Algunas Aplicaciones de los Métodos de la Teoría de Conjuntos a Problemas de Álgebra

David José Fernández Bretón
Asesor: Fernando Hernández Hernández

Universidad Nacional Autónoma de México
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Morelia, Michoacán, 13 de agosto de 2010.

1. Resultados Preliminares
   - Grupos Abelianos
   - Invariantes cardinales del continuo, el axioma de Martin
2. El problema de Whitehead
   - El problema de la extensión
   - Propiedades homológicas de los W-grupos
   - Acerca de los W-grupos numerables
   - Los W-grupos de orden ω_1
   - “Todo W-grupo es libre" es consistente
   - “Todo W-grupo es libre" es independiente
3. La cofinalidad del grupo simétrico infinito
   - Los grupos simétricos y algunas de sus propiedades
   - La cofinalidad del grupo simétrico infinito
   - Ligera variante y cota superior de $\mathrm{cf}(S_\omega)$
   - Una cota inferior para $\mathrm{cf}(S_\omega)$
4. Cocientes del grupo simétrico infinito y su espectro abeliano maximal
   - Los cardinales $A(S_\omega/\mathbb{F})$ y $\mathfrak{a}$.
   - Los grupos $S_\omega/\mathbb{F}(\mathcal{I})$ y los cardinales $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$
   - Una cota inferior para el cardinal $A([\omega]^{<\omega})$

Teorema

Sea

$$\langle 0\rangle \longrightarrow A \overset{f}{\hookrightarrow} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C \longrightarrow \langle 0\rangle$$

una sucesión exacta corta. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *La sucesión se escinde por la izquierda.*

(ii) *La sucesión se escinde por la derecha.*

(iii) $B = f[A] \oplus U$*, en donde* $U \leq B$ *es tal que* $g \restriction U$ *es un isomorfismo de* U *en* C*. En particular,* $B \cong f[A] \oplus C$*.*

$$\begin{tikzcd} \langle 0\rangle \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "f"] & f[A]\oplus U \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[l, bend left, dashed, "v"] & C \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "u"] & \langle 0\rangle \end{tikzcd}$$

Teorema

Sea

$$\langle 0\rangle \longrightarrow A \xhookrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \langle 0\rangle$$

una sucesión exacta corta. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *La sucesión se escinde por la izquierda.*

(ii) *La sucesión se escinde por la derecha.*

(iii) $B = f[A] \oplus U$*, en donde* $U \leq B$ *es tal que* $g \restriction U$ *es un isomorfismo de* U *en* C*. En particular,* $B \cong f[A] \oplus C$*.*

$$\begin{tikzcd} \langle 0\rangle \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "f"] & f[A]\oplus U \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[l, dashed, bend left, "v"] & C \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend left, "u"] & \langle 0\rangle \end{tikzcd}$$

Teorema

Sea

$$\langle 0\rangle \longrightarrow A \overset{f}{\hookrightarrow} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C \longrightarrow \langle 0\rangle$$

una sucesión exacta corta. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *La sucesión se escinde por la izquierda.*

(ii) *La sucesión se escinde por la derecha.*

(iii) $B = f[A] \oplus U$*, en donde* $U \leq B$ *es tal que* $g \upharpoonright U$ *es un isomorfismo de* U *en* C*. En particular,* $B \cong f[A] \oplus C$*.*

$$\begin{tikzcd} \langle 0\rangle \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "f"] & f[A]\oplus U \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[l, bend left, dashed, "v"] & C \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "u"] & \langle 0\rangle \end{tikzcd}$$

Teorema

Sea

$$\langle 0\rangle \longrightarrow A \overset{f}{\hookrightarrow} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C \longrightarrow \langle 0\rangle$$

una sucesión exacta corta. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *La sucesión se escinde por la izquierda.*

(ii) *La sucesión se escinde por la derecha.*

(iii) $B = f[A] \oplus U$*, en donde* $U \leq B$ *es tal que* $g \restriction U$ *es un isomorfismo de* U *en* C*. En particular,* $B \cong f[A] \oplus C$*.*

$$\begin{tikzcd}
\langle 0\rangle \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "f"] & f[A] \oplus U \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[l, bend left, dashed, "v"] & C \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "u"] & \langle 0\rangle
\end{tikzcd}$$

Teorema

Sea

$$\langle 0\rangle \longrightarrow A \overset{f}{\hookrightarrow} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C \longrightarrow \langle 0\rangle$$

una sucesión exacta corta. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *La sucesión se escinde por la izquierda.*

(ii) *La sucesión se escinde por la derecha.*

(iii) $B = f[A] \oplus U$*, en donde* $U \leq B$ *es tal que* $g \restriction U$ *es un isomorfismo de* U *en* C*. En particular,* $B \cong f[A] \oplus C$*.*

$$\begin{tikzcd}
\langle 0\rangle \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "f"] & f[A]\oplus U \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[l, dashed, bend left, "v"] & C \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend left, "u"] & \langle 0\rangle
\end{tikzcd}$$

Teorema

Sea

$$\langle 0\rangle \longrightarrow A \overset{f}{\hookrightarrow} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C \longrightarrow \langle 0\rangle$$

una sucesión exacta corta. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *La sucesión se escinde por la izquierda.*

(ii) *La sucesión se escinde por la derecha.*

(iii) $B = f[A] \oplus U$*, en donde* $U \leq B$ *es tal que* $g \restriction U$ *es un isomorfismo de* U *en* C*. En particular,* $B \cong f[A] \oplus C$*.*

$$\begin{tikzcd} \langle 0\rangle \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "f"] & f[A]\oplus U \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[l, dashed, bend left, "v"] & C \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend left, "u"] & \langle 0\rangle \end{tikzcd}$$

Teorema

Un grupo abeliano A es libre $\iff$ para todo grupo abeliano B, todo epimorfismo : $B \twoheadrightarrow A$ se escinde.

Teorema

Sea $\langle A_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$ una cadena suave de grupos tal que A_0 es libre y para cada β que satisface $\beta + 1 < \alpha$, se tiene que $A_{\beta+1}/A_\beta$ es libre. Entonces, $A = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ es libre. Más aún, para cada $\beta < \alpha$, A/A_β es libre.

Teorema

Un grupo abeliano A es libre $\iff$ para todo grupo abeliano B, todo epimorfismo : $B \twoheadrightarrow A$ *se escinde.*

Teorema

Sea $\langle A_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$ una cadena suave de grupos tal que A_0 es libre y para cada β que satisface $\beta + 1 < \alpha$, se tiene que $A_{\beta+1}/A_\beta$ es libre. Entonces, $A = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ es libre. Más aún, para cada $\beta < \alpha$, A/A_β es libre.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{c} & \\
\mathfrak{a} \arrow[ur] & \mathfrak{d} \arrow[u] & \\
 & \mathfrak{b} \arrow[ul] \arrow[u] & \mathfrak{g} \arrow[ul] \\
 & \mathfrak{p} \arrow[u] \arrow[ur] & \\
 & \mathfrak{m} \arrow[u] & \\
 & \omega_1 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Definición

Sean A, B y G grupos abelianos. Diremos que G es una **extensión de A por medio de B** si $A \leq G$ y $G/A \cong B$.

Es decir, si la sucesión

$$\langle 0\rangle \longrightarrow A \overset{\iota}{\hookrightarrow} G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B \longrightarrow \langle 0\rangle$$

es exacta corta. El problema de la extensión consiste en, determinar todas las posibles extensiones de A por medio de B. Nótese que al menos hay una de estas extensiones, la suma directa $A \oplus B$. Pero puede haber varias: por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es una extensión de $2\mathbb{Z}$ por medio de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pero $\mathbb{Z} \ncong 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Definición

Sean A, B y G grupos abelianos. Diremos que G es una **extensión de** A **por medio de** B si $A \leq G$ y $G/A \cong B$.

Es decir, si la sucesión

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow A \xhookrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

es exacta corta. El problema de la extensión consiste en, determinar todas las posibles extensiones de A por medio de B. Nótese que al menos hay una de estas extensiones, la suma directa $A \oplus B$. Pero puede haber varias: por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es una extensión de $2\mathbb{Z}$ por medio de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pero $\mathbb{Z} \not\cong 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Definición

Sean A, B y G grupos abelianos. Diremos que G es una **extensión de** A **por medio de** B si $A \leq G$ y $G/A \cong B$.

Es decir, si la sucesión

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow A \overset{\iota}{\hookrightarrow} G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

es exacta corta. El problema de la extensión consiste en, determinar todas las posibles extensiones de A por medio de B. Nótese que al menos hay una de estas extensiones, la suma directa $A \oplus B$. Pero puede haber varias: por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es una extensión de $2\mathbb{Z}$ por medio de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pero $\mathbb{Z} \not\cong 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Definición

Sean A, B y G grupos abelianos. Diremos que G es una **extensión de A por medio de B** si $A \leq G$ y $G/A \cong B$.

Es decir, si la sucesión

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow A \xhookrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

es exacta corta. El problema de la extensión consiste en, determinar todas las posibles extensiones de A por medio de B. Nótese que al menos hay una de estas extensiones, la suma directa $A \oplus B$. Pero puede haber varias: por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es una extensión de $2\mathbb{Z}$ por medio de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pero $\mathbb{Z} \ncong 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Definición

Sean A, B y G grupos abelianos. Diremos que G es una **extensión de** A **por medio de** B si $A \leq G$ y $G/A \cong B$.

Es decir, si la sucesión

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow A \overset{\iota}{\hookrightarrow} G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

es exacta corta. El problema de la extensión consiste en, determinar todas las posibles extensiones de A por medio de B. Nótese que al menos hay una de estas extensiones, la suma directa $A \oplus B$. Pero puede haber varias: por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es una extensión de $2\mathbb{Z}$ por medio de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pero $\mathbb{Z} \not\cong 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Definición

Sean A, B y G grupos abelianos. Diremos que G es una **extensión de** A **por medio de** B si $A \leq G$ y $G/A \cong B$.

Es decir, si la sucesión

$$\langle 0\rangle \longrightarrow A \xhookrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow \langle 0\rangle$$

es exacta corta. El problema de la extensión consiste en, determinar todas las posibles extensiones de A por medio de B. Nótese que al menos hay una de estas extensiones, la suma directa $A \oplus B$. Pero puede haber varias: por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es una extensión de $2\mathbb{Z}$ por medio de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pero $\mathbb{Z} \ncong 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Desde luego, sólo nos interesa caracterizar hasta isomorfismo las extensiones de A por medio de B. Por ello, si G y G' son dos de tales extensiones, entonces

Definición

Diremos que $G \sim G'$ (G es **isomorfo como extensión de A por medio de B** a G') si existe un isomorfismo $\psi : G \xrightarrow{\sim} G'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dd, "\psi"', "\wr"] \arrow[dr, "\pi"] & \\ A \arrow[ur, hook, "\iota"] \arrow[dr, hook, "\iota'"'] & & B \\ & G' \arrow[ur, "\pi'"'] & \end{tikzcd}$$

Baer definió una operación binaria entre el conjunto $\mathrm{Ext}(B, A)$ de clases de equivalencia de estas extensiones, el cual es un grupo; y su elemento neutro resulta ser justamente la clase de equivalencia de $A \oplus B$.

Desde luego, sólo nos interesa caracterizar hasta isomorfismo las extensiones de A por medio de B. Por ello, si G y G' son dos de tales extensiones, entonces

Definición

Diremos que $G \sim G'$ (G es **isomorfo como extensión de A por medio de B** a G') si existe un isomorfismo $\psi : G \xrightarrow{\sim} G'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dd, "\psi"', "\wr"] \arrow[dr, "\pi"] & \\ A \arrow[ur, hook, "\iota"] \arrow[dr, hook, "\iota'"'] & & B \\ & G' \arrow[ur, "\pi'"'] & \end{tikzcd}$$

Baer definió una operación binaria entre el conjunto $\mathrm{Ext}(B, A)$ de clases de equivalencia de estas extensiones, el cual es un grupo; y su elemento neutro resulta ser justamente la clase de equivalencia de $A \oplus B$.

Desde luego, sólo nos interesa caracterizar hasta isomorfismo las extensiones de A por medio de B. Por ello, si G y G' son dos de tales extensiones, entonces

Definición

Diremos que $G \sim G'$ (G es **isomorfo como extensión de A por medio de B** a G') si existe un isomorfismo $\psi : G \xrightarrow{\sim} G'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dd, "\psi"', "\wr"] \arrow[dr, two heads, "\pi"] & \\
A \arrow[ur, hook, "\iota"] \arrow[dr, hook, "\iota'"'] & & B \\
 & G' \arrow[ur, two heads, "\pi'"'] &
\end{tikzcd}$$

Baer definió una operación binaria entre el conjunto $\mathrm{Ext}(B, A)$ de clases de equivalencia de estas extensiones, el cual es un grupo; y su elemento neutro resulta ser justamente la clase de equivalencia de $A \oplus B$.

Desde luego, sólo nos interesa caracterizar hasta isomorfismo las extensiones de A por medio de B. Por ello, si G y G' son dos de tales extensiones, entonces

Definición

Diremos que $G \sim G'$ (G es **isomorfo como extensión de A por medio de B** a G') si existe un isomorfismo $\psi : G \xrightarrow{\sim} G'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dr, two heads, "\pi"] \arrow[dd, "\psi"', "\wr"] & \\
A \arrow[ur, hook, "\iota"] \arrow[dr, hook, "\iota'"'] & & B \\
 & G' \arrow[ur, two heads, "\pi'"'] &
\end{tikzcd}
$$

Baer definió una operación binaria entre el conjunto $\mathrm{Ext}(B, A)$ de clases de equivalencia de estas extensiones, el cual es un grupo; y su elemento neutro resulta ser justamente la clase de equivalencia de $A \oplus B$.

Teorema

Sea A un grupo abeliano. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$ *es el grupo trivial.*
- *Todo epimorfismo* $\pi : B \twoheadrightarrow A$ *tal que* $\ker \pi \cong \mathbb{Z}$ *se escinde.*

Definición

Si A es un grupo abeliano que cumple con cualquiera de las dos (y consecuentemente con las dos) equivalencias del teorema anterior, se denominará un **W-grupo**.

Corolario

Todo grupo abeliano libre es un W-grupo.

El problema de Whitehead consistió en decidir si se cumplía el recíproco del corolario anterior, es decir, si todo W-grupo es libre.

Teorema

Sea A un grupo abeliano. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$ *es el grupo trivial.*
- *Todo epimorfismo* $\pi : B \twoheadrightarrow A$ *tal que* $\ker \pi \cong \mathbb{Z}$ *se escinde.*

Definición

Si A es un grupo abeliano que cumple con cualquiera de las dos (y consecuentemente con las dos) equivalencias del teorema anterior, se denominará un **W-grupo**.

Corolario

Todo grupo abeliano libre es un W-grupo.

El problema de Whitehead consistió en decidir si se cumplía el recíproco del corolario anterior, es decir, si todo W-grupo es libre.

Teorema

Sea A un grupo abeliano. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$ *es el grupo trivial.*
- *Todo epimorfismo* $\pi : B \twoheadrightarrow A$ *tal que* $\ker \pi \cong \mathbb{Z}$ *se escinde.*

Definición

Si A es un grupo abeliano que cumple con cualquiera de las dos (y consecuentemente con las dos) equivalencias del teorema anterior, se denominará un **W-grupo**.

Corolario

Todo grupo abeliano libre es un W-grupo.

El problema de Whitehead consistió en decidir si se cumplía el recíproco del corolario anterior, es decir, si todo W-grupo es libre.

Teorema

Sea A un grupo abeliano. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$ *es el grupo trivial.*
- *Todo epimorfismo* $\pi : B \twoheadrightarrow A$ *tal que* $\ker \pi \cong \mathbb{Z}$ *se escinde.*

Definición

Si A es un grupo abeliano que cumple con cualquiera de las dos (y consecuentemente con las dos) equivalencias del teorema anterior, se denominará un **W-grupo**.

Corolario

Todo grupo abeliano libre es un W-grupo.

El problema de Whitehead consistió en decidir si se cumplía el recíproco del corolario anterior, es decir, si todo W-grupo es libre.

Teorema

Sea A un grupo abeliano. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$ *es el grupo trivial.*
- *Todo epimorfismo* $\pi : B \twoheadrightarrow A$ *tal que* $\ker \pi \cong \mathbb{Z}$ *se escinde.*

Definición

Si A es un grupo abeliano que cumple con cualquiera de las dos (y consecuentemente con las dos) equivalencias del teorema anterior, se denominará un **W-grupo**.

Corolario

Todo grupo abeliano libre es un W-grupo.

El problema de Whitehead consistió en decidir si se cumplía el recíproco del corolario anterior, es decir, si todo W-grupo es libre.

Teorema

Sea A un grupo abeliano. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$ *es el grupo trivial.*
- *Todo epimorfismo* $\pi : B \twoheadrightarrow A$ *tal que* $\ker \pi \cong \mathbb{Z}$ *se escinde.*

Definición

Si A es un grupo abeliano que cumple con cualquiera de las dos (y consecuentemente con las dos) equivalencias del teorema anterior, se denominará un **W-grupo**.

Corolario

Todo grupo abeliano libre es un W-grupo.

El problema de Whitehead consistió en decidir si se cumplía el recíproco del corolario anterior, es decir, si todo W-grupo es libre.

Teorema

Sea A un grupo abeliano. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$ *es el grupo trivial.*
- *Todo epimorfismo* $\pi : B \twoheadrightarrow A$ *tal que* $\ker \pi \cong \mathbb{Z}$ *se escinde.*

Definición

Si A es un grupo abeliano que cumple con cualquiera de las dos (y consecuentemente con las dos) equivalencias del teorema anterior, se denominará un **W-grupo**.

Corolario

Todo grupo abeliano libre es un W-grupo.

El problema de Whitehead consistió en decidir si se cumplía el recíproco del corolario anterior, es decir, si todo W-grupo es libre.

Teorema

Sea A un grupo abeliano. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$ *es el grupo trivial.*
- *Todo epimorfismo* $\pi : B \twoheadrightarrow A$ *tal que* $\ker \pi \cong \mathbb{Z}$ *se escinde.*

Definición

Si A es un grupo abeliano que cumple con cualquiera de las dos (y consecuentemente con las dos) equivalencias del teorema anterior, se denominará un **W-grupo**.

Corolario

Todo grupo abeliano libre es un W-grupo.

El problema de Whitehead consistió en decidir si se cumplía el recíproco del corolario anterior, es decir, si todo W-grupo es libre.

Teorema

Sea A un grupo abeliano. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$ *es el grupo trivial.*
- *Todo epimorfismo* $\pi : B \twoheadrightarrow A$ *tal que* $\ker \pi \cong \mathbb{Z}$ *se escinde.*

Definición

Si A es un grupo abeliano que cumple con cualquiera de las dos (y consecuentemente con las dos) equivalencias del teorema anterior, se denominará un **W-grupo**.

Corolario

Todo grupo abeliano libre es un W-grupo.

El problema de Whitehead consistió en decidir si se cumplía el recíproco del corolario anterior, es decir, si todo W-grupo es libre.

Teorema

(i) *Todo subgrupo de un W-grupo es un W-grupo.*

(ii) *Todo W-grupo es libre de torsión.*

(iii) *Si $A \leq B$, en donde B es un W-grupo pero B/A no es un W-grupo, entonces existe un morfismo de grupos abelianos $\psi : A \to \mathbb{Z}$ que no puede extenderse a un morfismo con dominio B.*

.

Teorema

(i) *Todo subgrupo de un W-grupo es un W-grupo.*

(ii) *Todo W-grupo es libre de torsión.*

(iii) *Si $A \leq B$, en donde B es un W-grupo pero B/A no es un W-grupo, entonces existe un morfismo de grupos abelianos $\psi : A \to \mathbb{Z}$ que no puede extenderse a un morfismo con dominio B.*

.

Teorema

(i) *Todo subgrupo de un W-grupo es un W-grupo.*

(ii) *Todo W-grupo es libre de torsión.*

(iii) *Si $A \leq B$, en donde B es un W-grupo pero B/A no es un W-grupo, entonces existe un morfismo de grupos abelianos $\psi : A \to \mathbb{Z}$ que no puede extenderse a un morfismo con dominio B.*

.

Teorema

(i) *Todo subgrupo de un W-grupo es un W-grupo.*

(ii) *Todo W-grupo es libre de torsión.*

(iii) *Si $A \leq B$, en donde B es un W-grupo pero B/A no es un W-grupo, entonces existe un morfismo de grupos abelianos $\psi : A \to \mathbb{Z}$ que no puede extenderse a un morfismo con dominio B.*

.

Definición

Sea A un grupo abeliano libre de torsión y $B \leq A$.

(i) Decimos que B es **puro** en A si A/B es libre de torsión.

(ii) Definimos la **cerradura pura** de B en A como el conjunto

$$\mathrm{C.P.}\, B = \{a \in A \big| (\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})(na \in B)\}.$$

Teorema (Criterio de Pontryagin)

Sea A un grupo abeliano numerable libre de torsión tal que todo subgrupo finitamente generado de A está contenido en un subgrupo puro en A que es finitamente generado. Entonces, A es libre.

Definición

Sea A un grupo abeliano libre de torsión y $B \leq A$.

(i) Decimos que B es **puro** en A si A/B es libre de torsión.

(ii) Definimos la **cerradura pura** de B en A como el conjunto

$$\text{C.P.}\,B = \{a \in A \big| (\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})(na \in B)\}.$$

Teorema (Criterio de Pontryagin)

Sea A un grupo abeliano numerable libre de torsión tal que todo subgrupo finitamente generado de A está contenido en un subgrupo puro en A que es finitamente generado. Entonces, A es libre.

Definición

Sea A un grupo abeliano libre de torsión y $B \leq A$.

(i) Decimos que B es **puro** en A si A/B es libre de torsión.

(ii) Definimos la **cerradura pura** de B en A como el conjunto

$$\mathrm{C.P.}\, B = \{a \in A \big| (\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})(na \in B)\}.$$

Teorema (Criterio de Pontryagin)

Sea A un grupo abeliano numerable libre de torsión tal que todo subgrupo finitamente generado de A está contenido en un subgrupo puro en A que es finitamente generado. Entonces, A es libre.

Definición

Sea A un grupo abeliano libre de torsión y $B \leq A$.

(i) Decimos que B es **puro** en A si A/B es libre de torsión.

(ii) Definimos la **cerradura pura** de B en A como el conjunto

$$\mathrm{C.P.}\, B = \{a \in A \big| (\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})(na \in B)\}.$$

Teorema (Criterio de Pontryagin)

Sea A un grupo abeliano numerable libre de torsión tal que todo subgrupo finitamente generado de A está contenido en un subgrupo puro en A que es finitamente generado. Entonces, A es libre.

Definición

Sea A un grupo abeliano libre de torsión y $B \leq A$.

(i) Decimos que B es **puro** en A si A/B es libre de torsión.

(ii) Definimos la **cerradura pura** de B en A como el conjunto

$$\mathrm{C.P.}\, B = \{a \in A \big| (\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})(na \in B)\}.$$

Teorema (Criterio de Pontryagin)

Sea A un grupo abeliano numerable libre de torsión tal que todo subgrupo finitamente generado de A está contenido en un subgrupo puro en A que es finitamente generado. Entonces, A es libre.

Definición

Sea B un grupo abeliano. Un $(B, \mathbb{Z})$**-grupo** es un grupo C tal que su conjunto subyacente es $B \times \mathbb{Z}$ y tal que tanto la proyección $\pi : C \longrightarrow B$ como el encaje de $\mathbb{Z}$ en C dado por $n \longmapsto (0, n)$ son morfismos de grupos abelianos.

Lema

Sean $B \leq A$, con A un W-grupo y tal que A/B no es W-grupo. Sea C un $(B, \mathbb{Z})$-grupo y ρ una escisión para $\pi : C \to B$. Entonces, existe un $(A, \mathbb{Z})$-grupo D que es extensión de C tal que ρ no puede extenderse a una escisión para $\pi : D \to A$.

Teorema

Todo W-grupo numerable es libre.

Definición

Sea B un grupo abeliano. Un $(B,\mathbb{Z})$**-grupo** es un grupo C tal que su conjunto subyacente es $B \times \mathbb{Z}$ y tal que tanto la proyección $\pi : C \longrightarrow B$ como el encaje de $\mathbb{Z}$ en C dado por $n \longmapsto (0,n)$ son morfismos de grupos abelianos.

Lema

Sean $B \leq A$, con A un W-grupo y tal que A/B no es W-grupo. Sea C un $(B,\mathbb{Z})$-grupo y ρ una escisión para $\pi : C \to B$. Entonces, existe un $(A,\mathbb{Z})$-grupo D que es extensión de C tal que ρ no puede extenderse a una escisión para $\pi : D \to A$.

Teorema

Todo W-grupo numerable es libre.

Definición

Sea B un grupo abeliano. Un $(B, \mathbb{Z})$**-grupo** es un grupo C tal que su conjunto subyacente es $B \times \mathbb{Z}$ y tal que tanto la proyección $\pi : C \longrightarrow B$ como el encaje de $\mathbb{Z}$ en C dado por $n \longmapsto (0, n)$ son morfismos de grupos abelianos.

Lema

Sean $B \leq A$, con A un W-grupo y tal que A/B no es W-grupo. Sea C un $(B, \mathbb{Z})$-grupo y ρ una escisión para $\pi : C \to B$. Entonces, existe un $(A, \mathbb{Z})$-grupo D que es extensión de C tal que ρ no puede extenderse a una escisión para $\pi : D \to A$.

Teorema

Todo W-grupo numerable es libre.

Definición

Sea B un grupo abeliano. Un $(B,\mathbb{Z})$**-grupo** es un grupo C tal que su conjunto subyacente es $B \times \mathbb{Z}$ y tal que tanto la proyección $\pi : C \longrightarrow B$ como el encaje de $\mathbb{Z}$ en C dado por $n \longmapsto (0,n)$ son morfismos de grupos abelianos.

Lema

Sean $B \leq A$, con A un W-grupo y tal que A/B no es W-grupo. Sea C un $(B,\mathbb{Z})$-grupo y ρ una escisión para $\pi : C \to B$. Entonces, existe un $(A,\mathbb{Z})$-grupo D que es extensión de C tal que ρ no puede extenderse a una escisión para $\pi : D \to A$.

Teorema

Todo W-grupo numerable es libre.

Definición

Sea B un grupo abeliano. Un $(B, \mathbb{Z})$**-grupo** es un grupo C tal que su conjunto subyacente es $B \times \mathbb{Z}$ y tal que tanto la proyección $\pi : C \longrightarrow B$ como el encaje de $\mathbb{Z}$ en C dado por $n \longmapsto (0, n)$ son morfismos de grupos abelianos.

Lema

Sean $B \leq A$, con A un W-grupo y tal que A/B no es W-grupo. Sea C un $(B, \mathbb{Z})$-grupo y ρ una escisión para $\pi : C \to B$. Entonces, existe un $(A, \mathbb{Z})$-grupo D que es extensión de C tal que ρ no puede extenderse a una escisión para $\pi : D \to A$.

Teorema

Todo W-grupo numerable es libre.

Definición

Sean $\kappa \in \mathbf{Card}$, con $\kappa \geq \omega_1$ y A un grupo abeliano.

(i) Decimos que A es κ-**libre** si $(\forall B \leq A)(|B| < \kappa \longrightarrow B \text{ es libre})$.

(ii) Siendo A κ-libre y $B \leq A$, decimos que B es κ-**puro** en A si A/B es κ-libre.

Corolario

Todo W-grupo es $\aleph_1$-libre.

Definición

Sea A un grupo abeliano. Diremos que A satisface la **condición de Chase** si A es un grupo $\aleph_1$-libre tal que todo subgrupo numerable de A está contenido en un subgrupo numerable $\aleph_1$-puro en A.

Definición

Sean $\kappa \in \mathbf{Card}$, con $\kappa \geq \omega_1$ y A un grupo abeliano.

- (i) Decimos que A es κ**-libre** si $(\forall B \leq A)(|B| < \kappa \longrightarrow B \text{ es libre})$.
- (ii) Siendo A κ-libre y $B \leq A$, decimos que B es κ**-puro** en A si A/B es κ-libre.

Corolario

Todo W-grupo es $\aleph_1$-libre.

Definición

Sea A un grupo abeliano. Diremos que A satisface la **condición de Chase** si A es un grupo $\aleph_1$-libre tal que todo subgrupo numerable de A está contenido en un subgrupo numerable $\aleph_1$-puro en A.

Definición

Sean $\kappa \in \mathbf{Card}$, con $\kappa \geq \omega_1$ y A un grupo abeliano.

(i) Decimos que A es κ**-libre** si $(\forall B \leq A)(|B| < \kappa \longrightarrow B \text{ es libre})$.

(ii) Siendo A κ-libre y $B \leq A$, decimos que B es κ**-puro** en A si A/B es κ-libre.

Corolario

Todo W-grupo es $\aleph_1$-libre.

Definición

Sea A un grupo abeliano. Diremos que A satisface la **condición de Chase** si A es un grupo $\aleph_1$-libre tal que todo subgrupo numerable de A está contenido en un subgrupo numerable $\aleph_1$-puro en A.

Definición

Sean $\kappa \in \mathbf{Card}$, con $\kappa \geq \omega_1$ y A un grupo abeliano.

(i) Decimos que A es κ**-libre** si $(\forall B \leq A)(|B| < \kappa \longrightarrow B \text{ es libre})$.

(ii) Siendo A κ-libre y $B \leq A$, decimos que B es κ**-puro** en A si A/B es κ-libre.

Corolario

Todo W-grupo es $\aleph_1$-libre.

Definición

Sea A un grupo abeliano. Diremos que A satisface la **condición de Chase** si A es un grupo $\aleph_1$-libre tal que todo subgrupo numerable de A está contenido en un subgrupo numerable $\aleph_1$-puro en A.

Definición

Sean $\kappa \in \mathbf{Card}$, con $\kappa \geq \omega_1$ y A un grupo abeliano.

(i) Decimos que A es **κ-libre** si $(\forall B \leq A)(|B| < \kappa \longrightarrow B \text{ es libre})$.

(ii) Siendo A κ-libre y $B \leq A$, decimos que B es **κ-puro** en A si A/B es κ-libre.

Corolario

Todo W-grupo es $\aleph_1$-libre.

Definición

Sea A un grupo abeliano. Diremos que A satisface la **condición de Chase** si A es un grupo $\aleph_1$-libre tal que todo subgrupo numerable de A está contenido en un subgrupo numerable $\aleph_1$-puro en A.

Definición

Sean $\kappa \in \mathbf{Card}$, con $\kappa \geq \omega_1$ y A un grupo abeliano.

(i) Decimos que A es **κ-libre** si $(\forall B \leq A)(|B| < \kappa \longrightarrow B \text{ es libre})$.

(ii) Siendo A κ-libre y $B \leq A$, decimos que B es **κ-puro** en A si A/B es κ-libre.

Corolario

Todo W-grupo es $\aleph_1$-libre.

Definición

Sea A un grupo abeliano. Diremos que A satisface la **condición de Chase** si A es un grupo $\aleph_1$-libre tal que todo subgrupo numerable de A está contenido en un subgrupo numerable $\aleph_1$-puro en A.

Definición

Sean $\kappa \in \mathbf{Card}$, con $\kappa \geq \omega_1$ y A un grupo abeliano.

(i) Decimos que A es κ**-libre** si $(\forall B \leq A)(|B| < \kappa \longrightarrow B \text{ es libre})$.

(ii) Siendo A κ-libre y $B \leq A$, decimos que B es κ**-puro** en A si A/B es κ-libre.

Corolario

Todo W-grupo es $\aleph_1$-libre.

Definición

Sea A un grupo abeliano. Diremos que A satisface la **condición de Chase** si A es un grupo $\aleph_1$-libre tal que todo subgrupo numerable de A está contenido en un subgrupo numerable $\aleph_1$-puro en A.

Lema

Sea A un grupo abeliano de orden $\aleph_1$. Entonces, A satisface la condición de Chase $\iff$ A es la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que $A_0 = \langle 0 \rangle$ y que para todo $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}$ es $\aleph_1$-puro en A.

Teorema

Sea A un grupo abeliano que satisface la condición de Chase, y que por lo tanto es, por el lema anterior, la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ con $A_0 = \langle 0 \rangle$ y $A_{\alpha+1}$ $\aleph_1$-puro en A para todo $\alpha < \omega_1$. Sea

$$E = \{\alpha < \omega_1 \big| A_\alpha \text{ no es } \aleph_1\text{−puro en } A\}$$

(nótese que E consta de puros ordinales límite). Entonces, A es libre $\iff$ E no es estacionario en ω_1.

Lema

Sea A un grupo abeliano de orden $\aleph_1$. Entonces, A satisface la condición de Chase $\iff$ A es la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que $A_0 = \langle 0 \rangle$ y que para todo $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}$ es $\aleph_1$-puro en A.

Teorema

Sea A un grupo abeliano que satisface la condición de Chase, y que por lo tanto es, por el lema anterior, la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ con $A_0 = \langle 0 \rangle$ y $A_{\alpha+1}$ $\aleph_1$-puro en A para todo $\alpha < \omega_1$. Sea

$$E = \{\alpha < \omega_1 \big| A_\alpha \text{ no es } \aleph_1\text{−puro en } A\}$$

(nótese que E consta de puros ordinales límite). Entonces, A es libre $\iff$ E no es estacionario en ω_1.

Lema

Sea A un grupo abeliano de orden $\aleph_1$. Entonces, A satisface la condición de Chase $\iff$ A es la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que $A_0 = \langle 0 \rangle$ y que para todo $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}$ es $\aleph_1$-puro en A.

Teorema

Sea A un grupo abeliano que satisface la condición de Chase, y que por lo tanto es, por el lema anterior, la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ con $A_0 = \langle 0 \rangle$ y $A_{\alpha+1}$ $\aleph_1$-puro en A para todo $\alpha < \omega_1$. Sea

$$E = \{\alpha < \omega_1 \big| A_\alpha \text{ no es } \aleph_1\text{−puro en } A\}$$

(nótese que E consta de puros ordinales límite). Entonces, A es libre $\iff$ E no es estacionario en ω_1.

Teorema

Sea $E \subseteq \omega_1$ un conjunto estacionario. Entonces, $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ implica $\diamondsuit(E)$

Corolario

Supóngase que se satisface $\mathbf{V} = \mathbf{L}$. Sea B la unión de una cadena suave estricta de conjuntos numerables $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$, Y un conjunto numerable, y $E \subseteq \omega_1$ estacionario. Entonces, hay una sucesión $\langle g_\alpha : B_\alpha \longrightarrow B_\alpha \times Y \big| \alpha \in E \rangle$ tal que para toda función $h : B \longrightarrow B \times Y$ que satisfaga $(\forall \alpha \in E)(h[B_\alpha] \subseteq B_\alpha \times Y)$, existe $\alpha \in E$ tal que $h \restriction B_\alpha = g_\alpha$.

Teorema

Sea $E \subseteq \omega_1$ *un conjunto estacionario. Entonces,* $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ *implica* $\Diamond(E)$

Corolario

Supóngase que se satisface $\mathbf{V} = \mathbf{L}$*. Sea* B *la unión de una cadena suave estricta de conjuntos numerables* $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$*,* Y *un conjunto numerable, y* $E \subseteq \omega_1$ *estacionario. Entonces, hay una sucesión* $\langle g_\alpha : B_\alpha \longrightarrow B_\alpha \times Y \big| \alpha \in E \rangle$ *tal que para toda función* $h : B \longrightarrow B \times Y$ *que satisfaga* $(\forall \alpha \in E)(h[B_\alpha] \subseteq B_\alpha \times Y)$*, existe* $\alpha \in E$ *tal que* $h \upharpoonright B_\alpha = g_\alpha$*.*

Teorema

Sea $E \subseteq \omega_1$ *un conjunto estacionario. Entonces,* $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ *implica* $\Diamond(E)$

Corolario

Supóngase que se satisface $\mathbf{V} = \mathbf{L}$*. Sea* B *la unión de una cadena suave estricta de conjuntos numerables* $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$*,* Y *un conjunto numerable, y* $E \subseteq \omega_1$ *estacionario. Entonces, hay una sucesión* $\langle g_\alpha : B_\alpha \longrightarrow B_\alpha \times Y \big| \alpha \in E \rangle$ *tal que para toda función* $h : B \longrightarrow B \times Y$ *que satisfaga* $(\forall \alpha \in E)(h[B_\alpha] \subseteq B_\alpha \times Y)$*, existe* $\alpha \in E$ *tal que* $h \restriction B_\alpha = g_\alpha$*.*

Teorema

Sea B la unión de una cadena suave estricta $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de grupos libres numerables tales que $E = \{\alpha < \omega_1 \big| B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no es libre}\}$ es estacionario en ω_1. Entonces, $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ implica que B no es un W-grupo.

Teorema (Shelah)

$ZFC + V = L$ implica que todo W-grupo de cardinalidad $\aleph_1$ es libre.

Teorema

Sea B la unión de una cadena suave estricta $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de grupos libres numerables tales que $E = \{\alpha < \omega_1 \big| B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no es libre}\}$ es estacionario en ω_1. Entonces, $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ implica que B no es un W-grupo.

Teorema (Shelah)

$ZFC + V = L$ implica que todo W-grupo de cardinalidad $\aleph_1$ es libre.

Teorema

Sea B la unión de una cadena suave estricta $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de grupos libres numerables tales que $E = \{\alpha < \omega_1 \big| B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no es libre}\}$ es estacionario en ω_1. Entonces, $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ implica que B no es un W-grupo.

Teorema (Shelah)

$ZFC + V = L$ implica que todo W-grupo de cardinalidad $\aleph_1$ es libre.

Teorema

Hay un grupo abeliano A de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase pero que no es libre.

Teorema (Shelah)

$ZFC + MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ *implica que todo grupo abeliano de cardinalidad* $\aleph_1$ *que satisface la condición de Chase es un W-grupo.*

$$\mathbb{P} = \{\varphi : S \longrightarrow B \quad \Big| \quad (\varphi \text{ es un homomorfismo}) \wedge \pi\varphi = \mathrm{id}_S \wedge (S \text{ es un subgrupo finitamente generado puro en } A)\}$$

Teorema

Hay un grupo abeliano A de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase pero que no es libre.

Teorema (Shelah)

$ZFC + MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implica que todo grupo abeliano de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase es un W-grupo.

$$\mathbb{P} = \{\varphi : S \longrightarrow B \quad \Big| \quad (\varphi \text{ es un homomorfismo}) \wedge \pi\varphi = \mathrm{id}_S \wedge (S \text{ es un subgrupo finitamente generado puro en } A)\}$$

Teorema

Hay un grupo abeliano A de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase pero que no es libre.

Teorema (Shelah)

$ZFC + MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ *implica que todo grupo abeliano de cardinalidad* $\aleph_1$ *que satisface la condición de Chase es un W-grupo.*

$$\mathbb{P} = \{\varphi : S \longrightarrow B \quad \Big| \quad (\varphi \text{ es un homomorfismo}) \wedge \pi\varphi = \mathrm{id}_S \\ \wedge (S \text{ es un subgrupo finitamente generado puro en } A)\}$$

Teorema

Hay un grupo abeliano A de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase pero que no es libre.

Teorema (Shelah)

$ZFC + MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implica que todo grupo abeliano de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase es un W-grupo.

$$\mathbb{P} = \{\varphi : S \longrightarrow B \quad \Big| \quad (\varphi \text{ es un homomorfismo}) \wedge \pi\varphi = \mathrm{id}_S \\ \wedge (S \text{ es un subgrupo finitamente generado puro en } A)\}$$

Teorema

Hay un grupo abeliano A de cardinalidad $\aleph_1$ que satisface la condición de Chase pero que no es libre.

Teorema (Shelah)

$ZFC + MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ *implica que todo grupo abeliano de cardinalidad* $\aleph_1$ *que satisface la condición de Chase es un W-grupo.*

$$\begin{aligned} \mathbb{P} = \{\varphi : S \longrightarrow B \quad \Big| \quad & (\varphi \text{ es un homomorfismo}) \wedge \pi\varphi = \mathrm{id}_S \\ & \wedge (S \text{ es un subgrupo finitamente generado puro en } A)\} \end{aligned}$$

Dado un conjunto X, denotaremos por S_X al grupo de todas las biyecciones de X en X. S_ω es el **grupo simétrico infinito**. $\mathbb{F}$ denotará al subconjunto de S_ω que consta de aquellas permutaciones que únicamente mueven a una cantidad finita de elementos de ω. Se tiene que $\mathbb{F} \trianglelefteq S_\omega$.

Notación

Sea $G \leq S_X$, y $A \subseteq X$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathrm{Stab}_A(G) &:= \{g \in G \mid g[A] = A\}, \\ \mathrm{stab}_A(G) &:= \{g \in G \mid (\forall n \in A)(g(n) = n)\}, \\ G \upharpoonright A &:= \{\sigma \upharpoonright A \mid \sigma \in \mathrm{Stab}_G(A)\}. \end{aligned}$$

Lema (MacPherson-Neumann)

Sea $G \leq S_\omega$. Supóngase que existe una mitad $X \subseteq \omega$ tal que $G \upharpoonright X = S_X$. Entonces $(\exists \pi \in S_\omega)(S_\omega = \langle G, \pi \rangle)$.

Dado un conjunto X, denotaremos por S_X al grupo de todas las biyecciones de X en X. S_ω es el **grupo simétrico infinito**. $\mathbb{F}$ denotará al subconjunto de S_ω que consta de aquellas permutaciones que únicamente mueven a una cantidad finita de elementos de ω. Se tiene que $\mathbb{F} \trianglelefteq S_\omega$.

Notación

Sea $G \leq S_X$, y $A \subseteq X$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathrm{Stab}_A(G) &:= \{g \in G \big| g[A] = A\}, \\ \mathrm{stab}_A(G) &:= \{g \in G \big| (\forall n \in A)(g(n) = n)\}, \\ G \upharpoonright A &:= \{\sigma \upharpoonright A \big| \sigma \in \mathrm{Stab}_G(A)\}. \end{aligned}$$

Lema (MacPherson-Neumann)

Sea $G \leq S_\omega$. Supóngase que existe una mitad $X \subseteq \omega$ tal que $G \upharpoonright X = S_X$. Entonces $(\exists \pi \in S_\omega)(S_\omega = \langle G, \pi \rangle)$.

Dado un conjunto X, denotaremos por S_X al grupo de todas las biyecciones de X en X. S_ω es el **grupo simétrico infinito**. $\mathbb{F}$ denotará al subconjunto de S_ω que consta de aquellas permutaciones que únicamente mueven a una cantidad finita de elementos de ω. Se tiene que $\mathbb{F} \trianglelefteq S_\omega$.

Notación

Sea $G \leq S_X$, y $A \subseteq X$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathrm{Stab}_A(G) &:= \{g \in G \mid g[A] = A\}, \\ \mathrm{stab}_A(G) &:= \{g \in G \mid (\forall n \in A)(g(n) = n)\}, \\ G \upharpoonright A &:= \{\sigma \upharpoonright A \mid \sigma \in \mathrm{Stab}_G(A)\}. \end{aligned}$$

Lema (MacPherson-Neumann)

Sea $G \leq S_\omega$. Supóngase que existe una mitad $X \subseteq \omega$ tal que $G \upharpoonright X = S_X$. Entonces $(\exists \pi \in S_\omega)(S_\omega = \langle G, \pi \rangle)$.

Dado un conjunto X, denotaremos por S_X al grupo de todas las biyecciones de X en X. S_ω es el **grupo simétrico infinito**. $\mathbb{F}$ denotará al subconjunto de S_ω que consta de aquellas permutaciones que únicamente mueven a una cantidad finita de elementos de ω. Se tiene que $\mathbb{F} \trianglelefteq S_\omega$.

Notación

Sea $G \leq S_X$, y $A \subseteq X$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathrm{Stab}_A(G) &:= \{g \in G \big| g[A] = A\}, \\ \mathrm{stab}_A(G) &:= \{g \in G \big| (\forall n \in A)(g(n) = n)\}, \\ G \upharpoonright A &:= \{\sigma \upharpoonright A \big| \sigma \in \mathrm{Stab}_G(A)\}. \end{aligned}$$

Lema (MacPherson-Neumann)

Sea $G \leq S_\omega$. Supóngase que existe una mitad $X \subseteq \omega$ tal que $G \upharpoonright X = S_X$. Entonces $(\exists \pi \in S_\omega)(S_\omega = \langle G, \pi \rangle)$.

Dado un conjunto X, denotaremos por S_X al grupo de todas las biyecciones de X en X. S_ω es el **grupo simétrico infinito**. $\mathbb{F}$ denotará al subconjunto de S_ω que consta de aquellas permutaciones que únicamente mueven a una cantidad finita de elementos de ω. Se tiene que $\mathbb{F} \trianglelefteq S_\omega$.

Notación

Sea $G \leq S_X$, y $A \subseteq X$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathrm{Stab}_A(G) &:= \{g \in G \big| g[A] = A\}, \\ \mathrm{stab}_A(G) &:= \{g \in G \big| (\forall n \in A)(g(n) = n)\}, \\ G \upharpoonright A &:= \{\sigma \upharpoonright A \big| \sigma \in \mathrm{Stab}_G(A)\}. \end{aligned}$$

Lema (MacPherson-Neumann)

Sea $G \leq S_\omega$. Supóngase que existe una mitad $X \subseteq \omega$ tal que $G \upharpoonright X = S_X$. Entonces $(\exists \pi \in S_\omega)(S_\omega = \langle G, \pi \rangle)$.

Dado un conjunto X, denotaremos por S_X al grupo de todas las biyecciones de X en X. S_ω es el **grupo simétrico infinito**. $\mathbb{F}$ denotará al subconjunto de S_ω que consta de aquellas permutaciones que únicamente mueven a una cantidad finita de elementos de ω. Se tiene que $\mathbb{F} \trianglelefteq S_\omega$.

Notación

Sea $G \leq S_X$, y $A \subseteq X$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathrm{Stab}_A(G) &:= \{g \in G \big| g[A] = A\}, \\ \mathrm{stab}_A(G) &:= \{g \in G \big| (\forall n \in A)(g(n) = n)\}, \\ G \restriction A &:= \{\sigma \restriction A \big| \sigma \in \mathrm{Stab}_G(A)\}. \end{aligned}$$

Lema (MacPherson-Neumann)

Sea $G \leq S_\omega$. Supóngase que existe una mitad $X \subseteq \omega$ tal que $G \restriction X = S_X$. Entonces $(\exists \pi \in S_\omega)(S_\omega = \langle G, \pi \rangle)$.

Definición

Sea G un grupo que no es finitamente generado. Luego, hay una cadena estricta de subgrupos propios $\langle G_\alpha \big| \alpha < \xi \rangle$ tal que $G = \bigcup\limits_{\alpha<\xi} G_\alpha$. Se define la **cofinalidad** de G, $\mathrm{cf}(G)$, como la mínima longitud de una tal cadena.

Se satisface que $\omega_1 \leq \mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathfrak{c}$.

Teorema

Sea M un modelo base en el cual κ es un cardinal con $\kappa^\omega = \kappa > \omega_1$. Si G es un filtro $\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$-genérico sobre M, entonces $M[G] \vDash \mathrm{cf}(S_\omega) = \omega_1 < 2^\omega = \kappa$.

Definición

Sea G un grupo que no es finitamente generado. Luego, hay una cadena estricta de subgrupos propios $\langle G_\alpha \big| \alpha < \xi \rangle$ tal que $G = \bigcup\limits_{\alpha<\xi} G_\alpha$. Se define la **cofinalidad** de G, $\mathrm{cf}(G)$, como la mínima longitud de una tal cadena.

Se satisface que $\omega_1 \leq \mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathfrak{c}$.

Teorema

Sea M un modelo base en el cual κ es un cardinal con $\kappa^\omega = \kappa > \omega_1$. Si G es un filtro $\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$-genérico sobre M, entonces $M[G] \vDash \mathrm{cf}(S_\omega) = \omega_1 < 2^\omega = \kappa$.

Definición

Sea G un grupo que no es finitamente generado. Luego, hay una cadena estricta de subgrupos propios $\langle G_\alpha \big| \alpha < \xi \rangle$ tal que $G = \bigcup\limits_{\alpha<\xi} G_\alpha$. Se define la **cofinalidad** de G, $\mathrm{cf}(G)$, como la mínima longitud de una tal cadena.

Se satisface que $\omega_1 \leq \mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathfrak{c}$.

Teorema

Sea M un modelo base en el cual κ es un cardinal con $\kappa^\omega = \kappa > \omega_1$. Si G es un filtro $\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$-genérico sobre M, entonces $M[G] \vDash \mathrm{cf}(S_\omega) = \omega_1 < 2^\omega = \kappa$.

Definición

Sea G un grupo que no es finitamente generado. Luego, hay una cadena estricta de subgrupos propios $\langle G_\alpha \big| \alpha < \xi \rangle$ tal que $G = \bigcup_{\alpha<\xi} G_\alpha$. Se define la **cofinalidad** de G, $\mathrm{cf}(G)$, como la mínima longitud de una tal cadena.

Se satisface que $\omega_1 \leq \mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathfrak{c}$.

Teorema

Sea M un modelo base en el cual κ es un cardinal con $\kappa^\omega = \kappa > \omega_1$. Si G es un filtro $\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$-genérico sobre M, entonces $M[G] \vDash \mathrm{cf}(S_\omega) = \omega_1 < 2^\omega = \kappa$.

Notación

- Sea $g \in {}^\omega\omega$ una función estrictamente creciente. Entonces, hacemos $F_0 := g(0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n := g(n) \setminus g(n-1)$. Definimos el siguiente subgrupo de S_ω:

$$P_g := \left\{ \bigcup_{n<\omega} \sigma_n \middle| (\forall n < \omega)(\sigma_n \in S_{F_n}) \right\} \cong \prod_{n<\omega} S_{F_n}.$$

- Para una función estrictamente creciente $\varphi \in {}^\omega\omega$, introducimos la notación

$$S^*_\varphi := \langle \pi \in S_\omega \middle| \pi \leq^* \varphi \wedge \pi^{-1} \leq^* \varphi \rangle.$$

Notación

- Sea $g \in {}^\omega\omega$ una función estrictamente creciente. Entonces, hacemos $F_0 := g(0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n := g(n) \setminus g(n-1)$. Definimos el siguiente subgrupo de S_ω:

$$P_g := \left\{ \bigcup_{n<\omega} \sigma_n \middle| (\forall n < \omega)(\sigma_n \in S_{F_n}) \right\} \cong \prod_{n<\omega} S_{F_n}.$$

- Para una función estrictamente creciente $\varphi \in {}^\omega\omega$, introducimos la notación

$$S^*_\varphi := \langle \pi \in S_\omega \middle| \pi \leq^* \varphi \wedge \pi^{-1} \leq^* \varphi \rangle.$$

Notación

- Sea $g \in {}^\omega\omega$ una función estrictamente creciente. Entonces, hacemos $F_0 := g(0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n := g(n) \setminus g(n-1)$. Definimos el siguiente subgrupo de S_ω:

$$P_g := \left\{ \bigcup_{n<\omega} \sigma_n \middle| (\forall n < \omega)(\sigma_n \in S_{F_n}) \right\} \cong \prod_{n<\omega} S_{F_n}.$$

- Para una función estrictamente creciente $\varphi \in {}^\omega\omega$, introducimos la notación

$$S^*_\varphi := \langle \pi \in S_\omega \,|\, \pi \leq^* \varphi \wedge \pi^{-1} \leq^* \varphi \rangle.$$

Lema

Sea $G \leq S_\omega$ subgrupo propio tal que $\mathbb{F} \leq G$. Definimos la familia

$$\mathscr{C}_G := \{A \in [\omega]^\omega \big| (\exists B \in [\omega]^\omega)(B \subseteq^* A \wedge S^*_{\#_B} \leq G)\}.$$

Entonces, $[\omega]^\omega \setminus \mathscr{C}_G$ es una familia densa por grupos.

Definición

Dado un grupo $G \leq S_\omega$ que no es finitamente generado, definimos el invariante cardinal $\mathrm{cf}^*(G)$ como el mínimo λ tal que existe una cadena estricta de subgrupos propios $\langle G_\xi | \xi < \lambda \rangle$ de tal forma que para cada $\psi \in {}^\omega\omega$ estrictamente creciente, hay un $\xi < \lambda$ tal que $S^*_\psi \leq G_\xi$ y con $G = \bigcup_{\xi<\lambda} G_\xi$.

Lema

Sea $G \leq S_\omega$ subgrupo propio tal que $\mathbb{F} \leq G$. Definimos la familia

$$\mathscr{C}_G := \{A \in [\omega]^\omega \big| (\exists B \in [\omega]^\omega)(B \subseteq^* A \wedge S^*_{\#_B} \leq G)\}.$$

Entonces, $[\omega]^\omega \setminus \mathscr{C}_G$ es una familia densa por grupos.

Definición

Dado un grupo $G \leq S_\omega$ que no es finitamente generado, definimos el invariante cardinal $\mathrm{cf}^*(G)$ como el mínimo λ tal que existe una cadena estricta de subgrupos propios $\langle G_\xi | \xi < \lambda \rangle$ de tal forma que para cada $\psi \in {}^\omega\omega$ estrictamente creciente, hay un $\xi < \lambda$ tal que $S^*_\psi \leq G_\xi$ y con $G = \bigcup_{\xi<\lambda} G_\xi$.

Lema

Sea $G \leq S_\omega$ subgrupo propio tal que $\mathbb{F} \leq G$. Definimos la familia

$$\mathscr{C}_G := \{A \in [\omega]^\omega \big| (\exists B \in [\omega]^\omega)(B \subseteq^* A \wedge S^*_{\#_B} \leq G)\}.$$

Entonces, $[\omega]^\omega \setminus \mathscr{C}_G$ es una familia densa por grupos.

Definición

Dado un grupo $G \leq S_\omega$ que no es finitamente generado, definimos el invariante cardinal $\mathrm{cf}^*(G)$ como el mínimo λ tal que existe una cadena estricta de subgrupos propios $\langle G_\xi \big| \xi < \lambda \rangle$ de tal forma que para cada $\psi \in {}^\omega\omega$ estrictamente creciente, hay un $\xi < \lambda$ tal que $S^*_\psi \leq G_\xi$ y con $G = \bigcup_{\xi<\lambda} G_\xi$.

Teorema (Thomas)

(i) $\mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega) \leq \mathfrak{d}$.

(ii) $\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega)$.

(iii) *Es consistente con* ZFE *que* $\mathrm{cf}(S_\omega) < \mathrm{cf}^*(S_\omega)$.

Lema

Sea $\lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$ *y expresemos a* S_ω *como la unión de una cadena estricta de subgrupos propios de longitud* λ, $S_\omega = \bigcup_{\xi<\lambda} \Gamma_\xi$. *Supóngase que existe una mitad* A *de* ω *tal que para cada* $g \in {}^\omega\omega$ *estrictamente creciente, hay un* $\xi < \lambda$ *tal que* $P_g^A \leq \Gamma_\xi \restriction A$. *Entonces,* $\mathrm{cf}^*(S_\omega) = \lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$.

Teorema (Thomas)

(i) $\mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega) \leq \mathfrak{d}$.

(ii) $\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega)$.

(iii) *Es consistente con* ZFE *que* $\mathrm{cf}(S_\omega) < \mathrm{cf}^*(S_\omega)$.

Lema

Sea $\lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$ *y expresemos a* S_ω *como la unión de una cadena estricta de subgrupos propios de longitud* λ, $S_\omega = \bigcup_{\xi<\lambda} \Gamma_\xi$. *Supóngase que existe una mitad* A *de* ω *tal que para cada* $g \in {}^\omega\omega$ *estrictamente creciente, hay un* $\xi < \lambda$ *tal que* $P_g^A \leq \Gamma_\xi \upharpoonright A$. *Entonces,* $\mathrm{cf}^*(S_\omega) = \lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$.

Teorema (Thomas)

(i) $\mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega) \leq \mathfrak{d}$.

(ii) $\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega)$.

(iii) *Es consistente con* ZFE *que* $\mathrm{cf}(S_\omega) < \mathrm{cf}^*(S_\omega)$.

Lema

Sea $\lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$ *y expresemos a* S_ω *como la unión de una cadena estricta de subgrupos propios de longitud* λ, $S_\omega = \bigcup_{\xi<\lambda} \Gamma_\xi$. *Supóngase que existe una mitad* A *de* ω *tal que para cada* $g \in {}^\omega\omega$ *estrictamente creciente, hay un* $\xi < \lambda$ *tal que* $P_g^A \leq \Gamma_\xi \upharpoonright A$. *Entonces,* $\mathrm{cf}^*(S_\omega) = \lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$.

Teorema (Thomas)

(i) $\mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega) \leq \mathfrak{d}$.

(ii) $\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega)$.

(iii) *Es consistente con* ZFE *que* $\mathrm{cf}(S_\omega) < \mathrm{cf}^*(S_\omega)$.

Lema

Sea $\lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$ *y expresemos a* S_ω *como la unión de una cadena estricta de subgrupos propios de longitud* λ, $S_\omega = \bigcup_{\xi<\lambda} \Gamma_\xi$. *Supóngase que existe una mitad* A *de* ω *tal que para cada* $g \in {}^\omega\omega$ *estrictamente creciente, hay un* $\xi < \lambda$ *tal que* $P_g^A \leq \Gamma_\xi \upharpoonright A$. *Entonces,* $\mathrm{cf}^*(S_\omega) = \lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$.

Teorema (Thomas)

(i) $\mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega) \leq \mathfrak{d}$.

(ii) $\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega)$.

(iii) *Es consistente con* ZFE *que* $\mathrm{cf}(S_\omega) < \mathrm{cf}^*(S_\omega)$.

Lema

Sea $\lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$ *y expresemos a* S_ω *como la unión de una cadena estricta de subgrupos propios de longitud* λ, $S_\omega = \bigcup_{\xi<\lambda} \Gamma_\xi$. *Supóngase que existe una mitad* A *de* ω *tal que para cada* $g \in {}^\omega\omega$ *estrictamente creciente, hay un* $\xi < \lambda$ *tal que* $P_g^A \leq \Gamma_\xi \upharpoonright A$. *Entonces,* $\mathrm{cf}^*(S_\omega) = \lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$.

Teorema (Thomas)

(i) $\mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega) \leq \mathfrak{d}$.

(ii) $\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega)$.

(iii) *Es consistente con* ZFE *que* $\mathrm{cf}(S_\omega) < \mathrm{cf}^*(S_\omega)$.

Lema

Sea $\lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$ *y expresemos a* S_ω *como la unión de una cadena estricta de subgrupos propios de longitud* λ, $S_\omega = \bigcup_{\xi<\lambda} \Gamma_\xi$. *Supóngase que existe una mitad* A *de* ω *tal que para cada* $g \in {}^\omega\omega$ *estrictamente creciente, hay un* $\xi < \lambda$ *tal que* $P_g^A \leq \Gamma_\xi \upharpoonright A$. *Entonces,* $\mathrm{cf}^*(S_\omega) = \lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$.

Construcción

$S_\omega = \bigcup_{\alpha<\lambda} \Gamma_\alpha$, $\lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$. Fijemos una mitad $A \subseteq \omega$.Dado que $\mathrm{cf}(S_\omega) < \mathrm{cf}^*(S_\omega)$, hay una función estrictamente creciente $\psi \in {}^\omega\omega$ tal que $(\forall\alpha < \lambda)(P_\psi^A \nleq \Gamma_\alpha \upharpoonright A)$. Realizemos una partición de A en ω intervalos A_n de longitud k_n. Tomemos una partición de ω, $\{F_n^m \big| n < \omega, m < \omega\}$, tal que para $m < \omega$, $|F_n^m| = k_n$. Para cada $Y \in [\omega]^\omega$, elegir una permutación $\Pi_Y \in S_\omega$ de la manera siguiente: comencemos por enumerar crecientemente $Y = \{y_j \big| j < \omega\}$, y exijamos que $\Pi_Y[A_n] = F_n^{y_n}$.

$$\begin{aligned} D_\alpha := \{Z \in [\omega]^\omega \quad \big| \quad & (\exists X =^* Z)(\exists\beta < \lambda)(\exists h \in \Gamma_\beta)(\exists\delta \geq \alpha, \beta) \\ & (\exists g \in P_\psi^A \setminus \Gamma_\delta \upharpoonright A)(\forall Y \subseteq X)((\mathit{\Pi}_Y^{-1} h \Pi_Y) \upharpoonright A = g)\} \end{aligned}$$

Se tiene que $\bigcap_{\alpha<\lambda} D_\alpha = \varnothing$.

Construcción

$S_\omega = \bigcup_{\alpha<\lambda} \Gamma_\alpha$, $\lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$. Fijemos una mitad $A \subseteq \omega$.Dado que $\mathrm{cf}(S_\omega) < \mathrm{cf}^*(S_\omega)$, hay una función estrictamente creciente $\psi \in {}^\omega\omega$ tal que $(\forall\alpha < \lambda)(P_\psi^A \not\leq \Gamma_\alpha \upharpoonright A)$. Realizemos una partición de A en ω intervalos A_n de longitud k_n. Tomemos una partición de ω, $\{F_n^m \big| n < \omega, m < \omega\}$, tal que para $m < \omega$, $|F_n^m| = k_n$. Para cada $Y \in [\omega]^\omega$, elegir una permutación $\Pi_Y \in S_\omega$ de la manera siguiente: comencemos por enumerar crecientemente $Y = \{y_j \big| j < \omega\}$, y exijamos que $\Pi_Y[A_n] = F_n^{y_n}$.

$$\begin{aligned} D_\alpha := \{Z \in [\omega]^\omega \quad \big| \quad & (\exists X =^* Z)(\exists\beta < \lambda)(\exists h \in \Gamma_\beta)(\exists\delta \geq \alpha, \beta) \\ & (\exists g \in P_\psi^A \setminus \Gamma_\delta \upharpoonright A)(\forall Y \subseteq X)((\Pi_Y^{-1} h \Pi_Y) \upharpoonright A = g)\} \end{aligned}$$

Se tiene que $\bigcap_{\alpha<\lambda} D_\alpha = \varnothing$.

Construcción

$S_\omega = \bigcup_{\alpha<\lambda} \Gamma_\alpha$, $\lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$. Fijemos una mitad $A \subseteq \omega$.Dado que $\mathrm{cf}(S_\omega) < \mathrm{cf}^*(S_\omega)$, hay una función estrictamente creciente $\psi \in {}^\omega\omega$ tal que $(\forall\alpha < \lambda)(P_\psi^A \not\leq \Gamma_\alpha \upharpoonright A)$. Realizemos una partición de A en ω intervalos A_n de longitud k_n. Tomemos una partición de ω, $\{F_n^m \big| n < \omega, m < \omega\}$, tal que para $m < \omega$, $|F_n^m| = k_n$. Para cada $Y \in [\omega]^\omega$, elegir una permutación $\Pi_Y \in S_\omega$ de la manera siguiente: comencemos por enumerar crecientemente $Y = \{y_j \big| j < \omega\}$, y exijamos que $\Pi_Y[A_n] = F_n^{y_n}$.

$$D_\alpha := \{Z \in [\omega]^\omega \quad \Big| \quad (\exists X =^* Z)(\exists\beta < \lambda)(\exists h \in \Gamma_\beta)(\exists\delta \geq \alpha, \beta) (\exists g \in P_\psi^A \setminus \Gamma_\delta \upharpoonright A)(\forall Y \subseteq X)((\Pi_Y^{-1} h \Pi_Y) \upharpoonright A = g)\}$$

Se tiene que $\bigcap_{\alpha<\lambda} D_\alpha = \varnothing$.

Construcción

$S_\omega = \bigcup_{\alpha<\lambda} \Gamma_\alpha$, $\lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$. Fijemos una mitad $A \subseteq \omega$.Dado que $\mathrm{cf}(S_\omega) < \mathrm{cf}^*(S_\omega)$, hay una función estrictamente creciente $\psi \in {}^\omega\omega$ tal que $(\forall\alpha < \lambda)(P_\psi^A \nsubseteq \Gamma_\alpha \restriction A)$. Realizemos una partición de A en ω intervalos A_n de longitud k_n. Tomemos una partición de ω, $\{F_n^m \big| n < \omega, m < \omega\}$, tal que para $m < \omega$, $|F_n^m| = k_n$. Para cada $Y \in [\omega]^\omega$, elegir una permutación $\Pi_Y \in S_\omega$ de la manera siguiente: comencemos por enumerar crecientemente $Y = \{y_j \big| j < \omega\}$, y exijamos que $\Pi_Y[A_n] = F_n^{y_n}$.

$$\begin{aligned} D_\alpha := \{Z \in [\omega]^\omega \quad \big| \quad & (\exists X =^* Z)(\exists\beta < \lambda)(\exists h \in \Gamma_\beta)(\exists\delta \geq \alpha, \beta) \\ & (\exists g \in P_\psi^A \setminus \Gamma_\delta \restriction A)(\forall Y \subseteq X)((\Pi_Y^{-1} h \Pi_Y) \restriction A = g)\} \end{aligned}$$

Se tiene que $\bigcap_{\alpha<\lambda} D_\alpha = \varnothing$.

Construcción

$S_\omega = \bigcup_{\alpha<\lambda} \Gamma_\alpha$, $\lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$. Fijemos una mitad $A \subseteq \omega$.Dado que $\mathrm{cf}(S_\omega) < \mathrm{cf}^*(S_\omega)$, hay una función estrictamente creciente $\psi \in {}^\omega\omega$ tal que $(\forall\alpha < \lambda)(P_\psi^A \nsubseteq \Gamma_\alpha \upharpoonright A)$. Realizemos una partición de A en ω intervalos A_n de longitud k_n. Tomemos una partición de ω, $\{F_n^m \big| n < \omega, m < \omega\}$, tal que para $m < \omega$, $|F_n^m| = k_n$. Para cada $Y \in [\omega]^\omega$, elegir una permutación $\Pi_Y \in S_\omega$ de la manera siguiente: comencemos por enumerar crecientemente $Y = \{y_j \big| j < \omega\}$, y exijamos que $\Pi_Y[A_n] = F_n^{y_n}$.

$$
\begin{aligned}
D_\alpha := \{Z \in [\omega]^\omega \quad \big| \quad & (\exists X =^* Z)(\exists\beta < \lambda)(\exists h \in \Gamma_\beta)(\exists\delta \geq \alpha, \beta) \\
& (\exists g \in P_\psi^A \setminus \Gamma_\delta \upharpoonright A)(\forall Y \subseteq X)((\Pi_Y^{-1} h \Pi_Y) \upharpoonright A = g)\}
\end{aligned}
$$

Se tiene que $\bigcap_{\alpha<\lambda} D_\alpha = \varnothing$.

Construcción

$S_\omega = \bigcup_{\alpha<\lambda} \Gamma_\alpha$, $\lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$. Fijemos una mitad $A \subseteq \omega$.Dado que $\mathrm{cf}(S_\omega) < \mathrm{cf}^*(S_\omega)$, hay una función estrictamente creciente $\psi \in {}^\omega\omega$ tal que $(\forall\alpha < \lambda)(P_\psi^A \nsubseteq \Gamma_\alpha \restriction A)$. Realizemos una partición de A en ω intervalos A_n de longitud k_n. Tomemos una partición de ω, $\{F_n^m \big| n < \omega, m < \omega\}$, tal que para $m < \omega$, $|F_n^m| = k_n$. Para cada $Y \in [\omega]^\omega$, elegir una permutación $\Pi_Y \in S_\omega$ de la manera siguiente: comencemos por enumerar crecientemente $Y = \{y_j \big| j < \omega\}$, y exijamos que $\Pi_Y[A_n] = F_n^{y_n}$.

$$D_\alpha := \{Z \in [\omega]^\omega \quad \Big| \quad (\exists X =^* Z)(\exists\beta < \lambda)(\exists h \in \Gamma_\beta)(\exists\delta \geq \alpha, \beta)$$
$$(\exists g \in P_\psi^A \setminus \Gamma_\delta \restriction A)(\forall Y \subseteq X)((\Pi_Y^{-1} h \Pi_Y) \restriction A = g)\}$$

Se tiene que $\bigcap_{\alpha<\lambda} D_\alpha = \varnothing$.

Construcción

$S_\omega = \bigcup_{\alpha<\lambda} \Gamma_\alpha$, $\lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$. Fijemos una mitad $A \subseteq \omega$.Dado que $\mathrm{cf}(S_\omega) < \mathrm{cf}^*(S_\omega)$, hay una función estrictamente creciente $\psi \in {}^\omega\omega$ tal que $(\forall\alpha < \lambda)(P_\psi^A \not\leq \Gamma_\alpha \restriction A)$. Realizemos una partición de A en ω intervalos A_n de longitud k_n. Tomemos una partición de ω, $\{F_n^m \big| n < \omega, m < \omega\}$, tal que para $m < \omega$, $|F_n^m| = k_n$. Para cada $Y \in [\omega]^\omega$, elegir una permutación $\Pi_Y \in S_\omega$ de la manera siguiente: comencemos por enumerar crecientemente $Y = \{y_j \big| j < \omega\}$, y exijamos que $\Pi_Y[A_n] = F_n^{y_n}$.

$$\begin{aligned} D_\alpha := \{Z \in [\omega]^\omega \quad \Big| \quad & (\exists X =^* Z)(\exists\beta < \lambda)(\exists h \in \Gamma_\beta)(\exists\delta \geq \alpha, \beta) \\ & (\exists g \in P_\psi^A \setminus \Gamma_\delta \restriction A)(\forall Y \subseteq X)((\mathit{\Pi}_Y^{-1} h \Pi_Y) \restriction A = g)\} \end{aligned}$$

Se tiene que $\bigcap_{\alpha<\lambda} D_\alpha = \varnothing$.

Construcción

$S_\omega = \bigcup_{\alpha<\lambda} \Gamma_\alpha$, $\lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$. Fijemos una mitad $A \subseteq \omega$.Dado que $\mathrm{cf}(S_\omega) < \mathrm{cf}^*(S_\omega)$, hay una función estrictamente creciente $\psi \in {}^\omega\omega$ tal que $(\forall\alpha < \lambda)(P_\psi^A \not\leq \Gamma_\alpha \upharpoonright A)$. Realizemos una partición de A en ω intervalos A_n de longitud k_n. Tomemos una partición de ω, $\{F_n^m \big| n < \omega, m < \omega\}$, tal que para $m < \omega$, $|F_n^m| = k_n$. Para cada $Y \in [\omega]^\omega$, elegir una permutación $\Pi_Y \in S_\omega$ de la manera siguiente: comencemos por enumerar crecientemente $Y = \{y_j \big| j < \omega\}$, y exijamos que $\Pi_Y[A_n] = F_n^{y_n}$.

$$D_\alpha := \{Z \in [\omega]^\omega \quad \Big| \quad (\exists X =^* Z)(\exists\beta < \lambda)(\exists h \in \Gamma_\beta)(\exists\delta \geq \alpha, \beta)$$
$$(\exists g \in P_\psi^A \setminus \Gamma_\delta \upharpoonright A)(\forall Y \subseteq X)((\mathit{\Pi}_Y^{-1} h \Pi_Y) \upharpoonright A = g)\}$$

Se tiene que $\bigcap_{\alpha<\lambda} D_\alpha = \varnothing$.

Se verifica que cada uno de los D_α, para $\alpha < \lambda$, es una familia densa por grupos. Por lo tanto, la familia $\{D_\alpha \big| \alpha < \mathrm{cf}(S_\omega)\}$ atestigua lo siguiente:

Teorema (Brendle-Losada)

$\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}(S_\omega)$.

Se verifica que cada uno de los D_α, para $\alpha < \lambda$, es una familia densa por grupos. Por lo tanto, la familia $\{D_\alpha \big| \alpha < \mathrm{cf}(S_\omega)$ atestigua lo siguiente:

Teorema (Brendle-Losada)

$\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}(S_\omega)$.

Se verifica que cada uno de los D_α, para $\alpha < \lambda$, es una familia densa por grupos. Por lo tanto, la familia $\{D_\alpha \big| \alpha < \mathrm{cf}(S_\omega)$ atestigua lo siguiente:

Teorema (Brendle-Losada)

$\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}(S_\omega)$.

Definición

Sea G un grupo. El invariante cardinal $A(G)$, el **espectro abeliano maximal** de G, se define como el mínimo $\kappa > \omega$ tal que G tiene un subgrupo abeliano maximal de cardinalidad κ.

Construcción

Sea $\mathscr{A}$ una familia maximal casi disjunta, $|\mathscr{A}| = \mathfrak{a}$, consideremos $\bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$. Para cada $a \in \mathscr{A}$, sea π_a la función que "recorre" los elementos de a un lugar "hacia la derecha". Definiremos $\Phi : \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \longrightarrow \wp(S_\omega)$ de la manera siguiente: dado $f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$,

$$\Phi(f) := \Big\{ \pi \in S_\omega \;\Big|\; (\exists F \in [\omega]^{<\omega})(\forall a, b \in \operatorname{sop}(f))\Big(a \neq b \Rightarrow a \cap b \subseteq F \wedge (\forall n \in \omega \setminus F)\Big(\pi(n) = \begin{cases} \pi_a^{f(a)}(n); & n \in a \in \operatorname{sop}(f) \\ n; & \text{otro caso} \end{cases}\Big)\Big)\Big\}.$$

Definición

Sea G un grupo. El invariante cardinal $A(G)$, el **espectro abeliano maximal** de G, se define como el mínimo $\kappa > \omega$ tal que G tiene un subgrupo abeliano maximal de cardinalidad κ.

Construcción

Sea $\mathscr{A}$ una familia maximal casi disjunta, $|\mathscr{A}| = \mathfrak{a}$, consideremos $\bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$. Para cada $a \in \mathscr{A}$, sea π_a la función que "recorre" los elementos de a un lugar "hacia la derecha". Definiremos $\Phi : \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \longrightarrow \wp(S_\omega)$ de la manera siguiente: dado $f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$,

$$\Phi(f) := \left\{ \pi \in S_\omega \;\middle|\; (\exists F \in [\omega]^{<\omega})(\forall a, b \in \mathrm{sop}(f))\Big(a \neq b \Rightarrow a \cap b \subseteq F \wedge (\forall n \in \omega \setminus F)\left(\pi(n) = \begin{cases} \pi_a^{f(a)}(n); & n \in a \in \mathrm{sop}(f) \\ n; & \text{otro caso} \end{cases}\right)\Big)\right\}.$$

Definición

Sea G un grupo. El invariante cardinal $A(G)$, el **espectro abeliano maximal** de G, se define como el mínimo $\kappa > \omega$ tal que G tiene un subgrupo abeliano maximal de cardinalidad κ.

Construcción

Sea $\mathscr{A}$ una familia maximal casi disjunta, $|\mathscr{A}| = \mathfrak{a}$, consideremos $\bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$. Para cada $a \in \mathscr{A}$, sea π_a la función que “recorre" los elementos de a un lugar “hacia la derecha". Definiremos $\Phi : \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \longrightarrow \wp(S_\omega)$ de la manera siguiente: dado $f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$,

$$\Phi(f) := \left\{ \pi \in S_\omega \;\middle|\; (\exists F \in [\omega]^{<\omega})(\forall a, b \in \operatorname{sop}(f))\left(a \neq b \Rightarrow a \cap b \subseteq F \wedge (\forall n \in \omega \setminus F)\left(\pi(n) = \begin{cases} \pi_a^{f(a)}(n); & n \in a \in \operatorname{sop}(f) \\ n; & \text{otro caso} \end{cases}\right)\right)\right\}.$$

Definición

Sea G un grupo. El invariante cardinal $A(G)$, el **espectro abeliano maximal** de G, se define como el mínimo $\kappa > \omega$ tal que G tiene un subgrupo abeliano maximal de cardinalidad κ.

Construcción

Sea $\mathscr{A}$ una familia maximal casi disjunta, $|\mathscr{A}| = \mathfrak{a}$, consideremos $\bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$. Para cada $a \in \mathscr{A}$, sea π_a la función que "recorre" los elementos de a un lugar "hacia la derecha". Definiremos $\Phi : \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \longrightarrow \wp(S_\omega)$ de la manera siguiente: dado $f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$,

$$\Phi(f) := \left\{\pi \in S_\omega \quad \middle| \quad (\exists F \in [\omega]^{<\omega})(\forall a, b \in \mathrm{sop}(f))\Big(a \neq b \Rightarrow a \cap b \subseteq F \wedge (\forall n \in \omega \setminus F)\left(\pi(n) = \begin{cases} \pi_a^{f(a)}(n); & n \in a \in \mathrm{sop}(f) \\ n; & \text{otro caso} \end{cases}\right)\Big)\right\}.$$

Definición

Sea G un grupo. El invariante cardinal $A(G)$, el **espectro abeliano maximal** de G, se define como el mínimo $\kappa > \omega$ tal que G tiene un subgrupo abeliano maximal de cardinalidad κ.

Construcción

Sea $\mathscr{A}$ una familia maximal casi disjunta, $|\mathscr{A}| = \mathfrak{a}$, consideremos $\bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$. Para cada $a \in \mathscr{A}$, sea π_a la función que "recorre" los elementos de a un lugar "hacia la derecha". Definiremos $\Phi : \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \longrightarrow \wp(S_\omega)$ de la manera siguiente: dado $f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$,

$$\Phi(f) := \left\{\pi \in S_\omega \quad \middle| \quad (\exists F \in [\omega]^{<\omega})(\forall a, b \in \operatorname{sop}(f))\left(a \neq b \Rightarrow a \cap b \subseteq F \wedge (\forall n \in \omega \setminus F)\left(\pi(n) = \begin{cases} \pi_a^{f(a)}(n); & n \in a \in \operatorname{sop}(f) \\ n; & \text{otro caso} \end{cases}\right)\right)\right\}.$$

Definición

Sea G un grupo. El invariante cardinal $A(G)$, el **espectro abeliano maximal** de G, se define como el mínimo $\kappa > \omega$ tal que G tiene un subgrupo abeliano maximal de cardinalidad κ.

Construcción

Sea $\mathscr{A}$ una familia maximal casi disjunta, $|\mathscr{A}| = \mathfrak{a}$, consideremos $\bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$. Para cada $a \in \mathscr{A}$, sea π_a la función que "recorre" los elementos de a un lugar "hacia la derecha". Definiremos $\Phi : \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \longrightarrow \wp(S_\omega)$ de la manera siguiente: dado $f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$,

$$\Phi(f) := \left\{\pi \in S_\omega \;\middle|\; (\exists F \in [\omega]^{<\omega})(\forall a, b \in \mathrm{sop}(f))\left(a \neq b \Rightarrow a \cap b \subseteq F \wedge (\forall n \in \omega \setminus F)\left(\pi(n) = \begin{cases} \pi_a^{f(a)}(n); & n \in a \in \mathrm{sop}(f) \\ n; & \text{otro caso} \end{cases}\right)\right)\right\}.$$

Definición

Sea G un grupo. El invariante cardinal $A(G)$, el **espectro abeliano maximal** de G, se define como el mínimo $\kappa > \omega$ tal que G tiene un subgrupo abeliano maximal de cardinalidad κ.

Construcción

Sea $\mathscr{A}$ una familia maximal casi disjunta, $|\mathscr{A}| = \mathfrak{a}$, consideremos $\bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$. Para cada $a \in \mathscr{A}$, sea π_a la función que “recorre" los elementos de a un lugar “hacia la derecha". Definiremos $\Phi : \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \longrightarrow \wp(S_\omega)$ de la manera siguiente: dado $f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$,

$$\Phi(f) := \left\{\pi \in S_\omega \quad \middle| \quad (\exists F \in [\omega]^{<\omega})(\forall a, b \in \mathrm{sop}(f))\Bigg(a \neq b \Rightarrow a \cap b \subseteq F \wedge (\forall n \in \omega \setminus F)\left(\pi(n) = \begin{cases} \pi_a^{f(a)}(n); \ n \in a \in \mathrm{sop}(f) \\ n; \ \text{otro caso} \end{cases}\right)\Bigg)\right\}.$$

Se verifica que $G := \{f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \,|\, \Phi(f) \neq \varnothing\} = \{f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \,|\, \sum_{a\in\mathscr{A}} f(a) = 0\}$. En adelante, Φ denotará únicamente a la restricción $\Phi \restriction G$.

Lema

$\mathrm{ran}(\Phi) \subseteq S_\omega/\mathbb{F}$ *y* $\Phi : G \longrightarrow S_\omega/\mathbb{F}$ *es un monomorfismo de grupos.*

Así, tenemos que $\Phi[G] \leq S_\omega/\mathbb{F}$ es un subgrupo abeliano de cardinalidad no numerable y a lo más $\mathfrak{a}$. Como también se verifica que $\Phi[G]$ es un subgrupo abeliano maximal en $S_\omega/\mathbb{F}$, concluimos que

Teorema (Shelah-Steprāns)

$A(S_\omega/\mathbb{F}) \leq \mathfrak{a}$.

Se verifica que $G := \{f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \big| \Phi(f) \neq \varnothing\} = \{f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \big| \sum_{a\in\mathscr{A}} f(a) = 0\}$. En adelante, Φ denotará únicamente a la restricción $\Phi \restriction G$.

Lema

$\mathrm{ran}(\Phi) \subseteq S_\omega/\mathbb{F}$ *y* $\Phi : G \longrightarrow S_\omega/\mathbb{F}$ *es un monomorfismo de grupos.*

Así, tenemos que $\Phi[G] \leq S_\omega/\mathbb{F}$ es un subgrupo abeliano de cardinalidad no numerable y a lo más $\mathfrak{a}$. Como también se verifica que $\Phi[G]$ es un subgrupo abeliano maximal en $S_\omega/\mathbb{F}$, concluimos que

Teorema (Shelah-Steprāns)

$A(S_\omega/\mathbb{F}) \leq \mathfrak{a}$.

Se verifica que $G := \{f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \,\big|\, \Phi(f) \neq \varnothing\} = \{f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \,\big|\, \sum_{a\in\mathscr{A}} f(a) = 0\}$. En adelante, Φ denotará únicamente a la restricción $\Phi \restriction G$.

Lema

$\operatorname{ran}(\Phi) \subseteq S_\omega/\mathbb{F}$ *y* $\Phi : G \longrightarrow S_\omega/\mathbb{F}$ *es un monomorfismo de grupos.*

Así, tenemos que $\Phi[G] \leq S_\omega/\mathbb{F}$ es un subgrupo abeliano de cardinalidad no numerable y a lo más $\mathfrak{a}$. Como también se verifica que $\Phi[G]$ es un subgrupo abeliano maximal en $S_\omega/\mathbb{F}$, concluimos que

Teorema (Shelah-Steprāns)

$A(S_\omega/\mathbb{F}) \leq \mathfrak{a}$.

Se verifica que $G := \{f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \big| \Phi(f) \neq \varnothing\} = \{f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \big| \sum_{a\in\mathscr{A}} f(a) = 0\}$. En adelante, Φ denotará únicamente a la restricción $\Phi \restriction G$.

Lema

$\mathrm{ran}(\Phi) \subseteq S_\omega/\mathbb{F}$ *y* $\Phi : G \longrightarrow S_\omega/\mathbb{F}$ *es un monomorfismo de grupos.*

Así, tenemos que $\Phi[G] \leq S_\omega/\mathbb{F}$ es un subgrupo abeliano de cardinalidad no numerable y a lo más $\mathfrak{a}$. Como también se verifica que $\Phi[G]$ es un subgrupo abeliano maximal en $S_\omega/\mathbb{F}$, concluimos que

Teorema (Shelah-Steprāns)

$A(S_\omega/\mathbb{F}) \leq \mathfrak{a}$.

Se verifica que $G := \{f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \big| \Phi(f) \neq \varnothing\} = \{f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \big| \sum_{a\in\mathscr{A}} f(a) = 0\}$. En adelante, Φ denotará únicamente a la restricción $\Phi \restriction G$.

Lema

$\mathrm{ran}(\Phi) \subseteq S_\omega/\mathbb{F}$ *y* $\Phi : G \longrightarrow S_\omega/\mathbb{F}$ *es un monomorfismo de grupos.*

Así, tenemos que $\Phi[G] \leq S_\omega/\mathbb{F}$ es un subgrupo abeliano de cardinalidad no numerable y a lo más $\mathfrak{a}$. Como también se verifica que $\Phi[G]$ es un subgrupo abeliano maximal en $S_\omega/\mathbb{F}$, concluimos que

Teorema (Shelah-Steprāns)

$A(S_\omega/\mathbb{F}) \leq \mathfrak{a}$.

Se verifica que $G := \{f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \big| \Phi(f) \neq \varnothing\} = \{f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \big| \sum_{a\in\mathscr{A}} f(a) = 0\}$. En adelante, Φ denotará únicamente a la restricción $\Phi \restriction G$.

Lema

$\mathrm{ran}(\Phi) \subseteq S_\omega/\mathbb{F}$ *y* $\Phi : G \longrightarrow S_\omega/\mathbb{F}$ *es un monomorfismo de grupos.*

Así, tenemos que $\Phi[G] \leq S_\omega/\mathbb{F}$ es un subgrupo abeliano de cardinalidad no numerable y a lo más $\mathfrak{a}$. Como también se verifica que $\Phi[G]$ es un subgrupo abeliano maximal en $S_\omega/\mathbb{F}$, concluimos que

Teorema (Shelah-Steprāns)

$A(S_\omega/\mathbb{F}) \leq \mathfrak{a}$.

Se verifica que $G := \{f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \big| \Phi(f) \neq \varnothing\} = \{f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \big| \sum_{a\in\mathscr{A}} f(a) = 0\}$. En adelante, Φ denotará únicamente a la restricción $\Phi \upharpoonright G$.

Lema

$\mathrm{ran}(\Phi) \subseteq S_\omega/\mathbb{F}$ *y* $\Phi : G \longrightarrow S_\omega/\mathbb{F}$ *es un monomorfismo de grupos.*

Así, tenemos que $\Phi[G] \leq S_\omega/\mathbb{F}$ es un subgrupo abeliano de cardinalidad no numerable y a lo más $\mathfrak{a}$. Como también se verifica que $\Phi[G]$ es un subgrupo abeliano maximal en $S_\omega/\mathbb{F}$, concluimos que

Teorema (Shelah-Steprāns)

$A(S_\omega/\mathbb{F}) \leq \mathfrak{a}$.

Dado un ideal $\mathcal{I}$ (sobre ω), denotaremos

$$\$(\mathcal{I}) := \{\pi \in S_\omega \big| (\forall A \subseteq \omega)(A \in \mathcal{I} \iff \pi[A] \in \mathcal{I})\},$$

$$\mathbb{F}(\mathcal{I}) := \{\pi \in S_\omega \big| \mathrm{Mov}(\pi) \in \mathcal{I}\}.$$

Se cumple que $\$(\mathcal{I}) \leq S_\omega$ y $\mathbb{F}(\mathcal{I}) \trianglelefteq \$(\mathcal{I})$. En particular, $\$([\omega]^{<\omega}) = S_\omega$ y $\mathbb{F} = \mathbb{F}([\omega]^{<\omega})$.

Definición

Definimos el **espectro abeliano maximal** de $\mathcal{I}$ como el invariante cardinal $A(\$(\mathcal{I})/\mathbb{F}(\mathcal{I}))$, mismo que de ahora en adelante denotaremos como $A(\mathcal{I})$.

Así entonces, el cardinal $A(S_\omega/\mathbb{F})$ que estudiamos en la sección anterior será conocido, de ahora en adelante, como $A([\omega]^{<\omega})$.

Dado un ideal $\mathcal{I}$ (sobre ω), denotaremos

$$\$(\mathcal{I}) := \{\pi \in S_\omega \big| (\forall A \subseteq \omega)(A \in \mathcal{I} \iff \pi[A] \in \mathcal{I})\},$$

$$\mathbb{F}(\mathcal{I}) := \{\pi \in S_\omega \big| \operatorname{Mov}(\pi) \in \mathcal{I}\}.$$

Se cumple que $\$(\mathcal{I}) \leq S_\omega$ y $\mathbb{F}(\mathcal{I}) \trianglelefteq \$(\mathcal{I})$. En particular, $\$([\omega]^{<\omega}) = S_\omega$ y $\mathbb{F} = \mathbb{F}([\omega]^{<\omega})$.

Definición

Definimos el **espectro abeliano maximal** de $\mathcal{I}$ como el invariante cardinal $A(\$(\mathcal{I})/\mathbb{F}(\mathcal{I}))$, mismo que de ahora en adelante denotaremos como $A(\mathcal{I})$.

Así entonces, el cardinal $A(S_\omega/\mathbb{F})$ que estudiamos en la sección anterior será conocido, de ahora en adelante, como $A([\omega]^{<\omega})$.

Dado un ideal $\mathcal{I}$ (sobre ω), denotaremos

$$\$(\mathcal{I}) := \{\pi \in S_\omega \big| (\forall A \subseteq \omega)(A \in \mathcal{I} \iff \pi[A] \in \mathcal{I})\},$$

$$\mathbb{F}(\mathcal{I}) := \{\pi \in S_\omega \big| \operatorname{Mov}(\pi) \in \mathcal{I}\}.$$

Se cumple que $\$(\mathcal{I}) \leq S_\omega$ y $\mathbb{F}(\mathcal{I}) \trianglelefteq \$(\mathcal{I})$. En particular, $\$([\omega]^{<\omega}) = S_\omega$ y $\mathbb{F} = \mathbb{F}([\omega]^{<\omega})$.

Definición

Definimos el **espectro abeliano maximal** de $\mathcal{I}$ como el invariante cardinal $A(\$(\mathcal{I})/\mathbb{F}(\mathcal{I}))$, mismo que de ahora en adelante denotaremos como $A(\mathcal{I})$.

Así entonces, el cardinal $A(S_\omega/\mathbb{F})$ que estudiamos en la sección anterior será conocido, de ahora en adelante, como $A([\omega]^{<\omega})$.

Dado un ideal $\mathcal{I}$ (sobre ω), denotaremos

$$\$(\mathcal{I}) := \{\pi \in S_\omega \big| (\forall A \subseteq \omega)(A \in \mathcal{I} \iff \pi[A] \in \mathcal{I})\},$$

$$\mathbb{F}(\mathcal{I}) := \{\pi \in S_\omega \big| \operatorname{Mov}(\pi) \in \mathcal{I}\}.$$

Se cumple que $\$(\mathcal{I}) \leq S_\omega$ y $\mathbb{F}(\mathcal{I}) \trianglelefteq \$(\mathcal{I})$. En particular, $\$([\omega]^{<\omega}) = S_\omega$ y $\mathbb{F} = \mathbb{F}([\omega]^{<\omega})$.

Definición

Definimos el **espectro abeliano maximal** de $\mathcal{I}$ como el invariante cardinal $A(\$(\mathcal{I})/\mathbb{F}(\mathcal{I}))$, mismo que de ahora en adelante denotaremos como $A(\mathcal{I})$.

Así entonces, el cardinal $A(S_\omega/\mathbb{F})$ que estudiamos en la sección anterior será conocido, de ahora en adelante, como $A([\omega]^{<\omega})$.

Dado un ideal $\mathcal{I}$ (sobre ω), denotaremos

$$\$(\mathcal{I}) := \{\pi \in S_\omega \big| (\forall A \subseteq \omega)(A \in \mathcal{I} \iff \pi[A] \in \mathcal{I})\},$$

$$\mathbb{F}(\mathcal{I}) := \{\pi \in S_\omega \big| \operatorname{Mov}(\pi) \in \mathcal{I}\}.$$

Se cumple que $\$(\mathcal{I}) \leq S_\omega$ y $\mathbb{F}(\mathcal{I}) \trianglelefteq \$(\mathcal{I})$. En particular, $\$([\omega]^{<\omega}) = S_\omega$ y $\mathbb{F} = \mathbb{F}([\omega]^{<\omega})$.

Definición

Definimos el **espectro abeliano maximal** de $\mathcal{I}$ como el invariante cardinal $A(\$(\mathcal{I})/\mathbb{F}(\mathcal{I}))$, mismo que de ahora en adelante denotaremos como $A(\mathcal{I})$.

Así entonces, el cardinal $A(S_\omega/\mathbb{F})$ que estudiamos en la sección anterior será conocido, de ahora en adelante, como $A([\omega]^{<\omega})$.

Dado un ideal $\mathcal{I}$ (sobre ω), denotaremos

$$\mathbb{S}(\mathcal{I}) := \{\pi \in S_\omega \big| (\forall A \subseteq \omega)(A \in \mathcal{I} \iff \pi[A] \in \mathcal{I})\},$$

$$\mathbb{F}(\mathcal{I}) := \{\pi \in S_\omega \big| \operatorname{Mov}(\pi) \in \mathcal{I}\}.$$

Se cumple que $\mathbb{S}(\mathcal{I}) \leq S_\omega$ y $\mathbb{F}(\mathcal{I}) \trianglelefteq \mathbb{S}(\mathcal{I})$. En particular, $\mathbb{S}([\omega]^{<\omega}) = S_\omega$ y $\mathbb{F} = \mathbb{F}([\omega]^{<\omega})$.

Definición

Definimos el **espectro abeliano maximal** de $\mathcal{I}$ como el invariante cardinal $A(\mathbb{S}(\mathcal{I})/\mathbb{F}(\mathcal{I}))$, mismo que de ahora en adelante denotaremos como $A(\mathcal{I})$.

Así entonces, el cardinal $A(S_\omega/\mathbb{F})$ que estudiamos en la sección anterior será conocido, de ahora en adelante, como $A([\omega]^{<\omega})$.

Dado un ideal $\mathcal{I}$ (sobre ω), denotaremos

$$\$(\mathcal{I}) := \{\pi \in S_\omega \big| (\forall A \subseteq \omega)(A \in \mathcal{I} \iff \pi[A] \in \mathcal{I})\},$$

$$\mathbb{F}(\mathcal{I}) := \{\pi \in S_\omega \big| \operatorname{Mov}(\pi) \in \mathcal{I}\}.$$

Se cumple que $\$(\mathcal{I}) \leq S_\omega$ y $\mathbb{F}(\mathcal{I}) \trianglelefteq \$(\mathcal{I})$. En particular, $\$([\omega]^{<\omega}) = S_\omega$ y $\mathbb{F} = \mathbb{F}([\omega]^{<\omega})$.

Definición

Definimos el **espectro abeliano maximal** de $\mathcal{I}$ como el invariante cardinal $A(\$(\mathcal{I})/\mathbb{F}(\mathcal{I}))$, mismo que de ahora en adelante denotaremos como $A(\mathcal{I})$.

Así entonces, el cardinal $A(S_\omega/\mathbb{F})$ que estudiamos en la sección anterior será conocido, de ahora en adelante, como $A([\omega]^{<\omega})$.

Definición

Sea $\mathcal{I}$ un ideal.

- Sean $a, b \subseteq \omega$. Diremos que a y b son **casi disjuntos módulo** $\mathcal{I}$ si $a \cap b \in \mathcal{I}$.
- Sea $\mathscr{A} \subseteq \wp(\omega)$. Diremos que $\mathscr{A}$ es una familia **casi disjunta módulo** $\mathcal{I}$ si $\mathscr{A} \cap \mathcal{I} = \varnothing$ y $(\forall a, b \in \mathscr{A})(a \cap b \in \mathcal{I})$.
- Definimos el invariante cardinal $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ como la mínima cardinalidad de una familia infinita que es casi disjunta maximal módulo $\mathcal{I}$.

Así $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}([\omega]^{<\omega})$. El resultado principal de la sección anterior asegura que $A([\omega]^{<\omega}) \leq \mathfrak{a}([\omega]^{<\omega})$. Construiremos una familia de ideales $\mathcal{I}$ para los cuales es relativamente consistente con ZFE que $\mathfrak{a}(\mathcal{I}) < A(\mathcal{I})$.

Definición

Sea $\mathcal{I}$ un ideal.

- Sean $a, b \subseteq \omega$. Diremos que a y b son **casi disjuntos módulo** $\mathcal{I}$ si $a \cap b \in \mathcal{I}$.
- Sea $\mathscr{A} \subseteq \wp(\omega)$. Diremos que $\mathscr{A}$ es una familia **casi disjunta módulo** $\mathcal{I}$ si $\mathscr{A} \cap \mathcal{I} = \varnothing$ y $(\forall a, b \in \mathscr{A})(a \cap b \in \mathcal{I})$.
- Definimos el invariante cardinal $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ como la mínima cardinalidad de una familia infinita que es casi disjunta maximal módulo $\mathcal{I}$.

Así $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}([\omega]^{<\omega})$. El resultado principal de la sección anterior asegura que $A([\omega]^{<\omega}) \leq \mathfrak{a}([\omega]^{<\omega})$. Construiremos una familia de ideales $\mathcal{I}$ para los cuales es relativamente consistente con ZFE que $\mathfrak{a}(\mathcal{I}) < A(\mathcal{I})$.

Definición

Sea $\mathcal{I}$ un ideal.

- Sean $a, b \subseteq \omega$. Diremos que a y b son **casi disjuntos módulo $\mathcal{I}$** si $a \cap b \in \mathcal{I}$.
- Sea $\mathscr{A} \subseteq \wp(\omega)$. Diremos que $\mathscr{A}$ es una familia **casi disjunta módulo $\mathcal{I}$** si $\mathscr{A} \cap \mathcal{I} = \varnothing$ y $(\forall a, b \in \mathscr{A})(a \cap b \in \mathcal{I})$.
- Definimos el invariante cardinal $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ como la mínima cardinalidad de una familia infinita que es casi disjunta maximal módulo $\mathcal{I}$.

Así $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}([\omega]^{<\omega})$. El resultado principal de la sección anterior asegura que $A([\omega]^{<\omega}) \leq \mathfrak{a}([\omega]^{<\omega})$. Construiremos una familia de ideales $\mathcal{I}$ para los cuales es relativamente consistente con ZFE que $\mathfrak{a}(\mathcal{I}) < A(\mathcal{I})$.

Definición

Sea $\mathcal{I}$ un ideal.

- Sean $a, b \subseteq \omega$. Diremos que a y b son **casi disjuntos módulo $\mathcal{I}$** si $a \cap b \in \mathcal{I}$.
- Sea $\mathscr{A} \subseteq \wp(\omega)$. Diremos que $\mathscr{A}$ es una familia **casi disjunta módulo $\mathcal{I}$** si $\mathscr{A} \cap \mathcal{I} = \varnothing$ y $(\forall a, b \in \mathscr{A})(a \cap b \in \mathcal{I})$.
- Definimos el invariante cardinal $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ como la mínima cardinalidad de una familia infinita que es casi disjunta maximal módulo $\mathcal{I}$.

Así $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}([\omega]^{<\omega})$. El resultado principal de la sección anterior asegura que $A([\omega]^{<\omega}) \leq \mathfrak{a}([\omega]^{<\omega})$. Construiremos una familia de ideales $\mathcal{I}$ para los cuales es relativamente consistente con ZFE que $\mathfrak{a}(\mathcal{I}) < A(\mathcal{I})$.

Definición

Sea $\mathcal{I}$ un ideal.

- Sean $a, b \subseteq \omega$. Diremos que a y b son **casi disjuntos módulo $\mathcal{I}$** si $a \cap b \in \mathcal{I}$.
- Sea $\mathscr{A} \subseteq \wp(\omega)$. Diremos que $\mathscr{A}$ es una familia **casi disjunta módulo $\mathcal{I}$** si $\mathscr{A} \cap \mathcal{I} = \varnothing$ y $(\forall a, b \in \mathscr{A})(a \cap b \in \mathcal{I})$.
- Definimos el invariante cardinal $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ como la mínima cardinalidad de una familia infinita que es casi disjunta maximal módulo $\mathcal{I}$.

Así $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}([\omega]^{<\omega})$. El resultado principal de la sección anterior asegura que $A([\omega]^{<\omega}) \leq \mathfrak{a}([\omega]^{<\omega})$. Construiremos una familia de ideales $\mathcal{I}$ para los cuales es relativamente consistente con ZFE que $\mathfrak{a}(\mathcal{I}) < A(\mathcal{I})$.

Definición

Sea $\mathcal{I}$ un ideal.

- Sean $a, b \subseteq \omega$. Diremos que a y b son **casi disjuntos módulo** $\mathcal{I}$ si $a \cap b \in \mathcal{I}$.
- Sea $\mathscr{A} \subseteq \wp(\omega)$. Diremos que $\mathscr{A}$ es una familia **casi disjunta módulo** $\mathcal{I}$ si $\mathscr{A} \cap \mathcal{I} = \varnothing$ y $(\forall a, b \in \mathscr{A})(a \cap b \in \mathcal{I})$.
- Definimos el invariante cardinal $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ como la mínima cardinalidad de una familia infinita que es casi disjunta maximal módulo $\mathcal{I}$.

Así $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}([\omega]^{<\omega})$. El resultado principal de la sección anterior asegura que $A([\omega]^{<\omega}) \leq \mathfrak{a}([\omega]^{<\omega})$. Construiremos una familia de ideales $\mathcal{I}$ para los cuales es relativamente consistente con ZFE que $\mathfrak{a}(\mathcal{I}) < A(\mathcal{I})$.

Definición

Sea $\mathcal{I}$ un ideal.

- Sean $a, b \subseteq \omega$. Diremos que a y b son **casi disjuntos módulo** $\mathcal{I}$ si $a \cap b \in \mathcal{I}$.
- Sea $\mathscr{A} \subseteq \wp(\omega)$. Diremos que $\mathscr{A}$ es una familia **casi disjunta módulo** $\mathcal{I}$ si $\mathscr{A} \cap \mathcal{I} = \varnothing$ y $(\forall a, b \in \mathscr{A})(a \cap b \in \mathcal{I})$.
- Definimos el invariante cardinal $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ como la mínima cardinalidad de una familia infinita que es casi disjunta maximal módulo $\mathcal{I}$.

Así $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}([\omega]^{<\omega})$. El resultado principal de la sección anterior asegura que $A([\omega]^{<\omega}) \leq \mathfrak{a}([\omega]^{<\omega})$. Construiremos una familia de ideales $\mathcal{I}$ para los cuales es relativamente consistente con ZFE que $\mathfrak{a}(\mathcal{I}) < A(\mathcal{I})$.

Sea $\mathcal{N} = (n_i)_{i=0}^{\infty} \in {}^\omega\omega$ una sucesión estrictamente creciente tal que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{n_{i+1} - n_i}{n_{i+2} - n_{i+1}} = 0.$$

Por ejemplo, $n_i = 2^{i^2}$.

Definiremos un ideal de la siguiente manera:

$$\mathcal{I}(\mathcal{N}) := \left\{ A \subseteq \omega \,\middle|\, \lim_{i\to\infty} \frac{|A \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} = 0 \right\}.$$

Teorema

$\mathfrak{a}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) = \mathfrak{c}.$

Sea $\mathcal{N}=\underset{i=0}{\overset{\infty}{(n_i)}}\in{}^\omega\omega$ una sucesión estrictamente creciente tal que

$$\lim_{i\to\infty}\frac{n_{i+1}-n_i}{n_{i+2}-n_{i+1}}=0.$$

Por ejemplo, $n_i=2^{i^2}$.

Definiremos un ideal de la siguiente manera:

$$\mathcal{I}(\mathcal{N}):=\left\{A\subseteq\omega\,\middle|\,\lim_{i\to\infty}\frac{|A\cap[n_i,n_{i+1})|}{n_{i+1}-n_i}=0\right\}.$$

Teorema

$A(\mathcal{I}(\mathcal{N}))=\mathfrak{c}.$

Sea $\mathcal{N} = (n_i)_{i=0}^{\infty} \in {}^{\omega}\omega$ una sucesión estrictamente creciente tal que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{n_{i+1} - n_i}{n_{i+2} - n_{i+1}} = 0.$$

Por ejemplo, $n_i = 2^{i^2}$.
Definiremos un ideal de la siguiente manera:

$$\mathcal{I}(\mathcal{N}) := \left\{ A \subseteq \omega \,\middle|\, \lim_{i\to\infty} \frac{|A \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} = 0 \right\}.$$

Teorema

$A(\mathcal{I}(\mathcal{N})) = \mathfrak{c}$.

Sea $\mathcal{N} = \underset{i=0}{\overset{\infty}{(n_i)}} \in {}^\omega\omega$ una sucesión estrictamente creciente tal que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{n_{i+1}-n_i}{n_{i+2}-n_{i+1}} = 0.$$

Por ejemplo, $n_i = 2^{i^2}$.
Definiremos un ideal de la siguiente manera:

$$\mathcal{I}(\mathcal{N}) := \left\{ A \subseteq \omega \middle| \lim_{i\to\infty} \frac{|A\cap[n_i,n_{i+1})|}{n_{i+1}-n_i} = 0 \right\}.$$

Teorema

$A(\mathcal{I}(\mathcal{N})) = \mathfrak{c}$.

Sea $\mathcal{N} = (n_i)_{i=0}^{\infty} \in {}^{\omega}\omega$ una sucesión estrictamente creciente tal que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{n_{i+1}-n_i}{n_{i+2}-n_{i+1}} = 0.$$

Por ejemplo, $n_i = 2^{i^2}$.
Definiremos un ideal de la siguiente manera:

$$\mathcal{I}(\mathcal{N}) := \left\{ A \subseteq \omega \middle| \lim_{i\to\infty} \frac{|A\cap[n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1}-n_i} = 0 \right\}.$$

Teorema

$A(\mathcal{I}(\mathcal{N})) = \mathfrak{c}$.

Teorema

$\mathfrak{a}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) \leq \mathfrak{a}$.

Teorema

Sea $M \models$ ZFE + HC *y sea* $I \in M$. *Sea* G *un filtro* $\mathrm{Fn}(I,2)$*-genérico sobre* M. *Entonces,* $M[G] \models \mathfrak{a} = \omega_1$.

Corolario (Shelah-Steprāns)

Es relativamente consistente con ZFE *que* $\mathfrak{a}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) < A(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$.

Teorema

$\mathfrak{a}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) \leq \mathfrak{a}$.

Teorema

Sea $M \vDash$ ZFE + HC *y sea* $I \in M$. *Sea* G *un filtro* $\mathrm{Fn}(I,2)$*-genérico sobre* M. *Entonces,* $M[G] \vDash \mathfrak{a} = \omega_1$.

Corolario (Shelah-Steprāns)

Es relativamente consistente con ZFE *que* $\mathfrak{a}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) < A(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$.

Teorema

$\mathfrak{a}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) \leq \mathfrak{a}$.

Teorema

Sea $M \vDash \text{ZFE} + \text{HC}$ *y sea* $I \in M$. *Sea* G *un filtro* $\mathrm{Fn}(I, 2)$*-genérico sobre* M. *Entonces,* $M[G] \vDash \mathfrak{a} = \omega_1$.

Corolario (Shelah-Steprāns)

Es relativamente consistente con ZFE *que* $\mathfrak{a}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) < A(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$.

Teorema

$\mathfrak{a}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) \leq \mathfrak{a}$.

Teorema

Sea $M \models$ ZFE + HC *y sea* $I \in M$. *Sea* G *un filtro* $\mathrm{Fn}(I,2)$*-genérico sobre* M. *Entonces,* $M[G] \models \mathfrak{a} = \omega_1$.

Corolario (Shelah-Steprāns)

Es relativamente consistente con ZFE *que* $\mathfrak{a}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) < A(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$.

Teorema

$\mathfrak{a}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) \leq \mathfrak{a}$.

Teorema

Sea $M \vDash \mathrm{ZFE} + \mathrm{HC}$ *y sea* $I \in M$*. Sea* G *un filtro* $\mathrm{Fn}(I,2)$*-genérico sobre* M*. Entonces,* $M[G] \vDash \mathfrak{a} = \omega_1$*.*

Corolario (Shelah-Steprāns)

Es relativamente consistente con ZFE *que* $\mathfrak{a}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) < A(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$*.*

Definición

- Si $\mathcal{S} \subseteq S_\omega$ y $X \subseteq \omega$, definiremos

$$\begin{aligned}\text{órb}_{\mathcal{S}}(X) &:= \left\{ \left(\prod_{i=1}^{n} \pi_i^{j_i}\right)(x) \middle| n < \omega \wedge x \in X \wedge \pi_i \in \mathcal{S} \wedge j_i \in \{-1,1\} \right\} \\ &= \{\pi(x) | x \in X \wedge \pi \in \langle \mathcal{S} \rangle\} = \bigcup_{\pi \in \langle S \rangle} \bigcup_{x \in X} \text{órb}_\pi(\{x\}).\end{aligned}$$

- Para $\mathcal{S} \subseteq S_\omega$, definiremos

$$\begin{aligned}I^*(\mathcal{S}) &:= \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}} \bigcup_{m \in I(\sigma)} \text{órb}_{\mathcal{S}}(\{m\}) \\ &= \{\pi(m) | (\exists \sigma \in \mathcal{S})(|\text{órb}_\sigma(\{m\})| = \omega) \wedge \pi \in \langle \mathcal{S} \rangle\}.\end{aligned}$$

Definición

- Si $\mathcal{S} \subseteq S_\omega$ y $X \subseteq \omega$, definiremos

$$\begin{aligned}\operatorname{órb}_{\mathcal{S}}(X) &:= \left\{ \left(\prod_{i=1}^{n} \pi_i^{j_i} \right)(x) \middle| n < \omega \wedge x \in X \wedge \pi_i \in \mathcal{S} \wedge j_i \in \{-1,1\} \right\} \\ &= \{\pi(x) | x \in X \wedge \pi \in \langle \mathcal{S} \rangle\} = \bigcup_{\pi \in \langle S \rangle} \bigcup_{x \in X} \operatorname{órb}_\pi(\{x\}).\end{aligned}$$

- Para $\mathcal{S} \subseteq S_\omega$, definiremos

$$\begin{aligned}I^*(\mathcal{S}) &:= \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}} \bigcup_{m \in I(\sigma)} \operatorname{órb}_{\mathcal{S}}(\{m\}) \\ &= \{\pi(m) | (\exists \sigma \in \mathcal{S})(|\operatorname{órb}_\sigma(\{m\})| = \omega) \wedge \pi \in \langle \mathcal{S} \rangle\}.\end{aligned}$$

Definición

- Si $\mathcal{S} \subseteq S_\omega$ y $X \subseteq \omega$, definiremos

$$\begin{aligned} \text{órb}_{\mathcal{S}}(X) &:= \left\{ \left(\prod_{i=1}^{n} \pi_i^{j_i} \right)(x) \middle| n < \omega \wedge x \in X \wedge \pi_i \in \mathcal{S} \wedge j_i \in \{-1, 1\} \right\} \\ &= \{\pi(x) | x \in X \wedge \pi \in \langle \mathcal{S} \rangle\} = \bigcup_{\pi \in \langle S \rangle} \bigcup_{x \in X} \text{órb}_\pi(\{x\}). \end{aligned}$$

- Para $\mathcal{S} \subseteq S_\omega$, definiremos

$$\begin{aligned} I^*(\mathcal{S}) &:= \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}} \bigcup_{m \in I(\sigma)} \text{órb}_{\mathcal{S}}(\{m\}) \\ &= \{\pi(m) | (\exists \sigma \in \mathcal{S})(|\text{órb}_\sigma(\{m\})| = \omega) \wedge \pi \in \langle \mathcal{S} \rangle\}. \end{aligned}$$

$$\mathbb{P} := \{p = (h^p, \mathcal{S}^p) \big| h^p \text{ es una involución finita} \wedge \mathcal{S}^p \in [H]^{<\omega}\},$$

en donde consideraremos que $p \leq q$ si y sólo si se cumplen las siguientes cuatro condiciones:

1. $h^p \supseteq h^q$,
2. $\mathcal{S}^p \supseteq \mathcal{S}^q$,
3. $\mathrm{dom}(h^p \setminus h^q) \cap I^*(\mathcal{S}^q) = \varnothing$, y
4. siempre que $j \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma \in \mathcal{S}^q$, se cumple que $\sigma(j) \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma(h^p(j)) = h^p(\sigma(j))$.

Sea $\{h_n \big| n < \omega\}$ es el conjunto de todas las involuciones finitas, y para cada una de ellas, $G_{h_n} := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists \mathcal{S} \in [H]^{<\omega})((h, \mathcal{S}) \leq p)\}$. Entonces, $\mathbb{P} = \bigcup_{n<\omega} G_{h_n}$, por lo tanto $\mathbb{P}$ es σ-centrado.

$$\mathbb{P} := \{p = (h^p, \mathcal{S}^p) \big| h^p \text{ es una involución finita} \wedge \mathcal{S}^p \in [H]^{<\omega}\},$$

en donde consideraremos que $p \leq q$ si y sólo si se cumplen las siguientes cuatro condiciones:

1. $h^p \supseteq h^q$,
2. $\mathcal{S}^p \supseteq \mathcal{S}^q$,
3. $\mathrm{dom}(h^p \setminus h^q) \cap I^*(\mathcal{S}^q) = \varnothing$, y
4. siempre que $j \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma \in \mathcal{S}^q$, se cumple que $\sigma(j) \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma(h^p(j)) = h^p(\sigma(j))$.

Sea $\{h_n \big| n < \omega\}$ es el conjunto de todas las involuciones finitas, y para cada una de ellas, $G_{h_n} := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists \mathcal{S} \in [H]^{<\omega})((h, \mathcal{S}) \leq p)\}$. Entonces, $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{n<\omega} G_{h_n}$, por lo tanto $\mathbb{P}$ es σ-centrado.

$$\mathbb{P} := \{p = (h^p, \mathcal{S}^p) \big| h^p \text{ es una involución finita} \wedge \mathcal{S}^p \in [H]^{<\omega}\},$$

en donde consideraremos que $p \leq q$ si y sólo si se cumplen las siguientes cuatro condiciones:

1. $h^p \supseteq h^q$,
2. $\mathcal{S}^p \supseteq \mathcal{S}^q$,
3. $\mathrm{dom}(h^p \setminus h^q) \cap I^*(\mathcal{S}^q) = \varnothing$, y
4. siempre que $j \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma \in \mathcal{S}^q$, se cumple que $\sigma(j) \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma(h^p(j)) = h^p(\sigma(j))$.

Sea $\{h_n \big| n < \omega\}$ es el conjunto de todas las involuciones finitas, y para cada una de ellas, $G_{h_n} := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists \mathcal{S} \in [H]^{<\omega})((h, \mathcal{S}) \leq p)\}$. Entonces, $\mathbb{P} = \bigcup_{n<\omega} G_{h_n}$, por lo tanto $\mathbb{P}$ es σ-centrado.

$$\mathbb{P} := \{p = (h^p, \mathcal{S}^p) \big| h^p \text{ es una involución finita} \wedge \mathcal{S}^p \in [H]^{<\omega}\},$$

en donde consideraremos que $p \leq q$ si y sólo si se cumplen las siguientes cuatro condiciones:

1. $h^p \supseteq h^q$,
2. $\mathcal{S}^p \supseteq \mathcal{S}^q$,
3. $\mathrm{dom}(h^p \setminus h^q) \cap I^*(\mathcal{S}^q) = \varnothing$, y
4. siempre que $j \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma \in \mathcal{S}^q$, se cumple que $\sigma(j) \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma(h^p(j)) = h^p(\sigma(j))$.

Sea $\{h_n \big| n < \omega\}$ es el conjunto de todas las involuciones finitas, y para cada una de ellas, $G_{h_n} := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists \mathcal{S} \in [H]^{<\omega})((h, \mathcal{S}) \leq p)\}$. Entonces, $\mathbb{P} = \bigcup_{n<\omega} G_{h_n}$, por lo tanto $\mathbb{P}$ es σ-centrado.

$$\mathbb{P} := \{p = (h^p, \mathcal{S}^p) \big| h^p \text{ es una involución finita} \wedge \mathcal{S}^p \in [H]^{<\omega}\},$$

en donde consideraremos que $p \leq q$ si y sólo si se cumplen las siguientes cuatro condiciones:

1. $h^p \supseteq h^q$,
2. $\mathcal{S}^p \supseteq \mathcal{S}^q$,
3. $\mathrm{dom}(h^p \setminus h^q) \cap I^*(\mathcal{S}^q) = \varnothing$, y
4. siempre que $j \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma \in \mathcal{S}^q$, se cumple que $\sigma(j) \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma(h^p(j)) = h^p(\sigma(j))$.

Sea $\{h_n \big| n < \omega\}$ es el conjunto de todas las involuciones finitas, y para cada una de ellas, $G_{h_n} := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists \mathcal{S} \in [H]^{<\omega})((h, \mathcal{S}) \leq p)\}$. Entonces, $\mathbb{P} = \bigcup_{n<\omega} G_{h_n}$, por lo tanto $\mathbb{P}$ es σ-centrado.

$$\mathbb{P} := \{p = (h^p, \mathcal{S}^p) \big| h^p \text{ es una involución finita} \wedge \mathcal{S}^p \in [H]^{<\omega}\},$$

en donde consideraremos que $p \leq q$ si y sólo si se cumplen las siguientes cuatro condiciones:

1. $h^p \supseteq h^q$,
2. $\mathcal{S}^p \supseteq \mathcal{S}^q$,
3. $\mathrm{dom}(h^p \setminus h^q) \cap I^*(\mathcal{S}^q) = \varnothing$, y
4. siempre que $j \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma \in \mathcal{S}^q$, se cumple que $\sigma(j) \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma(h^p(j)) = h^p(\sigma(j))$.

Sea $\{h_n \big| n < \omega\}$ es el conjunto de todas las involuciones finitas, y para cada una de ellas, $G_{h_n} := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists \mathcal{S} \in [H]^{<\omega})((h, \mathcal{S}) \leq p)\}$. Entonces, $\mathbb{P} = \bigcup_{n<\omega} G_{h_n}$, por lo tanto $\mathbb{P}$ es σ-centrado.

$$\mathbb{P} := \{p = (h^p, \mathcal{S}^p) \big| h^p \text{ es una involución finita} \wedge \mathcal{S}^p \in [H]^{<\omega}\},$$

en donde consideraremos que $p \leq q$ si y sólo si se cumplen las siguientes cuatro condiciones:

1. $h^p \supseteq h^q$,
2. $\mathcal{S}^p \supseteq \mathcal{S}^q$,
3. $\mathrm{dom}(h^p \setminus h^q) \cap I^*(\mathcal{S}^q) = \varnothing$, y
4. siempre que $j \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma \in \mathcal{S}^q$, se cumple que $\sigma(j) \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma(h^p(j)) = h^p(\sigma(j))$.

Sea $\{h_n \big| n < \omega\}$ es el conjunto de todas las involuciones finitas, y para cada una de ellas, $G_{h_n} := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists \mathcal{S} \in [H]^{<\omega})((h, \mathcal{S}) \leq p)\}$. Entonces, $\mathbb{P} = \bigcup_{n<\omega} G_{h_n}$, por lo tanto $\mathbb{P}$ es σ-centrado.

$$\mathbb{P} := \{p = (h^p, \mathcal{S}^p) \big| h^p \text{ es una involución finita} \wedge \mathcal{S}^p \in [H]^{<\omega}\},$$

en donde consideraremos que $p \leq q$ si y sólo si se cumplen las siguientes cuatro condiciones:

1. $h^p \supseteq h^q$,
2. $\mathcal{S}^p \supseteq \mathcal{S}^q$,
3. $\mathrm{dom}(h^p \setminus h^q) \cap I^*(\mathcal{S}^q) = \varnothing$, y
4. siempre que $j \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma \in \mathcal{S}^q$, se cumple que $\sigma(j) \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma(h^p(j)) = h^p(\sigma(j))$.

Sea $\{h_n \big| n < \omega\}$ es el conjunto de todas las involuciones finitas, y para cada una de ellas, $G_{h_n} := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists \mathcal{S} \in [H]^{<\omega})((h, \mathcal{S}) \leq p)\}$. Entonces, $\mathbb{P} = \bigcup_{n<\omega} G_{h_n}$, por lo tanto $\mathbb{P}$ es σ-centrado.

$$\mathbb{P} := \{p = (h^p, \mathcal{S}^p) \big| h^p \text{ es una involución finita} \wedge \mathcal{S}^p \in [H]^{<\omega}\},$$

en donde consideraremos que $p \leq q$ si y sólo si se cumplen las siguientes cuatro condiciones:

1. $h^p \supseteq h^q$,
2. $\mathcal{S}^p \supseteq \mathcal{S}^q$,
3. $\mathrm{dom}(h^p \setminus h^q) \cap I^*(\mathcal{S}^q) = \varnothing$, y
4. siempre que $j \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma \in \mathcal{S}^q$, se cumple que $\sigma(j) \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma(h^p(j)) = h^p(\sigma(j))$.

Sea $\{h_n \big| n < \omega\}$ es el conjunto de todas las involuciones finitas, y para cada una de ellas, $G_{h_n} := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists \mathcal{S} \in [H]^{<\omega})((h, \mathcal{S}) \leq p)\}$. Entonces, $\mathbb{P} = \bigcup_{n<\omega} G_{h_n}$, por lo tanto $\mathbb{P}$ es σ-centrado.

Para cada $\pi \in S_\omega$, el conjunto $D_\pi := \{p \in \mathbb{P} \big| \pi \in \mathcal{S}^p\}$ es denso. Y para $n < \omega$, $E_n := \{p \in \mathbb{P} \big| n \in \mathrm{dom}(h^p) \cup I^*(\mathcal{S}^p)\}$ también es denso. Para $\pi \in H$, $k < \omega$, los conjuntos $D_{\pi,k} := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists j \geq k)(h^p(j) \neq \pi(k))\}$ son densos en $\mathbb{P}$. Dado que $|H| < \mathfrak{p} = \mathfrak{m}(\sigma - \text{centrado})$, sea G un filtro que intersecta a todos estos densos, y $\pi_G : \omega \longrightarrow \omega$ dado por

$$\pi_G(j) = \begin{cases} h^p(j); \ (\exists p \in G)(j \in \mathrm{dom}(h^p)) \\ j; \ \text{otro caso.} \end{cases}$$

$\pi_G \mathbb{F}$ conmuta con cada elemento $\pi\mathbb{F} \in H/\mathbb{F}$, pero debe ser distinto de cada uno de estos.

Teorema (Shelah-Steprāns)

Sea $H/\mathbb{F} \leq S_\omega/\mathbb{F}$ un subgrupo abeliano maximal no numerable. Entonces, $|H| \geq \mathfrak{p}$ (es decir, se cumple que $A([\omega]^{<\omega}) \geq \mathfrak{p}$.

Para cada $\pi \in S_\omega$, el conjunto $D_\pi := \{p \in \mathbb{P} \big| \pi \in \mathcal{S}^p\}$ es denso. Y para $n < \omega$, $E_n := \{p \in \mathbb{P} \big| n \in \mathrm{dom}(h^p) \cup I^*(\mathcal{S}^p)\}$ también es denso. Para $\pi \in H$, $k < \omega$, los conjuntos $D_{\pi,k} := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists j \geq k)(h^p(j) \neq \pi(k))\}$ son densos en $\mathbb{P}$. Dado que $|H| < \mathfrak{p} = \mathfrak{m}(\sigma - \text{centrado})$, sea G un filtro que intersecta a todos estos densos, y $\pi_G : \omega \longrightarrow \omega$ dado por

$$\pi_G(j) = \begin{cases} h^p(j); & (\exists p \in G)(j \in \mathrm{dom}(h^p)) \\ j; & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$\pi_G \mathbb{F}$ conmuta con cada elemento $\pi\mathbb{F} \in H/\mathbb{F}$, pero debe ser distinto de cada uno de estos.

Teorema (Shelah-Steprāns)

Sea $H/\mathbb{F} \leq S_\omega/\mathbb{F}$ un subgrupo abeliano maximal no numerable. Entonces, $|H| \geq \mathfrak{p}$ (es decir, se cumple que $A([\omega]^{<\omega}) \geq \mathfrak{p}$.

Para cada $\pi \in S_\omega$, el conjunto $D_\pi := \{p \in \mathbb{P} \big| \pi \in \mathcal{S}^p\}$ es denso. Y para $n < \omega$, $E_n := \{p \in \mathbb{P} \big| n \in \mathrm{dom}(h^p) \cup I^*(\mathcal{S}^p)\}$ también es denso. Para $\pi \in H$, $k < \omega$, los conjuntos $D_{\pi,k} := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists j \geq k)(h^p(j) \neq \pi(k))\}$ son densos en $\mathbb{P}$.

Dado que $|H| < \mathfrak{p} = \mathfrak{m}(\sigma - \mathrm{centrado})$, sea G un filtro que intersecta a todos estos densos, y $\pi_G : \omega \longrightarrow \omega$ dado por

$$\pi_G(j) = \begin{cases} h^p(j); & (\exists p \in G)(j \in \mathrm{dom}(h^p)) \\ j; & \mathrm{otro\ caso.} \end{cases}$$

$\pi_G\mathbb{F}$ conmuta con cada elemento $\pi\mathbb{F} \in H/\mathbb{F}$, pero debe ser distinto de cada uno de estos.

Teorema (Shelah-Steprāns)

Sea $H/\mathbb{F} \leq S_\omega/\mathbb{F}$ un subgrupo abeliano maximal no numerable. Entonces, $|H| \geq \mathfrak{p}$ (es decir, se cumple que $A([\omega]^{<\omega}) \geq \mathfrak{p}$.

Para cada $\pi \in S_\omega$, el conjunto $D_\pi := \{p \in \mathbb{P} \big| \pi \in \mathcal{S}^p\}$ es denso. Y para $n < \omega$, $E_n := \{p \in \mathbb{P} \big| n \in \mathrm{dom}(h^p) \cup I^*(\mathcal{S}^p)\}$ también es denso. Para $\pi \in H$, $k < \omega$, los conjuntos $D_{\pi,k} := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists j \geq k)(h^p(j) \neq \pi(k))\}$ son densos en $\mathbb{P}$. Dado que $|H| < \mathfrak{p} = \mathfrak{m}(\sigma - \mathrm{centrado})$, sea G un filtro que intersecta a todos estos densos, y $\pi_G : \omega \longrightarrow \omega$ dado por

$$\pi_G(j) = \begin{cases} h^p(j); & (\exists p \in G)(j \in \mathrm{dom}(h^p)) \\ j; & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$\pi_G\mathbb{F}$ conmuta con cada elemento $\pi\mathbb{F} \in H/\mathbb{F}$, pero debe ser distinto de cada uno de estos.

Teorema (Shelah-Steprāns)

Sea $H/\mathbb{F} \leq S_\omega/\mathbb{F}$ un subgrupo abeliano maximal no numerable. Entonces, $|H| \geq \mathfrak{p}$ (es decir, se cumple que $A([\omega]^{<\omega}) \geq \mathfrak{p}$.

Para cada $\pi \in S_\omega$, el conjunto $D_\pi := \{p \in \mathbb{P} \big| \pi \in \mathcal{S}^p\}$ es denso. Y para $n < \omega$, $E_n := \{p \in \mathbb{P} \big| n \in \mathrm{dom}(h^p) \cup I^*(\mathcal{S}^p)\}$ también es denso. Para $\pi \in H$, $k < \omega$, los conjuntos $D_{\pi,k} := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists j \geq k)(h^p(j) \neq \pi(k))\}$ son densos en $\mathbb{P}$. Dado que $|H| < \mathfrak{p} = \mathfrak{m}(\sigma - \text{centrado})$, sea G un filtro que intersecta a todos estos densos, y $\pi_G : \omega \longrightarrow \omega$ dado por

$$\pi_G(j) = \begin{cases} h^p(j); & (\exists p \in G)(j \in \mathrm{dom}(h^p)) \\ j; & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$\pi_G\mathbb{F}$ conmuta con cada elemento $\pi\mathbb{F} \in H/\mathbb{F}$, pero debe ser distinto de cada uno de estos.

Teorema (Shelah-Steprāns)

Sea $H/\mathbb{F} \leq S_\omega/\mathbb{F}$ un subgrupo abeliano maximal no numerable. Entonces, $|H| \geq \mathfrak{p}$ (es decir, se cumple que $A([\omega]^{<\omega}) \geq \mathfrak{p}$.

Para cada $\pi \in S_\omega$, el conjunto $D_\pi := \{p \in \mathbb{P} \big| \pi \in \mathcal{S}^p\}$ es denso. Y para $n < \omega$, $E_n := \{p \in \mathbb{P} \big| n \in \mathrm{dom}(h^p) \cup I^*(\mathcal{S}^p)\}$ también es denso. Para $\pi \in H$, $k < \omega$, los conjuntos $D_{\pi,k} := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists j \geq k)(h^p(j) \neq \pi(k))\}$ son densos en $\mathbb{P}$. Dado que $|H| < \mathfrak{p} = \mathfrak{m}(\sigma - \text{centrado})$, sea G un filtro que intersecta a todos estos densos, y $\pi_G : \omega \longrightarrow \omega$ dado por

$$\pi_G(j) = \begin{cases} h^p(j); & (\exists p \in G)(j \in \mathrm{dom}(h^p)) \\ j; & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$\pi_G \mathbb{F}$ conmuta con cada elemento $\pi\mathbb{F} \in H/\mathbb{F}$, pero debe ser distinto de cada uno de estos.

Teorema (Shelah-Steprāns)

Sea $H/\mathbb{F} \leq S_\omega/\mathbb{F}$ un subgrupo abeliano maximal no numerable. Entonces, $|H| \geq \mathfrak{p}$ (es decir, se cumple que $A([\omega]^{<\omega}) \geq \mathfrak{p}$.

Para cada $\pi \in S_\omega$, el conjunto $D_\pi := \{p \in \mathbb{P} \big| \pi \in \mathcal{S}^p\}$ es denso. Y para $n < \omega$, $E_n := \{p \in \mathbb{P} \big| n \in \mathrm{dom}(h^p) \cup I^*(\mathcal{S}^p)\}$ también es denso. Para $\pi \in H$, $k < \omega$, los conjuntos $D_{\pi,k} := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists j \geq k)(h^p(j) \neq \pi(k))\}$ son densos en $\mathbb{P}$. Dado que $|H| < \mathfrak{p} = \mathfrak{m}(\sigma - \text{centrado})$, sea G un filtro que intersecta a todos estos densos, y $\pi_G : \omega \longrightarrow \omega$ dado por

$$\pi_G(j) = \begin{cases} h^p(j); & (\exists p \in G)(j \in \mathrm{dom}(h^p)) \\ j; & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$\pi_G\mathbb{F}$ conmuta con cada elemento $\pi\mathbb{F} \in H/\mathbb{F}$, pero debe ser distinto de cada uno de estos.

Teorema (Shelah-Steprāns)

Sea $H/\mathbb{F} \leq S_\omega/\mathbb{F}$ un subgrupo abeliano maximal no numerable. Entonces, $|H| \geq \mathfrak{p}$ (es decir, se cumple que $A([\omega]^{<\omega}) \geq \mathfrak{p}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{c} & \\
\mathfrak{a} \arrow[ur] & \mathfrak{d} \arrow[u] & \\
 & & \mathrm{cf}(S_\omega) \arrow[ul] \\
A([\omega]^{<\omega}) \arrow[uu] & \mathfrak{b} \arrow[uul] \arrow[uu] & \\
 & & \mathfrak{g} \arrow[uu] \\
 & \mathfrak{p} \arrow[uul] \arrow[uu] \arrow[ur] & \\
 & \mathfrak{m} \arrow[u] & \\
 & \omega_1 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

- Brendle, Jörg y Losada, Maria *The cofinality of the infinite symmetric group and groupwise density*. The Journal of Symbolic Logic vol. 68, pp. 1354-1361, 2003.
- Eklof, Paul C. *Whitehead's Problem is Undecidable*. American Mathematical Monthly vol. 83, pp. 775-788, 1976.
- Kunen, Kenneth *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics (102), Elsevier, 2006.
- Shelah, Saharon *Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions*. Israel Journal of Mathematics vol. 18, pp. 243-256, 1974.
- Shelah, Saharon y Steprāns, Juris *Possible cardinalities of maximal abelian subgroups of quotients of permutation groups of the integers*. Fundamenta Mathematicae vol. 196, pp. 197-235, 2007.

- Brendle, Jörg y Losada, Maria *The cofinality of the infinite symmetric group and groupwise density*. The Journal of Symbolic Logic vol. 68, pp. 1354-1361, 2003.
- Eklof, Paul C. *Whitehead's Problem is Undecidable*. American Mathematical Monthly vol. 83, pp. 775-788, 1976.
- Kunen, Kenneth *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics (102), Elsevier, 2006.
- Shelah, Saharon *Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions*. Israel Journal of Mathematics vol. 18, pp. 243-256, 1974.
- Shelah, Saharon y Steprāns, Juris *Possible cardinalities of maximal abelian subgroups of quotients of permutation groups of the integers*. Fundamenta Mathematicae vol. 196, pp. 197-235, 2007.

- Brendle, Jörg y Losada, Maria *The cofinality of the infinite symmetric group and groupwise density*. The Journal of Symbolic Logic vol. 68, pp. 1354-1361, 2003.
- Eklof, Paul C. *Whitehead's Problem is Undecidable*. American Mathematical Monthly vol. 83, pp. 775-788, 1976.
- Kunen, Kenneth *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics (102), Elsevier, 2006.
- Shelah, Saharon *Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions*. Israel Journal of Mathematics vol. 18, pp. 243-256, 1974.
- Shelah, Saharon y Steprāns, Juris *Possible cardinalities of maximal abelian subgroups of quotients of permutation groups of the integers*. Fundamenta Mathematicae vol. 196, pp. 197-235, 2007.

- Brendle, Jörg y Losada, Maria *The cofinality of the infinite symmetric group and groupwise density*. The Journal of Symbolic Logic vol. 68, pp. 1354-1361, 2003.
- Eklof, Paul C. *Whitehead's Problem is Undecidable*. American Mathematical Monthly vol. 83, pp. 775-788, 1976.
- Kunen, Kenneth *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics (102), Elsevier, 2006.
- Shelah, Saharon *Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions*. Israel Journal of Mathematics vol. 18, pp. 243-256, 1974.
- Shelah, Saharon y Steprāns, Juris *Possible cardinalities of maximal abelian subgroups of quotients of permutation groups of the integers*. Fundamenta Mathematicae vol. 196, pp. 197-235, 2007.

- Brendle, Jörg y Losada, Maria *The cofinality of the infinite symmetric group and groupwise density*. The Journal of Symbolic Logic vol. 68, pp. 1354-1361, 2003.
- Eklof, Paul C. *Whitehead's Problem is Undecidable*. American Mathematical Monthly vol. 83, pp. 775-788, 1976.
- Kunen, Kenneth *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics (102), Elsevier, 2006.
- Shelah, Saharon *Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions*. Israel Journal of Mathematics vol. 18, pp. 243-256, 1974.
- Shelah, Saharon y Steprāns, Juris *Possible cardinalities of maximal abelian subgroups of quotients of permutation groups of the integers*. Fundamenta Mathematicae vol. 196, pp. 197-235, 2007.