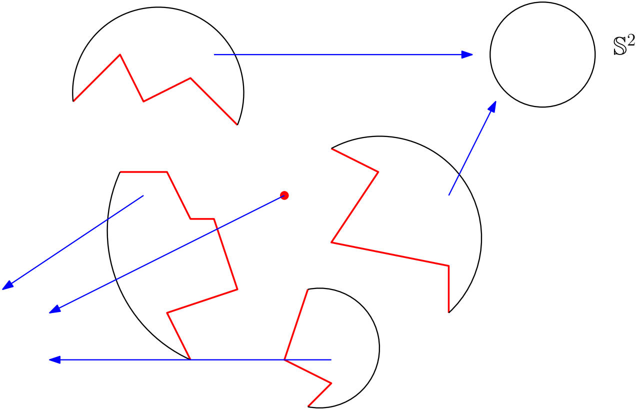
Paradoja de Banach–Tarski: Es posible partir una esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en cinco piezas R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 de tal forma que, después de transformarlas mediante movimientos rígidos en T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, tenemos que $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \mathbb{S}^2$ y $T_4 \cup T_5 = \mathbb{S}^2$.



Paradoja de Banach–Tarski: Es posible partir una esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en cinco piezas R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 de tal forma que, después de transformarlas mediante movimientos rígidos en T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, tenemos que $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \mathbb{S}^2$ y $T_4 \cup T_5 = \mathbb{S}^2$.

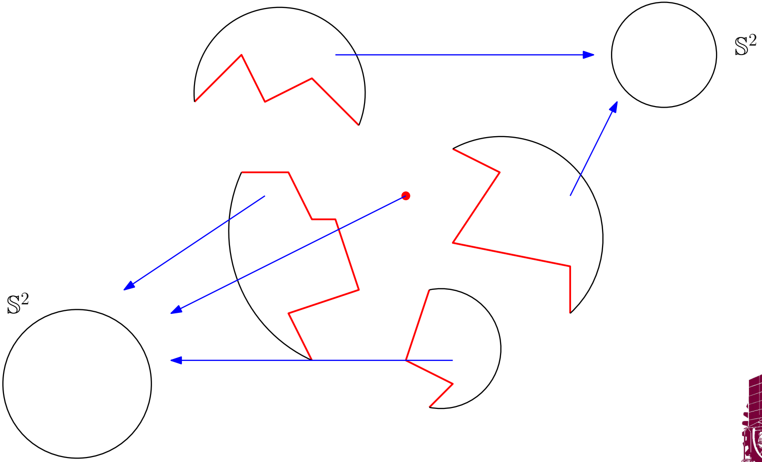


Paradoja de Banach–Tarski: Es posible partir una esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en cinco piezas R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 de tal forma que, después de transformarlas mediante movimientos rígidos en T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, tenemos que $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \mathbb{S}^2$ y $T_4 \cup T_5 = \mathbb{S}^2$.



Instituto Politécnico Nacional

Paradoja de Banach–Tarski: Es posible partir una esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en cinco piezas R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 de tal forma que, después de transformarlas mediante movimientos rígidos en T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, tenemos que $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \mathbb{S}^2$ y $T_4 \cup T_5 = \mathbb{S}^2$.



Instituto Politécnico Nacional

¿¿¿¡¡¡Khá!!!???

La pregunta de Lebesgue:

La pregunta de Lebesgue:

¿Existe una función $\mu : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

Instituto Politécnico Nacional

La pregunta de Lebesgue:

¿Existe una función $\mu : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

1. μ coincide con λ en los conjuntos medibles,

Instituto Politécnico Nacional

La pregunta de Lebesgue:

¿Existe una función $\mu : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

1. μ coincide con λ en los conjuntos medibles,
2. si R_2 es una traslación de R_1, entonces $\mu(R_2) = \mu(R_1)$,

Instituto Politécnico Nacional

La pregunta de Lebesgue:

¿Existe una función $\mu : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

1. μ coincide con λ en los conjuntos medibles,
2. si R_2 es una traslación de R_1, entonces $\mu(R_2) = \mu(R_1)$,
3. si $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ son regiones sin puntos en común, entonces
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n)$$

Instituto Politécnico Nacional

La pregunta de Lebesgue:

¿Existe una función $\mu : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

1. μ coincide con λ en los conjuntos medibles,
2. si R_2 es una traslación de R_1, entonces $\mu(R_2) = \mu(R_1)$,
3. si $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ son regiones sin puntos en común, entonces $$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n)$$

?

Instituto Politécnico Nacional

La pregunta de Lebesgue:

¿Existe una función $\mu : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

1. μ coincide con λ en los conjuntos medibles,
2. si R_2 es una traslación de R_1, entonces $\mu(R_2) = \mu(R_1)$,
3. si $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ son regiones sin puntos en común, entonces
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n)$$

?

Respuesta:

Instituto Politécnico Nacional

La pregunta de Lebesgue:

¿Existe una función $\mu : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

1. μ coincide con λ en los conjuntos medibles,
2. si R_2 es una traslación de R_1, entonces $\mu(R_2) = \mu(R_1)$,
3. si $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ son regiones sin puntos en común, entonces
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n)$$

?

Respuesta: No, por el teorema de Vitali.

Instituto Politécnico Nacional

Una pregunta de Banach:

Instituto Politécnico Nacional

Una pregunta de Banach:

¿Existe una función $\mu : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

Instituto Politécnico Nacional

Una pregunta de Banach:

¿Existe una función $\mu : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

1. μ coincide con λ en los conjuntos medibles,

Instituto Politécnico Nacional

Una pregunta de Banach:

¿Existe una función $\mu : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

1. μ coincide con λ en los conjuntos medibles,
2. si $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ son regiones sin puntos en común, entonces
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n)$$

Instituto Politécnico Nacional

Una pregunta de Banach:

¿Existe una función $\mu : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

1. μ coincide con λ en los conjuntos medibles,
2. si $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ son regiones sin puntos en común, entonces
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n)$$

?

Instituto Politécnico Nacional

Una pregunta de Banach:

¿Existe una función $\mu : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

1. μ coincide con λ en los conjuntos medibles,
2. si $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ son regiones sin puntos en común, entonces
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n)$$

?

Respuesta:

Instituto Politécnico Nacional

Una pregunta de Banach:

¿Existe una función $\mu : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

1. μ coincide con λ en los conjuntos medibles,
2. si $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ son regiones sin puntos en común, entonces
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n)$$

?

Respuesta: Resulta estar estrechamente relacionada con el infinito...

Instituto Politécnico Nacional

El sorprendente descubrimiento de Cantor:

El sorprendente descubrimiento de Cantor:

¡Hay varios tamaños de infinito!

Instituto Politécnico Nacional

El sorprendente descubrimiento de Cantor:

¡Hay varios tamaños de infinito!

$\aleph_0$ es el tamaño del conjunto $\mathbb{N}$,

Instituto Politécnico Nacional

El sorprendente descubrimiento de Cantor:

¡Hay varios tamaños de infinito!

$\aleph_0$ es el tamaño del conjunto $\mathbb{N}$, los conjuntos de tamaño $\aleph_0$ se pueden listar

Instituto Politécnico Nacional

El sorprendente descubrimiento de Cantor:

¡Hay varios tamaños de infinito!

$\aleph_0$ es el tamaño del conjunto $\mathbb{N}$, los conjuntos de tamaño $\aleph_0$ se pueden listar $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

Instituto Politécnico Nacional

El sorprendente descubrimiento de Cantor:

¡Hay varios tamaños de infinito!

$\aleph_0$ es el tamaño del conjunto $\mathbb{N}$, los conjuntos de tamaño $\aleph_0$ se pueden listar $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

1. El conjunto de números pares:

Instituto Politécnico Nacional

El sorprendente descubrimiento de Cantor:

¡Hay varios tamaños de infinito!

$\aleph_0$ es el tamaño del conjunto $\mathbb{N}$, los conjuntos de tamaño $\aleph_0$ se pueden listar $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

1. El conjunto de números pares: $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$.

Instituto Politécnico Nacional

El sorprendente descubrimiento de Cantor:

¡Hay varios tamaños de infinito!

$\aleph_0$ es el tamaño del conjunto $\mathbb{N}$, los conjuntos de tamaño $\aleph_0$ se pueden listar $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

1. El conjunto de números pares: $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$.
2. El conjunto de números primos:

Instituto Politécnico Nacional

El sorprendente descubrimiento de Cantor:

¡Hay varios tamaños de infinito!

$\aleph_0$ es el tamaño del conjunto $\mathbb{N}$, los conjuntos de tamaño $\aleph_0$ se pueden listar $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

1. El conjunto de números pares: $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$.
2. El conjunto de números primos: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$.

Instituto Politécnico Nacional

El sorprendente descubrimiento de Cantor:

¡Hay varios tamaños de infinito!

$\aleph_0$ es el tamaño del conjunto $\mathbb{N}$, los conjuntos de tamaño $\aleph_0$ se pueden listar $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

1. El conjunto de números pares: $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$.
2. El conjunto de números primos: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$.
3. El conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$:

Instituto Politécnico Nacional

El sorprendente descubrimiento de Cantor:

¡Hay varios tamaños de infinito!

$\aleph_0$ es el tamaño del conjunto $\mathbb{N}$, los conjuntos de tamaño $\aleph_0$ se pueden listar $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

1. El conjunto de números pares: $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$.
2. El conjunto de números primos: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$.
3. El conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$: $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$.

Instituto Politécnico Nacional

El sorprendente descubrimiento de Cantor:

¡Hay varios tamaños de infinito!

$\aleph_0$ es el tamaño del conjunto $\mathbb{N}$, los conjuntos de tamaño $\aleph_0$ se pueden listar $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

1. El conjunto de números pares: $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$.
2. El conjunto de números primos: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$.
3. El conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$: $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$.
4. El conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$:

Instituto Politécnico Nacional

El sorprendente descubrimiento de Cantor:

¡Hay varios tamaños de infinito!

$\aleph_0$ es el tamaño del conjunto $\mathbb{N}$, los conjuntos de tamaño $\aleph_0$ se pueden listar $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

1. El conjunto de números pares: $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$.
2. El conjunto de números primos: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$.
3. El conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$: $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$.
4. El conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$: $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$

Instituto Politécnico Nacional

El sorprendente descubrimiento de Cantor:

¡Hay varios tamaños de infinito!

$\aleph_0$ es el tamaño del conjunto $\mathbb{N}$, los conjuntos de tamaño $\aleph_0$ se pueden listar $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

1. El conjunto de números pares: $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$.
2. El conjunto de números primos: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$.
3. El conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$: $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$.
4. El conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$: $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$

Pareciera que todo mundo tiene tamaño $\aleph_0$...

Instituto Politécnico Nacional

Teorema (Cantor)

El conjunto de números reales,

Teorema (Cantor)

El conjunto de números reales, $\mathbb{R}$*,*

Teorema (Cantor)

El conjunto de números reales, $\mathbb{R}$, no es numerable.

Teorema (Cantor)

El conjunto de números reales, $\mathbb{R}$, *no es numerable.*
(De hecho, $[0, 1]$ *no es numerable)*

Instituto Politécnico Nacional

Teorema (Cantor)

El conjunto de números reales, $\mathbb{R}$, no es numerable.
(De hecho, $[0, 1]$ no es numerable)
$\aleph_0 < |\mathbb{R}|$

Instituto Politécnico Nacional

Teorema (Cantor)

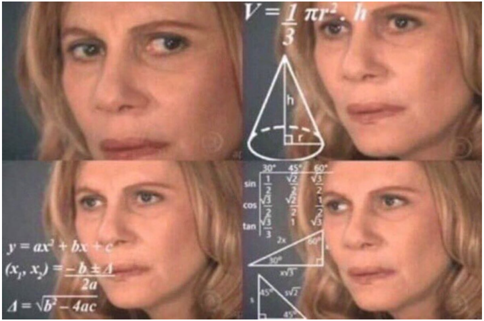
El conjunto de números reales, $\mathbb{R}$*, no es numerable.*
(De hecho, $[0, 1]$ *no es numerable)*
$\aleph_0 < |\mathbb{R}|$

A los conjuntos con la misma cantidad de elementos que $\mathbb{R}$, se les dice que tienen tamaño $\mathfrak{c}$.

Teorema (Cantor)

El conjunto de números reales, $\mathbb{R}$, no es numerable.
(De hecho, $[0,1]$ no es numerable)
$\aleph_0 < |\mathbb{R}|$

A los conjuntos con la misma cantidad de elementos que $\mathbb{R}$, se les dice que tienen tamaño $\mathfrak{c}$.



Los tamaños del infinito

Instituto Politécnico Nacional

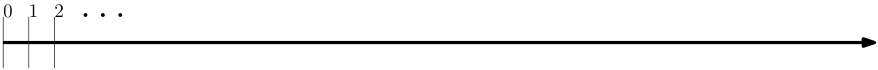
Los tamaños del infinito (cardinales):

Instituto Politécnico Nacional

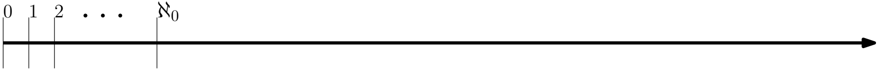
Los tamaños del infinito (cardinales):

Instituto Politécnico Nacional

Los tamaños del infinito (cardinales):

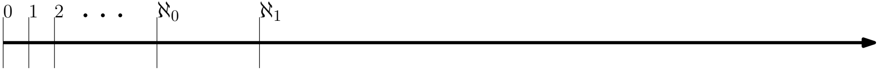


Los tamaños del infinito (cardinales):



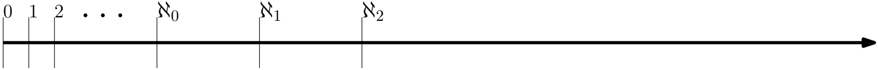
Instituto Politécnico Nacional

Los tamaños del infinito (cardinales):



Instituto Politécnico Nacional

Los tamaños del infinito (cardinales):



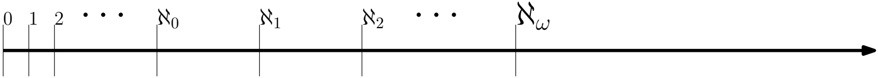
Instituto Politécnico Nacional

Los tamaños del infinito (cardinales):

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad \aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \quad \cdots$$

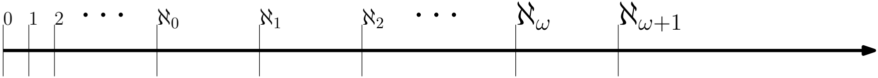
Instituto Politécnico Nacional

Los tamaños del infinito (cardinales):

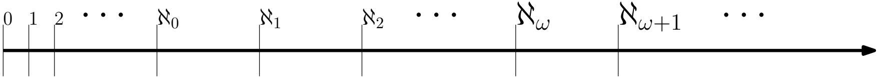


Instituto Politécnico Nacional

Los tamaños del infinito (cardinales):

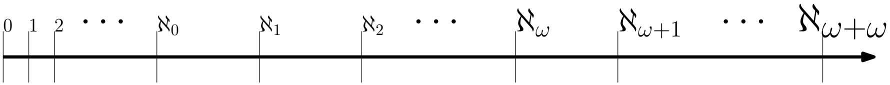


Los tamaños del infinito (cardinales):



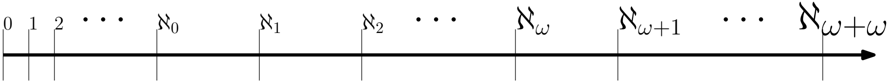
Instituto Politécnico Nacional

Los tamaños del infinito (cardinales):



Instituto Politécnico Nacional

Los tamaños del infinito (cardinales):



Al infinito... ¡y más allá!

Instituto Politécnico Nacional

Los tamaños del infinito (cardinales):

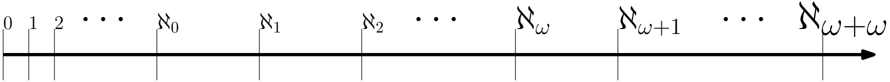
$$0 \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad \aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \quad \cdots \quad \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \quad \cdots \quad \aleph_{\omega+\omega}$$

Al infinito... ¡y más allá!

Instituto Politécnico Nacional

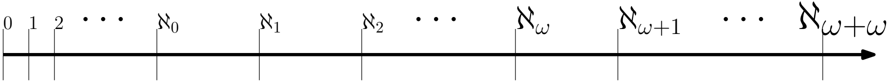
Pregunta (Cantor):

Pregunta (Cantor): ¿Cuál de todos estos es $\mathfrak{c}$?



Instituto Politécnico Nacional

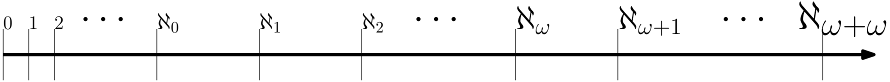
Pregunta (Cantor): ¿Cuál de todos estos es $\mathfrak{c}$?



La conjetura era que $\mathfrak{c} = \aleph_1$ (la *Hipótesis del Continuo*)

Instituto Politécnico Nacional

Pregunta (Cantor): ¿Cuál de todos estos es $\mathfrak{c}$?



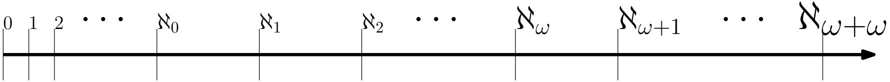
La conjetura era que $\mathfrak{c} = \aleph_1$ (la *Hipótesis del Continuo*)

Teorema (Gödel 1939, Cohen 1960)

En realidad, no podemos determinar el valor exacto de $\mathfrak{c}$.

Instituto Politécnico Nacional

Pregunta (Cantor): ¿Cuál de todos estos es $\mathfrak{c}$?



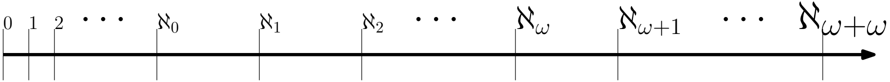
La conjetura era que $\mathfrak{c} = \aleph_1$ (la *Hipótesis del Continuo*)

Teorema (Gödel 1939, Cohen 1960)

En realidad, no podemos determinar el valor exacto de $\mathfrak{c}$.
$\mathfrak{c}$ *puede ser igual a básicamente cualquier* $\aleph_\alpha$

Instituto Politécnico Nacional

Pregunta (Cantor): ¿Cuál de todos estos es $\mathfrak{c}$?



La conjetura era que $\mathfrak{c} = \aleph_1$ (la *Hipótesis del Continuo*)

Teorema (Gödel 1939, Cohen 1960)

En realidad, no podemos determinar el valor exacto de $\mathfrak{c}$.
$\mathfrak{c}$ puede ser igual a básicamente cualquier $\aleph_\alpha$ (salvo algunas excepciones bien conocidas, por ejemplo $\alpha = \omega$).

Instituto Politécnico Nacional

Hilbert: **Gödel y Cohen:**

¡Dijiste que habías resuelto el problema del continuo! **Sí:**

Instituto Politécnico Nacional

Hilbert: Gödel y Cohen:

¡Dijiste que habías resuelto el problema del continuo!

Sí: es indecidible

Instituto Politécnico Nacional

Recordemos la pregunta de Banach:

Instituto Politécnico Nacional

Recordemos la pregunta de Banach:

¿Existe una función $\mu : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

Instituto Politécnico Nacional

Recordemos la pregunta de Banach:

¿Existe una función $\mu : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

1. μ coincide con λ en los conjuntos medibles,
2. si $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ son regiones sin puntos en común, entonces $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n)$?

Instituto Politécnico Nacional

Recordemos la pregunta de Banach:

¿Existe una función $\mu : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

1. μ coincide con λ en los conjuntos medibles,
2. si $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ son regiones sin puntos en común, entonces $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n)$?

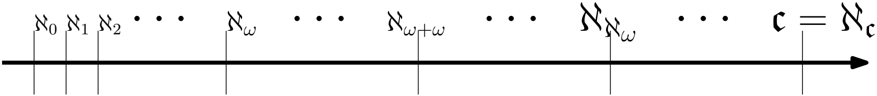
Teorema (Ulam)

En caso de que hubiera tal μ, entonces $\mathfrak{c}$ debería ser realmente grande...

Instituto Politécnico Nacional

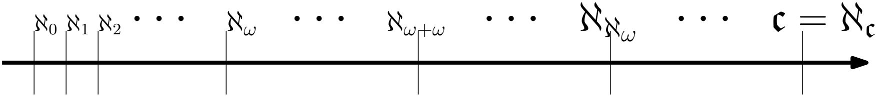
El mundo donde existe μ:

El mundo donde existe μ:



Instituto Politécnico Nacional

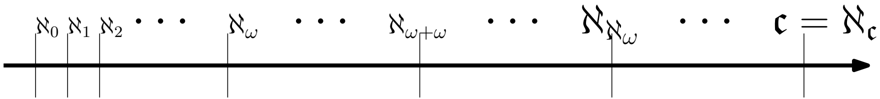
El mundo donde existe μ:



$\mathfrak{c} = \aleph_{\mathfrak{c}}$,

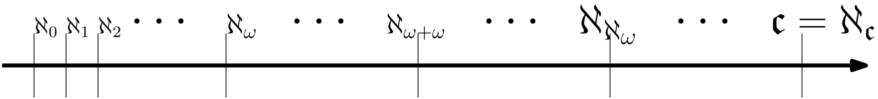
Instituto Politécnico Nacional

El mundo donde existe μ:



$\mathfrak{c} = \aleph_{\mathfrak{c}}$, de modo que el continuo es enorme.

El mundo donde existe μ:

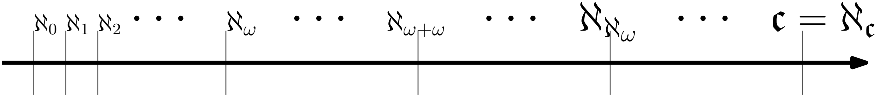


$\mathfrak{c} = \aleph_\mathfrak{c}$, de modo que el continuo es enorme.

De hecho, el continuo es *débilmente inaccesible*.

Instituto Politécnico Nacional

El mundo donde existe μ:

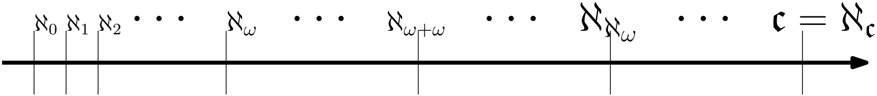


$\mathfrak{c} = \aleph_{\mathfrak{c}}$, de modo que el continuo es enorme.

De hecho, el continuo es *débilmente inaccesible*.

Recíprocamente: este mundo es posible

El mundo donde existe μ:



$\mathfrak{c} = \aleph_{\mathfrak{c}}$, de modo que el continuo es enorme.

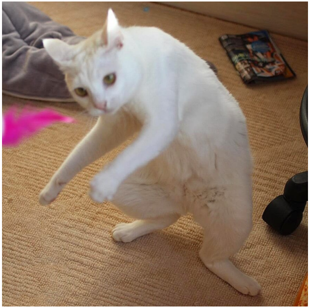
De hecho, el continuo es *débilmente inaccesible*.

Recíprocamente: este mundo es posible siempre y cuando exista un *cardinal medible*.

Instituto Politécnico Nacional

El mundo donde existe μ:

Hilbert:

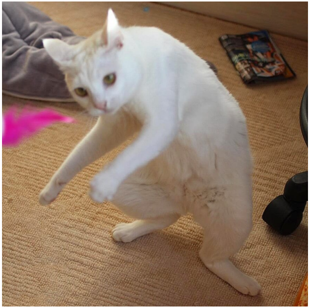


$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \quad \cdots \quad \aleph_\omega \quad \cdots \quad \aleph_{\omega+\omega} \quad \cdots \quad \aleph_{\aleph_\omega} \quad \cdots \quad \mathfrak{c} = \aleph_{\mathfrak{c}}$$

Instituto Politécnico Nacional

El mundo donde existe μ:

Hilbert:



$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \quad \cdots \quad \aleph_\omega \quad \cdots \quad \aleph_{\omega+\omega} \quad \cdots \quad \aleph_{\aleph_\omega} \quad \cdots \quad \mathfrak{c} = \aleph_{\mathfrak{c}}$$

(Yo había ponido mi continuo aquí...)

Instituto Politécnico Nacional

Instituto Politécnico Nacional

¡¡¡Muchísimas gracias!!!

Instituto Politécnico Nacional

¡¡¡Muchísimas gracias!!!

dfernandezb@ipn.mx

https://dfernandezb.web.app/espanol.html

Instituto Politécnico Nacional