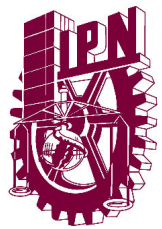
Pruebas de Independencia: ¿Qué son y para qué sirven?

David Fernández Bretón

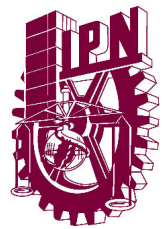
dfernandezb@ipn.mx
https://dfernandezb.web.app/espanol.html

Seminario del Departamento de Matemáticas
ESFM, IPN
10 de noviembre de 2021



Instituto Politécnico Nacional

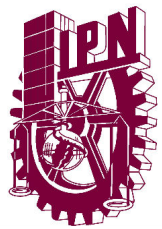
En lógica, un **lenguaje** tiene como ingredientes:



Instituto Politécnico Nacional

En lógica, un **lenguaje** tiene como ingredientes:

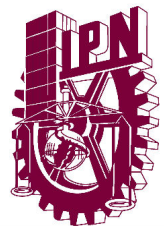
- variables, $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots, \alpha, \beta, \ldots,$



Instituto Politécnico Nacional

En lógica, un **lenguaje** tiene como ingredientes:

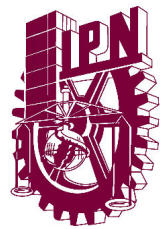
- variables, $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots, \alpha, \beta, \ldots,$
- conectivas lógicas $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \iff$,



Instituto Politécnico Nacional

En lógica, un **lenguaje** tiene como ingredientes:

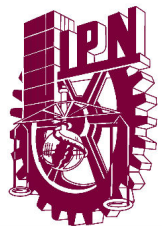
- variables, $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots, \alpha, \beta, \ldots,$
- conectivas lógicas $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \iff$,
- cuantificadores $\forall, \exists$,



Instituto Politécnico Nacional

En lógica, un **lenguaje** tiene como ingredientes:

- variables, $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots, \alpha, \beta, \ldots,$
- conectivas lógicas $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \iff$,
- cuantificadores $\forall, \exists$,
- y el símbolo de igualdad $=$,



Instituto Politécnico Nacional

En lógica, un **lenguaje** tiene como ingredientes:

- variables, $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots, \alpha, \beta, \ldots,$
- conectivas lógicas $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \iff$,
- cuantificadores $\forall, \exists$,
- y el símbolo de igualdad $=$,
- (y paréntesis).

Instituto Politécnico Nacional

En lógica, un **lenguaje** tiene como ingredientes:

- variables, $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots, \alpha, \beta, \ldots,$
- conectivas lógicas $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \iff$,
- cuantificadores $\forall, \exists$,
- y el símbolo de igualdad $=$,
- (y paréntesis).

El **lenguaje de la teoría de grupos** incluye además

Instituto Politécnico Nacional

En lógica, un **lenguaje** tiene como ingredientes:

- variables, $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots, \alpha, \beta, \ldots,$
- conectivas lógicas $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \iff$,
- cuantificadores $\forall, \exists$,
- y el símbolo de igualdad $=$,
- (y paréntesis).

El **lenguaje de la teoría de grupos** incluye además

- un *símbolo de constante* e,

Instituto Politécnico Nacional

En lógica, un **lenguaje** tiene como ingredientes:

- variables, $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots, \alpha, \beta, \ldots,$
- conectivas lógicas $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \iff$,
- cuantificadores $\forall, \exists$,
- y el símbolo de igualdad $=$,
- (y paréntesis).

El **lenguaje de la teoría de grupos** incluye además

- un *símbolo de constante* e,
- y un *símbolo de relación binaria* $*$.

Instituto Politécnico Nacional

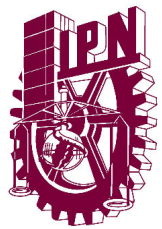
En lógica, un **lenguaje** tiene como ingredientes:

- variables, $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots, \alpha, \beta, \ldots,$
- conectivas lógicas $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \iff$,
- cuantificadores $\forall, \exists$,
- y el símbolo de igualdad $=$,
- (y paréntesis).

El **lenguaje de la teoría de grupos** incluye además

- un *símbolo de constante* e,
- y un *símbolo de relación binaria* $*$.

Los **axiomas de la teoría de grupos** son los siguientes:



Instituto Politécnico Nacional

En lógica, un **lenguaje** tiene como ingredientes:

- variables, $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots, \alpha, \beta, \ldots,$
- conectivas lógicas $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \iff$,
- cuantificadores $\forall, \exists$,
- y el símbolo de igualdad $=$,
- (y paréntesis).

El **lenguaje de la teoría de grupos** incluye además

- un *símbolo de constante* e,
- y un *símbolo de relación binaria* $*$.

Los **axiomas de la teoría de grupos** son los siguientes:

1. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x * y) * z = x * (y * z))$,

Instituto Politécnico Nacional

En lógica, un **lenguaje** tiene como ingredientes:

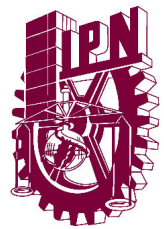
- variables, $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots, \alpha, \beta, \ldots,$
- conectivas lógicas $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \iff$,
- cuantificadores $\forall, \exists$,
- y el símbolo de igualdad $=$,
- (y paréntesis).

El **lenguaje de la teoría de grupos** incluye además

- un *símbolo de constante* e,
- y un *símbolo de relación binaria* $*$.

Los **axiomas de la teoría de grupos** son los siguientes:

1. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x * y) * z = x * (y * z))$,
2. $(\forall x)(x * e = x \wedge e * x = x)$,



Instituto Politécnico Nacional

En lógica, un **lenguaje** tiene como ingredientes:

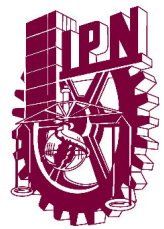
- variables, $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots, \alpha, \beta, \ldots,$
- conectivas lógicas $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \iff$,
- cuantificadores $\forall, \exists$,
- y el símbolo de igualdad $=$,
- (y paréntesis).

El **lenguaje de la teoría de grupos** incluye además

- un *símbolo de constante* e,
- y un *símbolo de relación binaria* $*$.

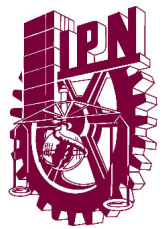
Los **axiomas de la teoría de grupos** son los siguientes:

1. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x * y) * z = x * (y * z))$,
2. $(\forall x)(x * e = x \wedge e * x = x)$,
3. $(\forall x)(\exists y)(y * x = e \wedge x * y = e)$.



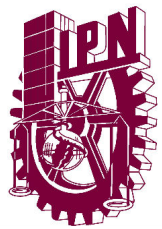
Instituto Politécnico Nacional

Una **demostración** de una fórmula φ a partir de los axiomas Σ



Instituto Politécnico Nacional

Una **demostración** de una fórmula φ a partir de los axiomas Σ es una sucesión finita de fórmulas,

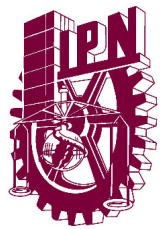


Instituto Politécnico Nacional

Una **demostración** de una fórmula φ a partir de los axiomas Σ es una sucesión finita de fórmulas, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$,

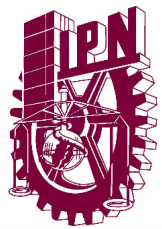
Instituto Politécnico Nacional

Una **demostración** de una fórmula φ a partir de los axiomas Σ es una sucesión finita de fórmulas, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, tal que φ_n es φ,



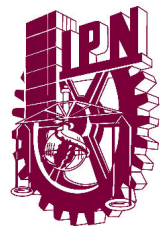
Instituto Politécnico Nacional

Una **demostración** de una fórmula φ a partir de los axiomas Σ es una sucesión finita de fórmulas, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, tal que φ_n es φ, y cada φ_i es o bien un axioma, o bien *se sigue lógicamente* de algunas φ_j $(j < i)$



Instituto Politécnico Nacional

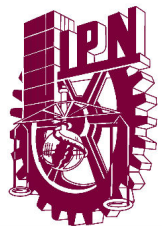
Una **demostración** de una fórmula φ a partir de los axiomas Σ es una sucesión finita de fórmulas, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, tal que φ_n es φ, y cada φ_i es o bien un axioma, o bien *se sigue lógicamente* de algunas φ_j $(j < i)$ (reglas de inferencia, puramente sintácticas, completamente formalizadas).



Instituto Politécnico Nacional

Una **demostración** de una fórmula φ a partir de los axiomas Σ es una sucesión finita de fórmulas, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, tal que φ_n es φ, y cada φ_i es o bien un axioma, o bien *se sigue lógicamente* de algunas φ_j $(j < i)$ (reglas de inferencia, puramente sintácticas, completamente formalizadas).

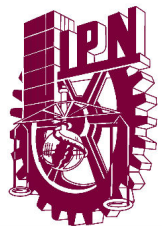
Un **teorema** de Σ



Instituto Politécnico Nacional

Una **demostración** de una fórmula φ a partir de los axiomas Σ es una sucesión finita de fórmulas, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, tal que φ_n es φ, y cada φ_i es o bien un axioma, o bien *se sigue lógicamente* de algunas φ_j $(j < i)$ (reglas de inferencia, puramente sintácticas, completamente formalizadas).

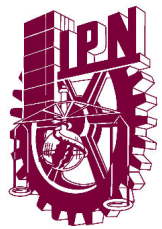
Un **teorema** de Σ es una fórmula φ para la cual existe una demostración a partir de los axiomas Σ.



Instituto Politécnico Nacional

Una **demostración** de una fórmula φ a partir de los axiomas Σ es una sucesión finita de fórmulas, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, tal que φ_n es φ, y cada φ_i es o bien un axioma, o bien *se sigue lógicamente* de algunas φ_j $(j < i)$ (reglas de inferencia, puramente sintácticas, completamente formalizadas).

Un **teorema** de Σ es una fórmula φ para la cual existe una demostración a partir de los axiomas Σ. Se escribe $\Sigma \vdash \varphi$.

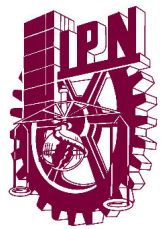


Instituto Politécnico Nacional

Una **demostración** de una fórmula φ a partir de los axiomas Σ es una sucesión finita de fórmulas, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, tal que φ_n es φ, y cada φ_i es o bien un axioma, o bien *se sigue lógicamente* de algunas φ_j $(j < i)$ (reglas de inferencia, puramente sintácticas, completamente formalizadas).

Un **teorema** de Σ es una fórmula φ para la cual existe una demostración a partir de los axiomas Σ. Se escribe $\Sigma \vdash \varphi$.

Por ejemplo:



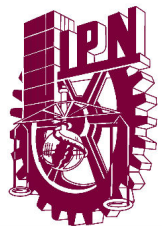
Instituto Politécnico Nacional

Una **demostración** de una fórmula φ a partir de los axiomas Σ es una sucesión finita de fórmulas, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, tal que φ_n es φ, y cada φ_i es o bien un axioma, o bien *se sigue lógicamente* de algunas φ_j $(j < i)$ (reglas de inferencia, puramente sintácticas, completamente formalizadas).

Un **teorema** de Σ es una fórmula φ para la cual existe una demostración a partir de los axiomas Σ. Se escribe $\Sigma \vdash \varphi$.

Por ejemplo:

La fórmula $(\forall z)((\exists x)(x * z = x) \Rightarrow z = e)$ es un teorema de los axiomas de la teoría de grupos



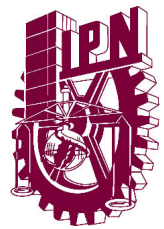
Instituto Politécnico Nacional

Una **demostración** de una fórmula φ a partir de los axiomas Σ es una sucesión finita de fórmulas, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, tal que φ_n es φ, y cada φ_i es o bien un axioma, o bien *se sigue lógicamente* de algunas φ_j $(j < i)$ (reglas de inferencia, puramente sintácticas, completamente formalizadas).

Un **teorema** de Σ es una fórmula φ para la cual existe una demostración a partir de los axiomas Σ. Se escribe $\Sigma \vdash \varphi$.

Por ejemplo:

La fórmula $(\forall z)((\exists x)(x * z = x) \Rightarrow z = e)$ es un teorema de los axiomas de la teoría de grupos (intuitivamente, se sigue de los axiomas de la teoría de grupos que el elemento identidad es único).



Instituto Politécnico Nacional

Ejemplo:

Instituto Politécnico Nacional

Ejemplo:

- Sea z arbitrario,

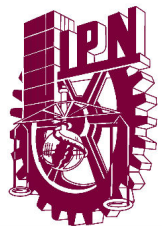
Instituto Politécnico Nacional

Ejemplo:

- Sea z arbitrario,
  - supongamos que $(\exists x)(x * z = x)$,

Ejemplo:

- Sea z arbitrario,
  - supongamos que $(\exists x)(x * z = x)$,
  - entonces $x * z = x$,



Instituto Politécnico Nacional

Ejemplo:

- Sea z arbitrario,
  - supongamos que $(\exists x)(x * z = x)$,
  - entonces $x * z = x$, (más adelante no podemos poner $(\forall x)$),

Instituto Politécnico Nacional

Ejemplo:

- Sea z arbitrario,
  - supongamos que $(\exists x)(x * z = x)$,
  - entonces $x * z = x$, (más adelante no podemos poner $(\forall x)$),
  - sea y tal que $y * x = e \wedge x * y = e$,

Instituto Politécnico Nacional

Ejemplo:

- Sea z arbitrario,
  - supongamos que $(\exists x)(x * z = x)$,
  - entonces $x * z = x$, (más adelante no podemos poner $(\forall x)$),
  - sea y tal que $y * x = e \wedge x * y = e$, (más adelante no podemos poner $(\forall y)$),

Instituto Politécnico Nacional

Ejemplo:

- Sea z arbitrario,
  - supongamos que $(\exists x)(x * z = x)$,
  - entonces $x * z = x$, (más adelante no podemos poner $(\forall x)$),
  - sea y tal que $y * x = e \wedge x * y = e$, (más adelante no podemos poner $(\forall y)$),
  - entonces $y * x = e$,

Instituto Politécnico Nacional

Ejemplo:

- Sea z arbitrario,
  - supongamos que $(\exists x)(x * z = x)$,
  - entonces $x * z = x$, (más adelante no podemos poner $(\forall x)$),
  - sea y tal que $y * x = e \wedge x * y = e$, (más adelante no podemos poner $(\forall y)$),
  - entonces $y * x = e$,
  - entonces $y * (x * z) = y * x$,

Instituto Politécnico Nacional

Ejemplo:

- Sea z arbitrario,
  - supongamos que $(\exists x)(x * z = x)$,
  - entonces $x * z = x$, (más adelante no podemos poner $(\forall x)$),
  - sea y tal que $y * x = e \wedge x * y = e$, (más adelante no podemos poner $(\forall y)$),
  - entonces $y * x = e$,
  - entonces $y * (x * z) = y * x$,
  - entonces $(y * x) * z = e$,

Instituto Politécnico Nacional

Ejemplo:

- Sea z arbitrario,
  - supongamos que $(\exists x)(x * z = x)$,
  - entonces $x * z = x$, (más adelante no podemos poner $(\forall x)$),
  - sea y tal que $y * x = e \wedge x * y = e$, (más adelante no podemos poner $(\forall y)$),
  - entonces $y * x = e$,
  - entonces $y * (x * z) = y * x$,
  - entonces $(y * x) * z = e$,
  - entonces $e * z = e$,

Instituto Politécnico Nacional

Ejemplo:

- Sea z arbitrario,
  - supongamos que $(\exists x)(x * z = x)$,
  - entonces $x * z = x$, (más adelante no podemos poner $(\forall x)$),
  - sea y tal que $y * x = e \wedge x * y = e$, (más adelante no podemos poner $(\forall y)$),
  - entonces $y * x = e$,
  - entonces $y * (x * z) = y * x$,
  - entonces $(y * x) * z = e$,
  - entonces $e * z = e$,
  - entonces $z = e$,

Instituto Politécnico Nacional

Ejemplo:

- Sea z arbitrario,
  - supongamos que $(\exists x)(x * z = x)$,
  - entonces $x * z = x$, (más adelante no podemos poner $(\forall x)$),
  - sea y tal que $y * x = e \wedge x * y = e$, (más adelante no podemos poner $(\forall y)$),
  - entonces $y * x = e$,
  - entonces $y * (x * z) = y * x$,
  - entonces $(y * x) * z = e$,
  - entonces $e * z = e$,
  - entonces $z = e$,
- por lo tanto, $(\exists x)(x * z = x) \Rightarrow z = e$,

Instituto Politécnico Nacional

Ejemplo:

- Sea z arbitrario,
  - supongamos que $(\exists x)(x * z = x)$,
  - entonces $x * z = x$, (más adelante no podemos poner $(\forall x)$),
  - sea y tal que $y * x = e \wedge x * y = e$, (más adelante no podemos poner $(\forall y)$),
  - entonces $y * x = e$,
  - entonces $y * (x * z) = y * x$,
  - entonces $(y * x) * z = e$,
  - entonces $e * z = e$,
  - entonces $z = e$,
- por lo tanto, $(\exists x)(x * z = x) \Rightarrow z = e$,
- por lo tanto, $(\forall z)((\exists x)(x * z = x) \Rightarrow z = e)$.

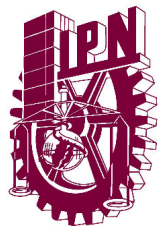
Instituto Politécnico Nacional

¿Qué pasa cuando $\Sigma \nvdash \varphi$?

Instituto Politécnico Nacional

¿Qué pasa cuando $\Sigma \nvdash \varphi$?

Para verificar tal cosa, tendríamos que encontrar un *modelo* que *satisfaga* los axiomas Σ pero no satisfaga φ.

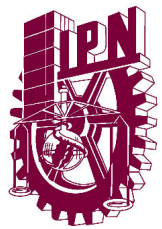


Instituto Politécnico Nacional

¿Qué pasa cuando $\Sigma \nvdash \varphi$?

Para verificar tal cosa, tendríamos que encontrar un *modelo* que *satisfaga* los axiomas Σ pero no satisfaga φ.

Por ejemplo:



Instituto Politécnico Nacional

¿Qué pasa cuando $\Sigma \nvdash \varphi$?

Para verificar tal cosa, tendríamos que encontrar un *modelo* que *satisfaga* los axiomas Σ pero no satisfaga φ.

Por ejemplo:

La fórmula $\varphi \equiv (\forall x)(\forall y)(x * y = y * x)$ no se puede demostrar desde los axiomas de teoría de grupos.

Instituto Politécnico Nacional

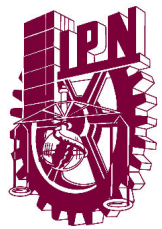
¿Qué pasa cuando $\Sigma \nvdash \varphi$?

Para verificar tal cosa, tendríamos que encontrar un *modelo* que *satisfaga* los axiomas Σ pero no satisfaga φ.

Por ejemplo:

La fórmula $\varphi \equiv (\forall x)(\forall y)(x * y = y * x)$ no se puede demostrar desde los axiomas de teoría de grupos.

Ya que (por ejemplo) $\left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \cdot\right)$ es un *modelo* de los axiomas de la teoría de grupos,



Instituto Politécnico Nacional

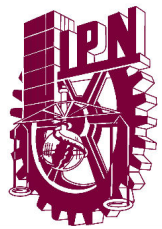
¿Qué pasa cuando $\Sigma \nvdash \varphi$?

Para verificar tal cosa, tendríamos que encontrar un *modelo* que *satisfaga* los axiomas Σ pero no satisfaga φ.

Por ejemplo:

La fórmula $\varphi \equiv (\forall x)(\forall y)(x * y = y * x)$ no se puede demostrar desde los axiomas de teoría de grupos.

Ya que (por ejemplo) $\left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \cdot\right)$ es un *modelo* de los axiomas de la teoría de grupos, pero este modelo **no** satisface φ.



Instituto Politécnico Nacional

¿Qué pasa cuando $\Sigma \nvdash \varphi$?

Para verificar tal cosa, tendríamos que encontrar un *modelo* que *satisfaga* los axiomas Σ pero no satisfaga φ.

Por ejemplo:

La fórmula $\varphi \equiv (\forall x)(\forall y)(x * y = y * x)$ no se puede demostrar desde los axiomas de teoría de grupos.

Ya que (por ejemplo) $\left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \cdot\right)$ es un *modelo* de los axiomas de la teoría de grupos, pero este modelo **no** satisface φ.

Teoría de grupos $\nvdash$ Conmutatividad.

Instituto Politécnico Nacional

¿Qué pasa cuando $\Sigma \nvdash \varphi$?

Para verificar tal cosa, tendríamos que encontrar un *modelo* que *satisfaga* los axiomas Σ pero no satisfaga φ.

Por ejemplo:

La fórmula $\varphi \equiv (\forall x)(\forall y)(x * y = y * x)$ no se puede demostrar desde los axiomas de teoría de grupos.

Ya que (por ejemplo) $\left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \cdot\right)$ es un *modelo* de los axiomas de la teoría de grupos, pero este modelo **no** satisface φ.

Teoría de grupos $\nvdash$ Conmutatividad.

(La conmutatividad es *independiente* de los axiomas de Teoría de Grupos.)

Instituto Politécnico Nacional

Por otra parte, pasa lo mismo con la negación de la conmutatividad.

Instituto Politécnico Nacional

Por otra parte, pasa lo mismo con la negación de la conmutatividad.

Ya que (por ejemplo) $(\mathbb{R}, 0, +)$ satisface los axiomas de la teoría de grupos,

Por otra parte, pasa lo mismo con la negación de la conmutatividad.

Ya que (por ejemplo) $(\mathbb{R}, 0, +)$ satisface los axiomas de la teoría de grupos, y también satisface $(\forall x)(\forall y)(x * y = y * x)$.

Instituto Politécnico Nacional

Por otra parte, pasa lo mismo con la negación de la conmutatividad.

Ya que (por ejemplo) $(\mathbb{R}, 0, +)$ satisface los axiomas de la teoría de grupos, y también satisface $(\forall x)(\forall y)(x * y = y * x)$.

Teoría de grupos $\nvdash \neg$(Conmutatividad).

Instituto Politécnico Nacional

Por otra parte, pasa lo mismo con la negación de la conmutatividad.

Ya que (por ejemplo) $(\mathbb{R}, 0, +)$ satisface los axiomas de la teoría de grupos, y también satisface $(\forall x)(\forall y)(x * y = y * x)$.

Teoría de grupos $\nvdash \neg$(Conmutatividad).

(La conmutatividad es *consistente* con los axiomas de Teoría de Grupos.)

Instituto Politécnico Nacional

Por otra parte, pasa lo mismo con la negación de la conmutatividad.

Ya que (por ejemplo) $(\mathbb{R}, 0, +)$ satisface los axiomas de la teoría de grupos, y también satisface $(\forall x)(\forall y)(x * y = y * x)$.

Teoría de grupos $\nvdash \neg$(Conmutatividad).

(La conmutatividad es *consistente* con los axiomas de Teoría de Grupos.)

Por lo tanto, la conmutatividad es *indecidible* desde los axiomas de la Teoría de Grupos

Instituto Politécnico Nacional

Por otra parte, pasa lo mismo con la negación de la conmutatividad.

Ya que (por ejemplo) $(\mathbb{R}, 0, +)$ satisface los axiomas de la teoría de grupos, y también satisface $(\forall x)(\forall y)(x * y = y * x)$.

Teoría de grupos $\nvdash \neg$(Conmutatividad).

(La conmutatividad es *consistente* con los axiomas de Teoría de Grupos.)

Por lo tanto, la conmutatividad es *indecidible* desde los axiomas de la Teoría de Grupos (ni ella ni su negación se puede demostrar).

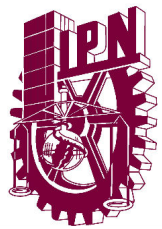
Instituto Politécnico Nacional

En matemáticas, básicamente cualquier estructura se define en términos de conjuntos:

Instituto Politécnico Nacional

En matemáticas, básicamente cualquier estructura se define en términos de conjuntos:

- Un grupo es un **conjunto** X equipado con una operación binaria $\cdot : X \times X \longrightarrow X$ tal que...



Instituto Politécnico Nacional

En matemáticas, básicamente cualquier estructura se define en términos de conjuntos:

- Un grupo es un **conjunto** X equipado con una operación binaria $\cdot : X \times X \longrightarrow X$ tal que...
- Un espacio métrico es un **conjunto** X equipado con una función $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ tal que...

Instituto Politécnico Nacional

En matemáticas, básicamente cualquier estructura se define en términos de conjuntos:

- Un grupo es un **conjunto** X equipado con una operación binaria $\cdot : X \times X \longrightarrow X$ tal que...
- Un espacio métrico es un **conjunto** X equipado con una función $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ tal que...
- Un espacio vectorial es un **conjunto** V equipado con una relación binaria $+ : V \times V \longrightarrow V$, y un campo k, y una acción de k^* en el conjunto V, tal que...

Instituto Politécnico Nacional

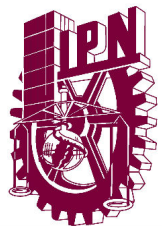
En matemáticas, básicamente cualquier estructura se define en términos de conjuntos:

- Un grupo es un **conjunto** X equipado con una operación binaria $\cdot : X \times X \longrightarrow X$ tal que...
- Un espacio métrico es un **conjunto** X equipado con una función $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ tal que...
- Un espacio vectorial es un **conjunto** V equipado con una relación binaria $+ : V \times V \longrightarrow V$, y un campo k, y una acción de k^* en el conjunto V, tal que...
- Un campo es un **conjunto** k equipado con operaciones binarias $+ : k \times k \longrightarrow k$ y $\cdot : k \times k \longrightarrow k$ tales que...

Instituto Politécnico Nacional

En matemáticas, básicamente cualquier estructura se define en términos de conjuntos:

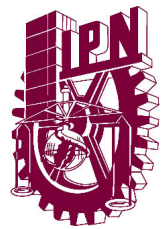
- Un grupo es un **conjunto** X equipado con una operación binaria $\cdot : X \times X \longrightarrow X$ tal que...
- Un espacio métrico es un **conjunto** X equipado con una función $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ tal que...
- Un espacio vectorial es un **conjunto** V equipado con una relación binaria $+ : V \times V \longrightarrow V$, y un campo k, y una acción de k^* en el conjunto V, tal que...
- Un campo es un **conjunto** k equipado con operaciones binarias $+ : k \times k \longrightarrow k$ y $\cdot : k \times k \longrightarrow k$ tales que...
- Una función $f : X \longrightarrow Y$ es un **subconjunto** $f \subseteq X \times Y$ tal que...



Instituto Politécnico Nacional

En matemáticas, básicamente cualquier estructura se define en términos de conjuntos:

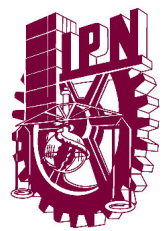
- Un grupo es un **conjunto** X equipado con una operación binaria $\cdot : X \times X \longrightarrow X$ tal que...
- Un espacio métrico es un **conjunto** X equipado con una función $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ tal que...
- Un espacio vectorial es un **conjunto** V equipado con una relación binaria $+ : V \times V \longrightarrow V$, y un campo k, y una acción de k^* en el conjunto V, tal que...
- Un campo es un **conjunto** k equipado con operaciones binarias $+ : k \times k \longrightarrow k$ y $\cdot : k \times k \longrightarrow k$ tales que...
- Una función $f : X \longrightarrow Y$ es un **subconjunto** $f \subseteq X \times Y$ tal que...
- Un par ordenado (x, y) es el **conjunto** $\{\{x\}, \{x, y\}\}$...



Instituto Politécnico Nacional

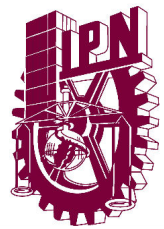
En matemáticas, básicamente cualquier estructura se define en términos de conjuntos:

- Un grupo es un **conjunto** X equipado con una operación binaria $\cdot : X \times X \longrightarrow X$ tal que...
- Un espacio métrico es un **conjunto** X equipado con una función $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ tal que...
- Un espacio vectorial es un **conjunto** V equipado con una relación binaria $+ : V \times V \longrightarrow V$, y un campo k, y una acción de k^* en el conjunto V, tal que...
- Un campo es un **conjunto** k equipado con operaciones binarias $+ : k \times k \longrightarrow k$ y $\cdot : k \times k \longrightarrow k$ tales que...
- Una función $f : X \longrightarrow Y$ es un **subconjunto** $f \subseteq X \times Y$ tal que...
- Un par ordenado (x, y) es el **conjunto** $\{\{x\}, \{x, y\}\}$...
- (También se pueden construir $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc., como conjuntos...)



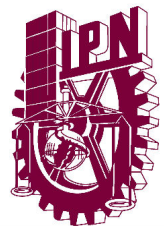
Instituto Politécnico Nacional

Moraleja:



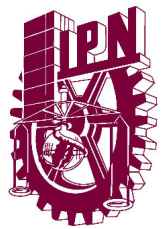
Instituto Politécnico Nacional

Moraleja: Cuando un matemático dice que φ es un **teorema**,



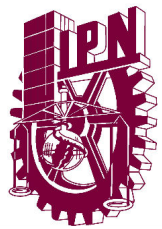
Instituto Politécnico Nacional

Moraleja: Cuando un matemático dice que φ es un **teorema**, implícitamente está diciendo que φ es un teorema desde los axiomas de la Teoría de Conjuntos.



Instituto Politécnico Nacional

Moraleja: Cuando un matemático dice que φ es un **teorema**, implícitamente está diciendo que φ es un teorema desde los axiomas de la Teoría de Conjuntos. (¡Aún cuando no sepa con exactitud cuáles son esos axiomas!)



Instituto Politécnico Nacional

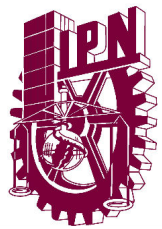
Moraleja: Cuando un matemático dice que φ es un **teorema**, implícitamente está diciendo que φ es un teorema desde los axiomas de la Teoría de Conjuntos. (¡Aún cuando no sepa con exactitud cuáles son esos axiomas!)

> *[...] most mathematicians "do not know" of ZFC just as Monsieur Jourdain in Molière's Bourgeois Gentilhomme "did not know" he was speaking in prose; [...] because we do not even notice that we are using it.*

Instituto Politécnico Nacional

Moraleja: Cuando un matemático dice que φ es un **teorema**, implícitamente está diciendo que φ es un teorema desde los axiomas de la Teoría de Conjuntos. (¡Aún cuando no sepa con exactitud cuáles son esos axiomas!)

> *[...] most mathematicians "do not know" of ZFC just as Monsieur Jourdain in Molière's Bourgeois Gentilhomme "did not know" he was speaking in prose; [...] because we do not even notice that we are using it.*
>
> *[...] The best framework, the best foundation, is the one that governs you least; that is you do not notice its restrictions (except when really necessary, like arriving at a contradiction).*

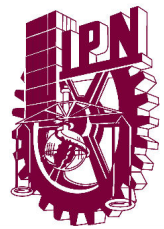


Instituto Politécnico Nacional

Moraleja: Cuando un matemático dice que φ es un **teorema**, implícitamente está diciendo que φ es un teorema desde los axiomas de la Teoría de Conjuntos. (¡Aún cuando no sepa con exactitud cuáles son esos axiomas!)

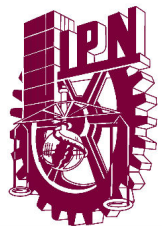
> *[...] most mathematicians "do not know" of ZFC just as Monsieur Jourdain in Molière's Bourgeois Gentilhomme "did not know" he was speaking in prose; [...] because we do not even notice that we are using it.*
>
> *[...] The best framework, the best foundation, is the one that governs you least; that is you do not notice its restrictions (except when really necessary, like arriving at a contradiction).*

Saharon Shelah, *Logical dreams.* Bull. Amer. Math. Soc. **40** (2003), 203–228.



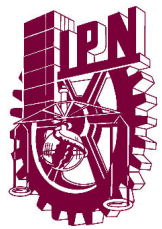
Instituto Politécnico Nacional

El **lenguaje de la Teoría de Conjuntos** es aquél cuyo alfabeto consta



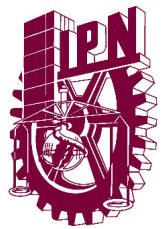
Instituto Politécnico Nacional

El **lenguaje de la Teoría de Conjuntos** es aquél cuyo alfabeto consta (además de conectivas, cuantificadores, variables, signo de igualdad y paréntesis)



Instituto Politécnico Nacional

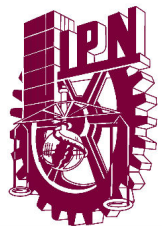
El **lenguaje de la Teoría de Conjuntos** es aquél cuyo alfabeto consta (además de conectivas, cuantificadores, variables, signo de igualdad y paréntesis) de un símbolo de relación binaria $\in$.



Instituto Politécnico Nacional

El **lenguaje de la Teoría de Conjuntos** es aquél cuyo alfabeto consta (además de conectivas, cuantificadores, variables, signo de igualdad y paréntesis) de un símbolo de relación binaria $\in$.

Así, fórmulas típicas en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos serían, por ejemplo, $(\forall x)(\exists y)(z = x \wedge y \in z)$, o $(\exists z)(\forall x)(x \in z \Rightarrow x = y)$.



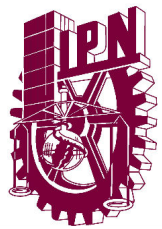
Instituto Politécnico Nacional

El **lenguaje de la Teoría de Conjuntos** es aquél cuyo alfabeto consta (además de conectivas, cuantificadores, variables, signo de igualdad y paréntesis) de un símbolo de relación binaria $\in$.

Así, fórmulas típicas en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos serían, por ejemplo, $(\forall x)(\exists y)(z = x \wedge y \in z)$, o $(\exists z)(\forall x)(x \in z \Rightarrow x = y)$.

Por ejemplo,

- $x \notin y$ puede pensarse como una "abreviación" de $\neg(x \in y)$,



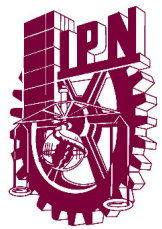
Instituto Politécnico Nacional

El **lenguaje de la Teoría de Conjuntos** es aquél cuyo alfabeto consta (además de conectivas, cuantificadores, variables, signo de igualdad y paréntesis) de un símbolo de relación binaria $\in$.

Así, fórmulas típicas en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos serían, por ejemplo, $(\forall x)(\exists y)(z = x \wedge y \in z)$, o $(\exists z)(\forall x)(x \in z \Rightarrow x = y)$.

Por ejemplo,

- $x \notin y$ puede pensarse como una "abreviación" de $\neg(x \in y)$,
- $x = \varnothing$ puede pensarse como una "abreviación" de $(\forall y)(y \notin x)$,



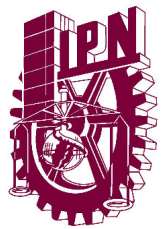
Instituto Politécnico Nacional

El **lenguaje de la Teoría de Conjuntos** es aquél cuyo alfabeto consta (además de conectivas, cuantificadores, variables, signo de igualdad y paréntesis) de un símbolo de relación binaria $\in$.

Así, fórmulas típicas en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos serían, por ejemplo, $(\forall x)(\exists y)(z = x \wedge y \in z)$, o $(\exists z)(\forall x)(x \in z \Rightarrow x = y)$.

Por ejemplo,

- $x \notin y$ puede pensarse como una "abreviación" de $\neg(x \in y)$,
- $x = \varnothing$ puede pensarse como una "abreviación" de $(\forall y)(y \notin x)$,
- $A \subseteq B$ puede pensarse como una "abreviación" de $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$,



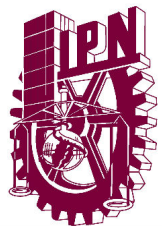
Instituto Politécnico Nacional

El **lenguaje de la Teoría de Conjuntos** es aquél cuyo alfabeto consta (además de conectivas, cuantificadores, variables, signo de igualdad y paréntesis) de un símbolo de relación binaria $\in$.

Así, fórmulas típicas en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos serían, por ejemplo, $(\forall x)(\exists y)(z = x \wedge y \in z)$, o $(\exists z)(\forall x)(x \in z \Rightarrow x = y)$.

Por ejemplo,

- $x \notin y$ puede pensarse como una "abreviación" de $\neg(x \in y)$,
- $x = \varnothing$ puede pensarse como una "abreviación" de $(\forall y)(y \notin x)$,
- $A \subseteq B$ puede pensarse como una "abreviación" de $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$,
- "$x = (a, b)$"



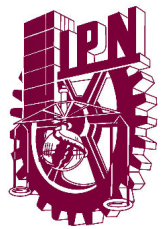
Instituto Politécnico Nacional

El **lenguaje de la Teoría de Conjuntos** es aquél cuyo alfabeto consta (además de conectivas, cuantificadores, variables, signo de igualdad y paréntesis) de un símbolo de relación binaria $\in$.

Así, fórmulas típicas en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos serían, por ejemplo, $(\forall x)(\exists y)(z = x \wedge y \in z)$, o $(\exists z)(\forall x)(x \in z \Rightarrow x = y)$.

Por ejemplo,

- $x \notin y$ puede pensarse como una "abreviación" de $\neg(x \in y)$,
- $x = \varnothing$ puede pensarse como una "abreviación" de $(\forall y)(y \notin x)$,
- $A \subseteq B$ puede pensarse como una "abreviación" de $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$,
- "$x = (a, b)$" (que significa $x = \{\{a\}, \{a, b\}\}$)



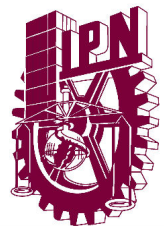
Instituto Politécnico Nacional

El **lenguaje de la Teoría de Conjuntos** es aquél cuyo alfabeto consta (además de conectivas, cuantificadores, variables, signo de igualdad y paréntesis) de un símbolo de relación binaria $\in$.

Así, fórmulas típicas en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos serían, por ejemplo, $(\forall x)(\exists y)(z = x \wedge y \in z)$, o $(\exists z)(\forall x)(x \in z \Rightarrow x = y)$.

Por ejemplo,

- $x \notin y$ puede pensarse como una "abreviación" de $\neg(x \in y)$,
- $x = \varnothing$ puede pensarse como una "abreviación" de $(\forall y)(y \notin x)$,
- $A \subseteq B$ puede pensarse como una "abreviación" de $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$,
- "$x = (a, b)$" (que significa $x = \{\{a\}, \{a, b\}\}$) puede pensarse como una "abreviación" de
  $(\forall z)(z \in x \iff (\forall y)(y \in z \iff y = a) \vee ((\forall y)(y \in z \iff (y = a \wedge y = b))))$,



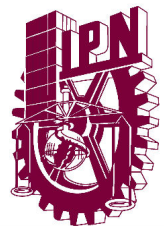
Instituto Politécnico Nacional

El **lenguaje de la Teoría de Conjuntos** es aquél cuyo alfabeto consta (además de conectivas, cuantificadores, variables, signo de igualdad y paréntesis) de un símbolo de relación binaria $\in$.

Así, fórmulas típicas en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos serían, por ejemplo, $(\forall x)(\exists y)(z = x \wedge y \in z)$, o $(\exists z)(\forall x)(x \in z \Rightarrow x = y)$.

Por ejemplo,

- $x \notin y$ puede pensarse como una "abreviación" de $\neg(x \in y)$,
- $x = \varnothing$ puede pensarse como una "abreviación" de $(\forall y)(y \notin x)$,
- $A \subseteq B$ puede pensarse como una "abreviación" de $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$,
- "$x = (a, b)$" (que significa $x = \{\{a\}, \{a, b\}\}$) puede pensarse como una "abreviación" de
  $(\forall z)(z \in x \iff (\forall y)(y \in z \iff y = a) \vee ((\forall y)(y \in z \iff (y = a \wedge y = b))))$,
- etc...



Instituto Politécnico Nacional

Los axiomas

Instituto Politécnico Nacional

Los axiomas (de Zermelo–Fränkel con Elección,

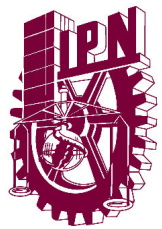
Instituto Politécnico Nacional

Los axiomas (de Zermelo–Fränkel con Elección, o ZFE):

Instituto Politécnico Nacional

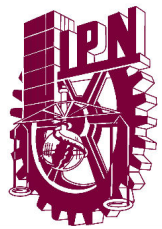
Los axiomas (de Zermelo–Fränkel con Elección, o ZFE):

0. **Existencia:** $(\exists x)(x = x)$ (*existe un conjunto*).
1. **Extensionalidad:** $(\forall x)(\forall y)(x = y \Leftrightarrow (\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y))$ (*un conjunto está completamente determinado por sus elementos*).
2. **Comprensión:** Para cada fórmula φ con una variable libre,$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z))$ (*para cada propiedad φ y para cada conjunto x, existe el conjunto $\{z \in x \mid \varphi(z)\}$*).
3. **Par:** $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)(w \in z \Leftrightarrow (w = x \vee w = y))$ (*para cualesquiera dos conjuntos x, y, existe el conjunto $\{x, y\}$*).
4. **Unión:** $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow (\exists w \in x)(z \in w))$ (*para toda familia de conjuntos x, existe su unión $\bigcup_{w \in x} w$*).
5. **Conjunto Potencia:** $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$ (*para todo conjunto x, existe su conjunto potencia $\wp(x)$*).
6. **Axioma de Infinitud:** $(\exists x)(\varnothing \in x \wedge (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x))$. (*existe un conjunto infinito*).
7. **Reemplazo:** Para cada fórmula φ con dos variables libres, $(\forall x)(\exists! y)(\varphi(x, y)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow (\exists w \in x)(\varphi(w, z))$ (*si la fórmula φ se comporta como una función F, entonces para todo conjunto x, la imagen directa $F[x]$ también es un conjunto*).
8. **Fundación:** $(\forall x)(x \neq \varnothing \Rightarrow (\exists y \in x)(\forall z \in x)(z \notin y))$ (*la relación $\in$ de pertenencia es bien fundada*).
9. **Elección:** $(\forall x)((\forall y \in x)(y \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists z)(\forall y \in x)(\exists! w)(w \in z \wedge w \in y))$ (*si x es una familia de conjuntos no vacíos, entonces se puede escoger un elemento de cada miembro de x*).



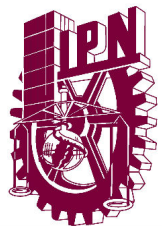
Instituto Politécnico Nacional

A partir de los años 30, se han desarrollado diversas técnicas para construir modelos de ZFE



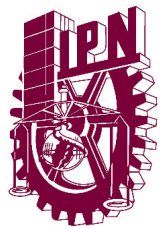
Instituto Politécnico Nacional

A partir de los años 30, se han desarrollado diversas técnicas para construir modelos de ZFE (ya sea encogiendo o ensanchando el “mundo real”



Instituto Politécnico Nacional

A partir de los años 30, se han desarrollado diversas técnicas para construir modelos de ZFE (ya sea encogiendo o ensanchando el “mundo real” –el modelo de ZFE en el que se supone que realizamos nuestras matemáticas–):



Instituto Politécnico Nacional

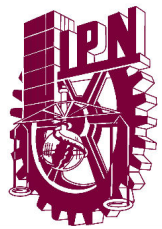
A partir de los años 30, se han desarrollado diversas técnicas para construir modelos de ZFE (ya sea encogiendo o ensanchando el “mundo real” –el modelo de ZFE en el que se supone que realizamos nuestras matemáticas–):

El universo constructible de Gödel,

Instituto Politécnico Nacional

A partir de los años 30, se han desarrollado diversas técnicas para construir modelos de ZFE (ya sea encogiendo o ensanchando el “mundo real” –el modelo de ZFE en el que se supone que realizamos nuestras matemáticas–):

El universo constructible de Gödel, $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V}$



Instituto Politécnico Nacional

A partir de los años 30, se han desarrollado diversas técnicas para construir modelos de ZFE (ya sea encogiendo o ensanchando el “mundo real” –el modelo de ZFE en el que se supone que realizamos nuestras matemáticas–):

El universo constructible de Gödel, $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V}$

más tarde, la teoría de los modelos internos y los modelos núcleo;

Instituto Politécnico Nacional

A partir de los años 30, se han desarrollado diversas técnicas para construir modelos de ZFE (ya sea encogiendo o ensanchando el “mundo real” –el modelo de ZFE en el que se supone que realizamos nuestras matemáticas–):

El universo constructible de Gödel, $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V}$

más tarde, la teoría de los modelos internos y los modelos núcleo;

La técnica del forzamiento de Cohen,

Instituto Politécnico Nacional

A partir de los años 30, se han desarrollado diversas técnicas para construir modelos de ZFE (ya sea encogiendo o ensanchando el “mundo real” –el modelo de ZFE en el que se supone que realizamos nuestras matemáticas–):

El universo constructible de Gödel, $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V}$

más tarde, la teoría de los modelos internos y los modelos núcleo;

La técnica del forzamiento de Cohen, $\mathbf{V}[G] \supseteq \mathbf{V}$;

Instituto Politécnico Nacional

A partir de los años 30, se han desarrollado diversas técnicas para construir modelos de ZFE (ya sea encogiendo o ensanchando el “mundo real” –el modelo de ZFE en el que se supone que realizamos nuestras matemáticas–):

El universo constructible de Gödel, $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V}$

más tarde, la teoría de los modelos internos y los modelos núcleo;

La técnica del forzamiento de Cohen, $\mathbf{V}[G] \supseteq \mathbf{V}$;

después, forzamiento iterado, forzamiento apropiado, matrices de iteración, forzamiento con clases, forzamiento con submodelos elementales, iteraciones de Asperó–Mota, ...

Instituto Politécnico Nacional

Cardinalidad:

Instituto Politécnico Nacional

Cardinalidad:

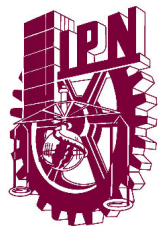
Al pensar en cardinalidades infinitas, hay dos intuiciones que se contraponen:

Instituto Politécnico Nacional

Cardinalidad:

Al pensar en cardinalidades infinitas, hay dos intuiciones que se contraponen:

La *geométrica*:

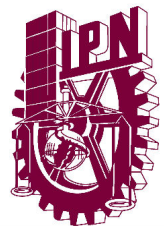


Instituto Politécnico Nacional

Cardinalidad:

Al pensar en cardinalidades infinitas, hay dos intuiciones que se contraponen:

La *geométrica*: la recta real, $\mathbb{R}$,

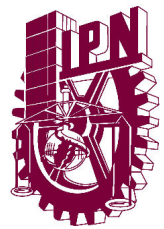


Instituto Politécnico Nacional

Cardinalidad:

Al pensar en cardinalidades infinitas, hay dos intuiciones que se contraponen:

La *geométrica*: la recta real, $\mathbb{R}$, de cardinalidad $\mathfrak{c}$;



Instituto Politécnico Nacional

Cardinalidad:

Al pensar en cardinalidades infinitas, hay dos intuiciones que se contraponen:

La *geométrica*: la recta real, $\mathbb{R}$, de cardinalidad $\mathfrak{c}$;

La *aritmética*:

Instituto Politécnico Nacional

Cardinalidad:

Al pensar en cardinalidades infinitas, hay dos intuiciones que se contraponen:

La *geométrica*: la recta real, $\mathbb{R}$, de cardinalidad $\mathfrak{c}$;

La *aritmética*: contar, contar y contar,

Instituto Politécnico Nacional

Cardinalidad:

Al pensar en cardinalidades infinitas, hay dos intuiciones que se contraponen:

La *geométrica*: la recta real, $\mathbb{R}$, de cardinalidad $\mathfrak{c}$;

La *aritmética*: contar, contar y contar, al infinito y más allá...

Instituto Politécnico Nacional

Cardinalidad:

Al pensar en cardinalidades infinitas, hay dos intuiciones que se contraponen:

La *geométrica*: la recta real, $\mathbb{R}$, de cardinalidad $\mathfrak{c}$;

La *aritmética*: contar, contar y contar, al infinito y más allá...

$$0, 1, 2, \ldots, \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots,$$

Instituto Politécnico Nacional

Cardinalidad:

Al pensar en cardinalidades infinitas, hay dos intuiciones que se contraponen:

La *geométrica*: la recta real, $\mathbb{R}$, de cardinalidad $\mathfrak{c}$;

La *aritmética*: contar, contar y contar, al infinito y más allá...

$$0, 1, 2, \ldots, \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots,$$

Teorema (Cantor)

$\aleph_1 \leq \mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$

Instituto Politécnico Nacional

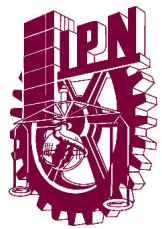
Resulta bastante sospechoso que prácticamente todos los conjuntos infinitos que surgen de manera natural

Instituto Politécnico Nacional

Resulta bastante sospechoso que prácticamente todos los conjuntos infinitos que surgen de manera natural (e.g. mientras hacemos análisis)

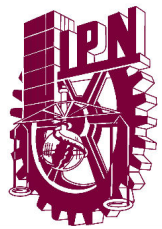
Instituto Politécnico Nacional

Resulta bastante sospechoso que prácticamente todos los conjuntos infinitos que surgen de manera natural (e.g. mientras hacemos análisis) son todos o bien numerables, o bien de cardinalidad $\mathfrak{c}$.



Instituto Politécnico Nacional

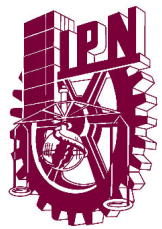
Resulta bastante sospechoso que prácticamente todos los conjuntos infinitos que surgen de manera natural (e.g. mientras hacemos análisis) son todos o bien numerables, o bien de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Por ello, Cantor conjeturó



Instituto Politécnico Nacional

Resulta bastante sospechoso que prácticamente todos los conjuntos infinitos que surgen de manera natural (e.g. mientras hacemos análisis) son todos o bien numerables, o bien de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Por ello, Cantor conjeturó

La Hipótesis del Continuo (CH): $\mathfrak{c} = \aleph_1$.

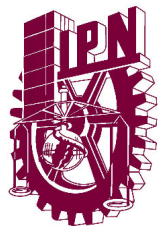


Instituto Politécnico Nacional

Resulta bastante sospechoso que prácticamente todos los conjuntos infinitos que surgen de manera natural (e.g. mientras hacemos análisis) son todos o bien numerables, o bien de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Por ello, Cantor conjeturó

La Hipótesis del Continuo (CH): $\mathfrak{c} = \aleph_1$.

(*Primer Problema de Hilbert*: demostrar (o refutar) CH).



Instituto Politécnico Nacional

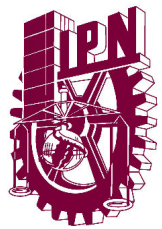
Resulta bastante sospechoso que prácticamente todos los conjuntos infinitos que surgen de manera natural (e.g. mientras hacemos análisis) son todos o bien numerables, o bien de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Por ello, Cantor conjeturó

La Hipótesis del Continuo (CH): $\mathfrak{c} = \aleph_1$.

(*Primer Problema de Hilbert*: demostrar (o refutar) CH).

Teorema (Gödel 1939)

CH *es consistente con* ZFE.



Instituto Politécnico Nacional

Resulta bastante sospechoso que prácticamente todos los conjuntos infinitos que surgen de manera natural (e.g. mientras hacemos análisis) son todos o bien numerables, o bien de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Por ello, Cantor conjeturó

La Hipótesis del Continuo (CH): $\mathfrak{c} = \aleph_1$.

(*Primer Problema de Hilbert*: demostrar (o refutar) CH).

Teorema (Gödel 1939)

CH *es consistente con* ZFE. *(El universo constructible de Gödel.)*

Instituto Politécnico Nacional

Resulta bastante sospechoso que prácticamente todos los conjuntos infinitos que surgen de manera natural (e.g. mientras hacemos análisis) son todos o bien numerables, o bien de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Por ello, Cantor conjeturó

La Hipótesis del Continuo (CH): $\mathfrak{c} = \aleph_1$.

(*Primer Problema de Hilbert*: demostrar (o refutar) CH).

Teorema (Gödel 1939)

CH *es consistente con* ZFE. *(El universo constructible de Gödel.)*

Teorema (Cohen 1960)

CH *es independiente de* ZFE.

Instituto Politécnico Nacional

Resulta bastante sospechoso que prácticamente todos los conjuntos infinitos que surgen de manera natural (e.g. mientras hacemos análisis) son todos o bien numerables, o bien de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Por ello, Cantor conjeturó

La Hipótesis del Continuo (CH): $\mathfrak{c} = \aleph_1$.

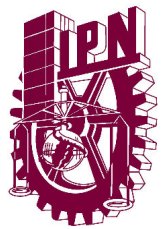
(*Primer Problema de Hilbert*: demostrar (o refutar) CH).

Teorema (Gödel 1939)

CH *es consistente con* ZFE. *(El universo constructible de Gödel.)*

Teorema (Cohen 1960)

CH *es independiente de* ZFE. *(Método del forzamiento.)*



Instituto Politécnico Nacional

Resulta bastante sospechoso que prácticamente todos los conjuntos infinitos que surgen de manera natural (e.g. mientras hacemos análisis) son todos o bien numerables, o bien de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Por ello, Cantor conjeturó

La Hipótesis del Continuo (CH): $\mathfrak{c} = \aleph_1$.

(*Primer Problema de Hilbert*: demostrar (o refutar) CH).

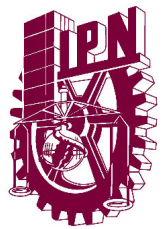
Teorema (Gödel 1939)

CH *es consistente con* ZFE. *(El universo constructible de Gödel.)*

Teorema (Cohen 1960)

CH *es independiente de* ZFE. *(Método del forzamiento.)*

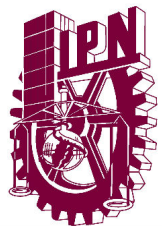
En conclusión, la CH es indecidible desde los axiomas de ZFE.



Instituto Politécnico Nacional

Recordemos que un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tiene **medida cero** si

Recordemos que un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tiene **medida cero** si para todo $\varepsilon > 0$ hay intervalos I_n, $n \in \mathbb{N}$, tales que



Instituto Politécnico Nacional

Recordemos que un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tiene **medida cero** si para todo $\varepsilon > 0$ hay intervalos I_n, $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) &< \varepsilon \\ &\text{y} \\ X &\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n. \end{aligned}$$

Instituto Politécnico Nacional

Recordemos que un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tiene **medida cero** si para todo $\varepsilon > 0$ hay intervalos I_n, $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) &< \varepsilon \\ &\text{y} \\ X &\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n. \end{aligned}$$

Definition

Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tiene **medida fuertemente cero**

Recordemos que un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tiene **medida cero** si para todo $\varepsilon > 0$ hay intervalos I_n, $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) &< \varepsilon \\ &\text{y} \\ X &\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n. \end{aligned}$$

Definition

Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tiene **medida fuertemente cero** si para cada sucesión ε_n, $n \in \mathbb{N}$,

Recordemos que un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tiene **medida cero** si para todo $\varepsilon > 0$ hay intervalos I_n, $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) &< \varepsilon \\ &\text{y} \\ X &\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n. \end{aligned}$$

Definition

Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tiene **medida fuertemente cero** si para cada sucesión ε_n, $n \in \mathbb{N}$, existen intervalos I_n, $n \in \mathbb{N}$, tales que

Recordemos que un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tiene **medida cero** si para todo $\varepsilon > 0$ hay intervalos I_n, $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) &< \varepsilon \\ &\text{y} \\ X &\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n. \end{aligned}$$

Definition

Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tiene **medida fuertemente cero** si para cada sucesión ε_n, $n \in \mathbb{N}$, existen intervalos I_n, $n \in \mathbb{N}$, tales que $\ell(I_n) < \varepsilon_n$ y

$$X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

Note que si $X \subseteq \mathbb{R}$ es numerable, entonces X tiene medida fuertemente cero.

Instituto Politécnico Nacional

Note que si $X \subseteq \mathbb{R}$ es numerable, entonces X tiene medida fuertemente cero.

La **conjetura de Borel**

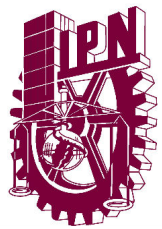
Note que si $X \subseteq \mathbb{R}$ es numerable, entonces X tiene medida fuertemente cero.

La **conjetura de Borel** BC

Instituto Politécnico Nacional

Note que si $X \subseteq \mathbb{R}$ es numerable, entonces X tiene medida fuertemente cero.

La **conjetura de Borel** BC es la afirmación “todo conjunto de medida fuertemente cero es numerable”.



Instituto Politécnico Nacional

Note que si $X \subseteq \mathbb{R}$ es numerable, entonces X tiene medida fuertemente cero.

La **conjetura de Borel** BC es la afirmación "todo conjunto de medida fuertemente cero es numerable".

Teorema (Sierpiński 1928)

CH *implica que existe un conjunto no numerable de medida fuertemente cero.*

Instituto Politécnico Nacional

Note que si $X \subseteq \mathbb{R}$ es numerable, entonces X tiene medida fuertemente cero.

La **conjetura de Borel** BC es la afirmación "todo conjunto de medida fuertemente cero es numerable".

Teorema (Sierpiński 1928)

CH *implica que existe un conjunto no numerable de medida fuertemente cero. En particular,* BC *es independiente de* ZFE*.*

Instituto Politécnico Nacional

Note que si $X \subseteq \mathbb{R}$ es numerable, entonces X tiene medida fuertemente cero.

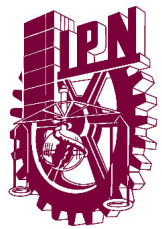
La **conjetura de Borel** BC es la afirmación "todo conjunto de medida fuertemente cero es numerable".

Teorema (Sierpiński 1928)

CH *implica que existe un conjunto no numerable de medida fuertemente cero. En particular,* BC *es independiente de* ZFE*.*

Teorema (Laver 1976)

BC *es consistente con* ZFE*.*



Instituto Politécnico Nacional

Note que si $X \subseteq \mathbb{R}$ es numerable, entonces X tiene medida fuertemente cero.

La **conjetura de Borel** BC es la afirmación "todo conjunto de medida fuertemente cero es numerable".

Teorema (Sierpiński 1928)

CH *implica que existe un conjunto no numerable de medida fuertemente cero. En particular,* BC *es independiente de* ZFE*.*

Teorema (Laver 1976)

BC *es consistente con* ZFE*. (Iteración con soporte numerable de forzamientos apropiados.)*

Instituto Politécnico Nacional

Note que si $X \subseteq \mathbb{R}$ es numerable, entonces X tiene medida fuertemente cero.

La **conjetura de Borel** BC es la afirmación "todo conjunto de medida fuertemente cero es numerable".

Teorema (Sierpiński 1928)

CH *implica que existe un conjunto no numerable de medida fuertemente cero. En particular,* BC *es independiente de* ZFE*.*

Teorema (Laver 1976)

BC *es consistente con* ZFE*. (Iteración con soporte numerable de forzamientos apropiados.)*

En conclusión, la BC es indecidible desde los axiomas de ZFE.

Instituto Politécnico Nacional

Instituto Politécnico Nacional

Considere la siguiente sucesión exacta corta en la categoría de grupos abelianos:

Considere la siguiente sucesión exacta corta en la categoría de grupos abelianos:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

Considere la siguiente sucesión exacta corta en la categoría de grupos abelianos:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

Dados A y B, ¿quién puede ser G?

Considere la siguiente sucesión exacta corta en la categoría de grupos abelianos:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

Dados A y B, ¿quién puede ser G? Una posibilidad obvia es $G = A \oplus B$.

Considere la siguiente sucesión exacta corta en la categoría de grupos abelianos:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

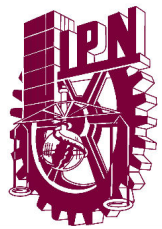
Dados A y B, ¿quién puede ser G? Una posibilidad obvia es $G = A \oplus B$. Existe un grupo abeliano $\mathrm{Ext}(B, A)$

Instituto Politécnico Nacional

Considere la siguiente sucesión exacta corta en la categoría de grupos abelianos:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

Dados A y B, ¿quién puede ser G? Una posibilidad obvia es $G = A \oplus B$. Existe un grupo abeliano $\mathrm{Ext}(B, A)$ que codifica las posibilidades para G, hasta isomorfismo



Instituto Politécnico Nacional

Considere la siguiente sucesión exacta corta en la categoría de grupos abelianos:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

Dados A y B, ¿quién puede ser G? Una posibilidad obvia es $G = A \oplus B$. Existe un grupo abeliano $\mathrm{Ext}(B, A)$ que codifica las posibilidades para G, hasta isomorfismo (que respete a la sucesión exacta corta).

Considere la siguiente sucesión exacta corta en la categoría de grupos abelianos:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

Dados A y B, ¿quién puede ser G? Una posibilidad obvia es $G = A \oplus B$. Existe un grupo abeliano $\mathrm{Ext}(B, A)$ que codifica las posibilidades para G, hasta isomorfismo (que respete a la sucesión exacta corta). (El elemento identidad de $\mathrm{Ext}(B, A)$ es justamente $A \oplus B$).

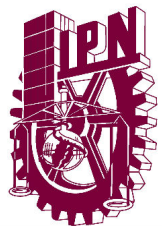
Considere la siguiente sucesión exacta corta en la categoría de grupos abelianos:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

Dados A y B, ¿quién puede ser G? Una posibilidad obvia es $G = A \oplus B$. Existe un grupo abeliano $\mathrm{Ext}(B, A)$ que codifica las posibilidades para G, hasta isomorfismo (que respete a la sucesión exacta corta). (El elemento identidad de $\mathrm{Ext}(B, A)$ es justamente $A \oplus B$).

Definición

Un grupo abeliano A es un **W-grupo**



Instituto Politécnico Nacional

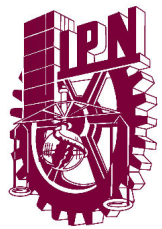
Considere la siguiente sucesión exacta corta en la categoría de grupos abelianos:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

Dados A y B, ¿quién puede ser G? Una posibilidad obvia es $G = A \oplus B$. Existe un grupo abeliano $\mathrm{Ext}(B, A)$ que codifica las posibilidades para G, hasta isomorfismo (que respete a la sucesión exacta corta). (El elemento identidad de $\mathrm{Ext}(B, A)$ es justamente $A \oplus B$).

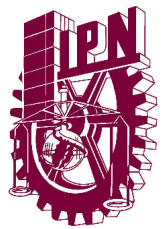
Definición

Un grupo abeliano A es un **W-grupo** *si $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$ es trivial.*



Instituto Politécnico Nacional

Resulta que todo grupo abeliano libre es un W-grupo.



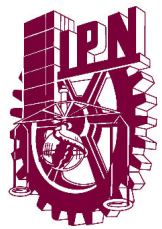
Instituto Politécnico Nacional

Resulta que todo grupo abeliano libre es un W-grupo.

El **problema de Whitehead** es la pregunta

Resulta que todo grupo abeliano libre es un W-grupo.

El **problema de Whitehead** es la pregunta “¿Ser W-grupo implica ser libre abeliano?”



Instituto Politécnico Nacional

Resulta que todo grupo abeliano libre es un W-grupo.

El **problema de Whitehead** es la pregunta "¿Ser W-grupo implica ser libre abeliano?"

Teorema (Pontryagin)

Todo W-grupo numerable *es libre abeliano.*

Instituto Politécnico Nacional

Resulta que todo grupo abeliano libre es un W-grupo.

El **problema de Whitehead** es la pregunta "¿Ser W-grupo implica ser libre abeliano?"

Teorema (Pontryagin)

Todo W-grupo numerable *es libre abeliano.*

Por lo tanto, el problema de Whitehead es fundamentalmente un problema acerca de grupos no numerables.

Instituto Politécnico Nacional

Teorema (Shelah 1974)

Es consistente con ZFE *que todo W- grupo es libre abeliano.*

Instituto Politécnico Nacional

Teorema (Shelah 1974)

Es consistente con ZFE *que todo W- grupo es libre abeliano. (En el universo constructible de Gödel.)*

Instituto Politécnico Nacional

Teorema (Shelah 1974)

Es consistente con ZFE *que todo W- grupo es libre abeliano. (En el universo constructible de Gödel.)*

Teorema (Shelah 1974)

Es consistente con ZFE *que existe un W-grupo* G *que no es abeliano libre.*

Instituto Politécnico Nacional

Teorema (Shelah 1974)

Es consistente con ZFE *que todo W- grupo es libre abeliano. (En el universo constructible de Gödel.)*

Teorema (Shelah 1974)

Es consistente con ZFE *que existe un W-grupo* G *que no es abeliano libre.* ($|G| = \aleph_1$)

Instituto Politécnico Nacional

Teorema (Shelah 1974)

Es consistente con ZFE *que todo W- grupo es libre abeliano. (En el universo constructible de Gödel.)*

Teorema (Shelah 1974)

Es consistente con ZFE *que existe un W-grupo* G *que no es abeliano libre.* ($|G| = \aleph_1$) *(Consecuencia del* Axioma de Martin

Instituto Politécnico Nacional

Teorema (Shelah 1974)

Es consistente con ZFE *que todo W- grupo es libre abeliano. (En el universo constructible de Gödel.)*

Teorema (Shelah 1974)

Es consistente con ZFE *que existe un W-grupo* G *que no es abeliano libre.* ($|G| = \aleph_1$) *(Consecuencia del* Axioma de Martin *–esencialmente, una iteración con soporte finito de forzamientos c.c.c.–)*

Instituto Politécnico Nacional

Teorema (Shelah 1974)

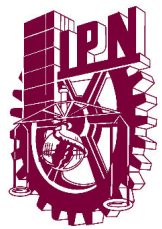
Es consistente con ZFE *que todo W- grupo es libre abeliano. (En el universo constructible de Gödel.)*

Teorema (Shelah 1974)

Es consistente con ZFE *que existe un W-grupo* G *que no es abeliano libre.* ($|G| = \aleph_1$) *(Consecuencia del* Axioma de Martin *–esencialmente, una iteración con soporte finito de forzamientos c.c.c.–)*

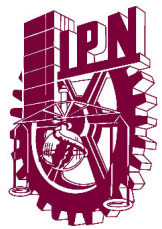
En conclusión, el problema de Whitehead es indecidible desde los axiomas de ZFE.

Instituto Politécnico Nacional



Instituto Politécnico Nacional

Sea R un anillo, y sea M un R-módulo (derecho).



Instituto Politécnico Nacional

Sea R un anillo, y sea M un R-módulo (derecho).

Definición

La **dimensión proyectiva** *de* M*, denotada* $\mathrm{pd}(M)$*, es el mínimo* n *tal que existe una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{f_m} P_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

Instituto Politécnico Nacional

Sea R un anillo, y sea M un R-módulo (derecho).

Definición

La **dimensión proyectiva** *de* M*, denotada* $\mathrm{pd}(M)$*, es el mínimo* n *tal que existe una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{f_m} P_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

en donde cada P_i *es proyectivo*

Instituto Politécnico Nacional

Sea R un anillo, y sea M un R-módulo (derecho).

Definición

La **dimensión proyectiva** *de* M*, denotada* $\mathrm{pd}(M)$*, es el mínimo* n *tal que existe una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{f_m} P_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

en donde cada P_i *es proyectivo (toda sucesión exacta corta* $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$ *se escinde)*

Instituto Politécnico Nacional

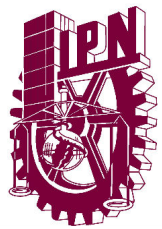
Sea R un anillo, y sea M un R-módulo (derecho).

Definición

La **dimensión proyectiva** *de* M*, denotada* $\mathrm{pd}(M)$*, es el mínimo* n *tal que existe una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{f_m} P_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

en donde cada P_i *es proyectivo (toda sucesión exacta corta* $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$ *se escinde) y* $\ker(f_{n-1}) = 0$.



Instituto Politécnico Nacional

Sea R un anillo, y sea M un R-módulo (derecho).

Definición

La **dimensión proyectiva** *de M, denotada $\mathrm{pd}(M)$, es el mínimo n tal que existe una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{f_m} P_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

en donde cada P_i es proyectivo (toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$ se escinde) y $\ker(f_{n-1}) = 0$.

Definición

La **dimensión proyectiva** *del anillo R se define como*

$$\mathrm{pd}(R) = \sup\{\mathrm{pd}(M) \,|\, M \text{ es un } R\text{-módulo}\}.$$

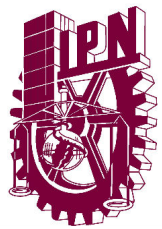
Pregunta:

Instituto Politécnico Nacional

Pregunta: ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{R}(x, y, z)$?

Instituto Politécnico Nacional

Pregunta: ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{R}(x, y, z)$? ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{Q}(x, y, z)$?



Instituto Politécnico Nacional

Pregunta: ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{R}(x, y, z)$? ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{Q}(x, y, z)$?

Teorema (Osofski, 1968)

Instituto Politécnico Nacional

Pregunta: ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{R}(x, y, z)$? ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{Q}(x, y, z)$?

Teorema (Osofski, 1968)

$2 \leq \mathrm{pd}(\mathbb{R}(x, y, z)) = \mathrm{pd}(\mathbb{Q}(x, y, z)) \leq 3.$

Instituto Politécnico Nacional

Pregunta: ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{R}(x, y, z)$? ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{Q}(x, y, z)$?

Teorema (Osofski, 1968)

$2 \leq \mathrm{pd}(\mathbb{R}(x, y, z)) = \mathrm{pd}(\mathbb{Q}(x, y, z)) \leq 3$. *Además, las siguientes condiciones son equivalentes:*

Instituto Politécnico Nacional

Pregunta: ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{R}(x, y, z)$? ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{Q}(x, y, z)$?

Teorema (Osofski, 1968)

$2 \leq \mathrm{pd}(\mathbb{R}(x, y, z)) = \mathrm{pd}(\mathbb{Q}(x, y, z)) \leq 3$. *Además, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{pd}(\mathbb{R}(x, y, z)) = 2$,

Instituto Politécnico Nacional

Pregunta: ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{R}(x, y, z)$? ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{Q}(x, y, z)$?

Teorema (Osofski, 1968)

$2 \leq \mathrm{pd}(\mathbb{R}(x, y, z)) = \mathrm{pd}(\mathbb{Q}(x, y, z)) \leq 3$. *Además, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{pd}(\mathbb{R}(x, y, z)) = 2$,
2. $\mathrm{pd}(\mathbb{Q}(x, y, z)) = 2$,

Instituto Politécnico Nacional

Pregunta: ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{R}(x, y, z)$? ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{Q}(x, y, z)$?

Teorema (Osofski, 1968)

$2 \leq \mathrm{pd}(\mathbb{R}(x, y, z)) = \mathrm{pd}(\mathbb{Q}(x, y, z)) \leq 3$. *Además, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{pd}(\mathbb{R}(x, y, z)) = 2$,
2. $\mathrm{pd}(\mathbb{Q}(x, y, z)) = 2$,
3. CH.

Instituto Politécnico Nacional

Pregunta: ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{R}(x, y, z)$? ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{Q}(x, y, z)$?

Teorema (Osofski, 1968)

$2 \leq \mathrm{pd}(\mathbb{R}(x, y, z)) = \mathrm{pd}(\mathbb{Q}(x, y, z)) \leq 3$. *Además, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{pd}(\mathbb{R}(x, y, z)) = 2$,
2. $\mathrm{pd}(\mathbb{Q}(x, y, z)) = 2$,
3. CH.

En particular, los valores exactos de $\mathrm{pd}(\mathbb{R}(x, y, z))$ y $\mathrm{pd}(\mathbb{Q}(x, y, z))$ son indecidibles desde los axiomas de ZFE.

Instituto Politécnico Nacional

Pregunta: ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{R}(x, y, z)$? ¿Cuál es la dimensión proyectiva de $\mathbb{Q}(x, y, z)$?

Teorema (Osofski, 1968)

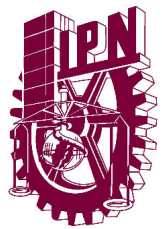
$2 \leq \mathrm{pd}(\mathbb{R}(x, y, z)) = \mathrm{pd}(\mathbb{Q}(x, y, z)) \leq 3$. *Además, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{pd}(\mathbb{R}(x, y, z)) = 2$,
2. $\mathrm{pd}(\mathbb{Q}(x, y, z)) = 2$,
3. CH.

En particular, los valores exactos de $\mathrm{pd}(\mathbb{R}(x, y, z))$ y $\mathrm{pd}(\mathbb{Q}(x, y, z))$ son indecidibles desde los axiomas de ZFE.

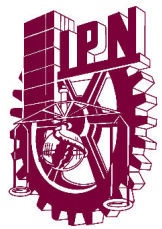
Teorema (Osofski, 1968)

En general, si $\mathfrak{c} = \aleph_\ell$, *entonces* $\mathrm{pd}(\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)) = \min\{n, \ell + 1\}$.



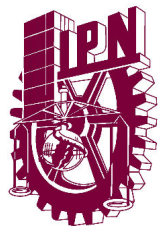
Instituto Politécnico Nacional

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita.



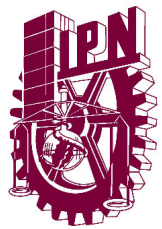
Instituto Politécnico Nacional

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Sea $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ el álgebra C* de operadores acotados en $\mathbb{H}$,



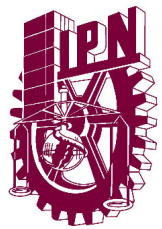
Instituto Politécnico Nacional

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Sea $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ el álgebra C* de operadores acotados en $\mathbb{H}$, y sea $\mathcal{K}(\mathbb{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{H})$ el ideal de operadores compactos



Instituto Politécnico Nacional

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Sea $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ el álgebra C* de operadores acotados en $\mathbb{H}$, y sea $\mathcal{K}(\mathbb{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{H})$ el ideal de operadores compactos (que mandan conjuntos acotados en conjuntos totalmente acotados).



Instituto Politécnico Nacional

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Sea $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ el álgebra C* de operadores acotados en $\mathbb{H}$, y sea $\mathcal{K}(\mathbb{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{H})$ el ideal de operadores compactos (que mandan conjuntos acotados en conjuntos totalmente acotados).

Definición

El **álgebra de Calkin** *es el álgebra cociente* $\mathcal{C}(\mathbb{H}) := \mathcal{B}(\mathbb{H})/\mathcal{K}(\mathbb{H})$.

Instituto Politécnico Nacional

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Sea $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ el álgebra C* de operadores acotados en $\mathbb{H}$, y sea $\mathcal{K}(\mathbb{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{H})$ el ideal de operadores compactos (que mandan conjuntos acotados en conjuntos totalmente acotados).

Definición

El **álgebra de Calkin** *es el álgebra cociente* $\mathcal{C}(\mathbb{H}) := \mathcal{B}(\mathbb{H})/\mathcal{K}(\mathbb{H})$.

Miramos el grupo de automorfismos de $\mathcal{C}(\mathbb{H})$.

Instituto Politécnico Nacional

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Sea $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ el álgebra C* de operadores acotados en $\mathbb{H}$, y sea $\mathcal{K}(\mathbb{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{H})$ el ideal de operadores compactos (que mandan conjuntos acotados en conjuntos totalmente acotados).

Definición

El **álgebra de Calkin** *es el álgebra cociente* $\mathcal{C}(\mathbb{H}) := \mathcal{B}(\mathbb{H})/\mathcal{K}(\mathbb{H})$.

Miramos el grupo de automorfismos de $\mathcal{C}(\mathbb{H})$. Un automorfismo de la forma $x \longmapsto u^* x u$, en donde $u \in \mathcal{C}(\mathbb{H})$ es unitario, se llama un **automorfismo interno**.

Instituto Politécnico Nacional

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Sea $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ el álgebra C* de operadores acotados en $\mathbb{H}$, y sea $\mathcal{K}(\mathbb{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{H})$ el ideal de operadores compactos (que mandan conjuntos acotados en conjuntos totalmente acotados).

Definición

El **álgebra de Calkin** *es el álgebra cociente* $\mathcal{C}(\mathbb{H}) := \mathcal{B}(\mathbb{H})/\mathcal{K}(\mathbb{H})$.

Miramos el grupo de automorfismos de $\mathcal{C}(\mathbb{H})$. Un automorfismo de la forma $x \longmapsto u^* x u$, en donde $u \in \mathcal{C}(\mathbb{H})$ es unitario, se llama un **automorfismo interno**. Un automorfismo que no es interno se llama **automorfismo externo**.

Instituto Politécnico Nacional

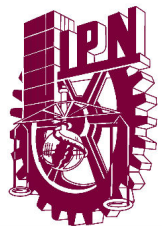
Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Sea $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ el álgebra C* de operadores acotados en $\mathbb{H}$, y sea $\mathcal{K}(\mathbb{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{H})$ el ideal de operadores compactos (que mandan conjuntos acotados en conjuntos totalmente acotados).

Definición

El **álgebra de Calkin** *es el álgebra cociente* $\mathcal{C}(\mathbb{H}) := \mathcal{B}(\mathbb{H})/\mathcal{K}(\mathbb{H})$.

Miramos el grupo de automorfismos de $\mathcal{C}(\mathbb{H})$. Un automorfismo de la forma $x \longmapsto u^* x u$, en donde $u \in \mathcal{C}(\mathbb{H})$ es unitario, se llama un **automorfismo interno**. Un automorfismo que no es interno se llama **automorfismo externo**.

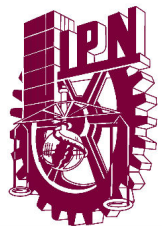
Pregunta: ¿Cuántos, y cuáles, automorfismos externos existen?



Instituto Politécnico Nacional

Teorema (Phillips–Weaver, 2006)

CH *implica que existe un automorfismo externo de* $C(\mathbb{H})$.



Instituto Politécnico Nacional

Teorema (Phillips–Weaver, 2006)

CH *implica que existe un automorfismo externo de* $C(\mathbb{H})$. *En particular, la existencia de un automorfismo externo es consistente con* ZFE.

Instituto Politécnico Nacional

Teorema (Phillips–Weaver, 2006)

CH *implica que existe un automorfismo externo de* $\mathcal{C}(\mathbb{H})$*. En particular, la existencia de un automorfismo externo es consistente con* ZFE*.*

Teorema (Farah, 2011)

El enunciado "todo automorfismo de $\mathcal{C}(\mathbb{H})$ *es interno" es consistente con* ZFE*.*

Instituto Politécnico Nacional

Teorema (Phillips–Weaver, 2006)

CH *implica que existe un automorfismo externo de* $\mathcal{C}(\mathbb{H})$*. En particular, la existencia de un automorfismo externo es consistente con* ZFE*.*

Teorema (Farah, 2011)

El enunciado "todo automorfismo de $\mathcal{C}(\mathbb{H})$ *es interno" es consistente con* ZFE*. (Es consecuencia del* Axioma del Forzamiento Apropiado*, o incluso del* Axioma del Grafo Abierto*.)*

Instituto Politécnico Nacional

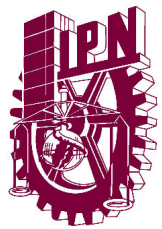
Teorema (Phillips–Weaver, 2006)

CH *implica que existe un automorfismo externo de* $\mathcal{C}(\mathbb{H})$*. En particular, la existencia de un automorfismo externo es consistente con* ZFE*.*

Teorema (Farah, 2011)

El enunciado "todo automorfismo de $\mathcal{C}(\mathbb{H})$ *es interno" es consistente con* ZFE*. (Es consecuencia del* Axioma del Forzamiento Apropiado*, o incluso del* Axioma del Grafo Abierto*.)*

En conclusión, la existencia de automorfismos externos de $\mathcal{C}(\mathbb{H})$ es indecidible de los axiomas de ZFE.

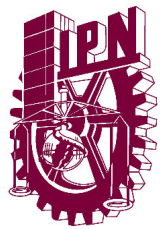


Instituto Politécnico Nacional

Instituto Politécnico Nacional

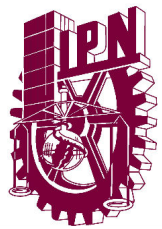
Recordemos: El **grado de trascendencia** de una extensión de campos F/k, denotado $\mathrm{trdg}(F/k)$,

Recordemos: El **grado de trascendencia** de una extensión de campos F/k, denotado $\mathrm{trdg}(F/k)$, el la cardinalidad de una *base de trascendencia* de F sobre k



Instituto Politécnico Nacional

Recordemos: El **grado de trascendencia** de una extensión de campos F/k, denotado $\mathrm{trdg}(F/k)$, el la cardinalidad de una *base de trascendencia* de F sobre k (es decir, de un $S \subseteq F$ que es algebraicamente independiente sobre k y tal que $k(S)/k$ es una extensión algebraica).



Instituto Politécnico Nacional

Recordemos: El **grado de trascendencia** de una extensión de campos F/k, denotado $\mathrm{trdg}(F/k)$, el la cardinalidad de una *base de trascendencia* de F sobre k (es decir, de un $S \subseteq F$ que es algebraicamente independiente sobre k y tal que $k(S)/k$ es una extensión algebraica).

La Conjetura de Schanuel:

Instituto Politécnico Nacional

Recordemos: El **grado de trascendencia** de una extensión de campos F/k, denotado $\mathrm{trdg}(F/k)$, el la cardinalidad de una *base de trascendencia* de F sobre k (es decir, de un $S \subseteq F$ que es algebraicamente independiente sobre k y tal que $k(S)/k$ es una extensión algebraica).

La Conjetura de Schanuel: Dados $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, se cumple que

$$\mathrm{trdg}(\mathbb{Q}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})) \geq n.$$

Instituto Politécnico Nacional

Recordemos: El **grado de trascendencia** de una extensión de campos F/k, denotado $\mathrm{trdg}(F/k)$, el la cardinalidad de una *base de trascendencia* de F sobre k (es decir, de un $S \subseteq F$ que es algebraicamente independiente sobre k y tal que $k(S)/k$ es una extensión algebraica).

La Conjetura de Schanuel: Dados $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, se cumple que

$$\mathrm{trdg}(\mathbb{Q}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})) \geq n.$$

(El caso particular cuando los $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son todos algebraicos se conoce como el **Teorema de Lindemann–Weierstraß**.)

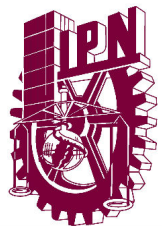
Instituto Politécnico Nacional

Recordemos: El **grado de trascendencia** de una extensión de campos F/k, denotado $\mathrm{trdg}(F/k)$, el la cardinalidad de una *base de trascendencia* de F sobre k (es decir, de un $S \subseteq F$ que es algebraicamente independiente sobre k y tal que $k(S)/k$ es una extensión algebraica).

La Conjetura de Schanuel: Dados $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, se cumple que

$$\mathrm{trdg}(\mathbb{Q}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})) \geq n.$$

(El caso particular cuando los $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son todos algebraicos se conoce como el **Teorema de Lindemann–Weierstraß**.) Una demostración de esta conjetura tendría muchas consecuencias interesantes,



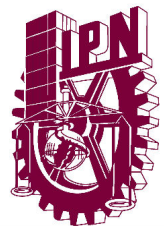
Instituto Politécnico Nacional

Recordemos: El **grado de trascendencia** de una extensión de campos F/k, denotado $\mathrm{trdg}(F/k)$, el la cardinalidad de una *base de trascendencia* de F sobre k (es decir, de un $S \subseteq F$ que es algebraicamente independiente sobre k y tal que $k(S)/k$ es una extensión algebraica).

La Conjetura de Schanuel: Dados $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, se cumple que

$$\mathrm{trdg}(\mathbb{Q}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})) \geq n.$$

(El caso particular cuando los $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son todos algebraicos se conoce como el **Teorema de Lindemann–Weierstraß**.) Una demostración de esta conjetura tendría muchas consecuencias interesantes, por ejemplo, que e y π son algebraicamente independientes.



Instituto Politécnico Nacional

Una *forma débil* de la conjetura de Schanuel sería la siguiente:

Instituto Politécnico Nacional

Una *forma débil* de la conjetura de Schanuel sería la siguiente:

Teorema (Wilkie, Kirby)

Existe un campo $k \subseteq \mathbb{C}$ numerable, algebraica y exponencialmente cerrado, tal que $\operatorname{trdg}(k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})) \geq n$ siempre que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Instituto Politécnico Nacional

Una *forma débil* de la conjetura de Schanuel sería la siguiente:

Teorema (Wilkie, Kirby)

Existe un campo $k \subseteq \mathbb{C}$ numerable, algebraica y exponencialmente cerrado, tal que $\operatorname{trdg}(k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})) \geq n$ siempre que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Demostración del teorema anterior por Viale:

Instituto Politécnico Nacional

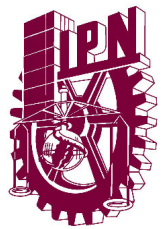
Una *forma débil* de la conjetura de Schanuel sería la siguiente:

Teorema (Wilkie, Kirby)

Existe un campo $k \subseteq \mathbb{C}$ numerable, algebraica y exponencialmente cerrado, tal que $\operatorname{trdg}(k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})) \geq n$ siempre que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Demostración del teorema anterior por Viale:

1. Realizar una construcción de forzamiento



Instituto Politécnico Nacional

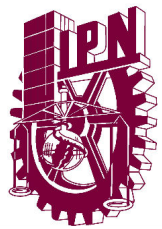
Una *forma débil* de la conjetura de Schanuel sería la siguiente:

Teorema (Wilkie, Kirby)

Existe un campo $k \subseteq \mathbb{C}$ numerable, algebraica y exponencialmente cerrado, tal que $\operatorname{trdg}(k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})) \geq n$ siempre que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Demostración del teorema anterior por Viale:

1. Realizar una construcción de forzamiento (colapso de Lévy)



Instituto Politécnico Nacional

Una *forma débil* de la conjetura de Schanuel sería la siguiente:

Teorema (Wilkie, Kirby)

Existe un campo $k \subseteq \mathbb{C}$ numerable, algebraica y exponencialmente cerrado, tal que $\operatorname{trdg}(k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})) \geq n$ siempre que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Demostración del teorema anterior por Viale:

1. Realizar una construcción de forzamiento (colapso de Lévy) para obtener $\mathbf{V}[G] \supseteq \mathbf{V}$ tal que $k := \mathbb{C} \cap \mathbf{V}$ es numerable.

Instituto Politécnico Nacional

Una *forma débil* de la conjetura de Schanuel sería la siguiente:

Teorema (Wilkie, Kirby)

Existe un campo $k \subseteq \mathbb{C}$ numerable, algebraica y exponencialmente cerrado, tal que $\operatorname{trdg}(k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})) \geq n$ siempre que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Demostración del teorema anterior por Viale:

1. Realizar una construcción de forzamiento (colapso de Lévy) para obtener $\mathbf{V}[G] \supseteq \mathbf{V}$ tal que $k := \mathbb{C} \cap \mathbf{V}$ es numerable.
2. En $\mathbf{V}[G]$, tenemos que k es numerable, algebraica y exponencialmente cerrado.

Instituto Politécnico Nacional

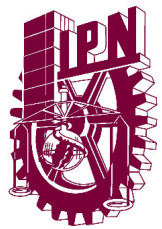
Una *forma débil* de la conjetura de Schanuel sería la siguiente:

Teorema (Wilkie, Kirby)

Existe un campo $k \subseteq \mathbb{C}$ numerable, algebraica y exponencialmente cerrado, tal que $\operatorname{trdg}(k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})) \geq n$ siempre que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Demostración del teorema anterior por Viale:

1. Realizar una construcción de forzamiento (colapso de Lévy) para obtener $\mathbf{V}[G] \supseteq \mathbf{V}$ tal que $k := \mathbb{C} \cap \mathbf{V}$ es numerable.
2. En $\mathbf{V}[G]$, tenemos que k es numerable, algebraica y exponencialmente cerrado.
3. Además, se satisface la conjetura de Schanuel sobre k (básicamente, todo elemento de $\mathbb{C} \setminus k$ es muy, muy indescriptible en términos de k).



Instituto Politécnico Nacional

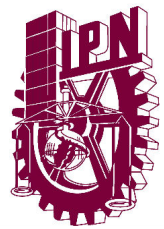
Una *forma débil* de la conjetura de Schanuel sería la siguiente:

Teorema (Wilkie, Kirby)

Existe un campo $k \subseteq \mathbb{C}$ numerable, algebraica y exponencialmente cerrado, tal que $\operatorname{trdg}(k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})) \geq n$ siempre que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Demostración del teorema anterior por Viale:

1. Realizar una construcción de forzamiento (colapso de Lévy) para obtener $\mathbf{V}[G] \supseteq \mathbf{V}$ tal que $k := \mathbb{C} \cap \mathbf{V}$ es numerable.
2. En $\mathbf{V}[G]$, tenemos que k es numerable, algebraica y exponencialmente cerrado.
3. Además, se satisface la conjetura de Schanuel sobre k (básicamente, todo elemento de $\mathbb{C} \setminus k$ es muy, muy indescriptible en términos de k).
4. Por lo tanto, el enunciado del teorema de Wilkie y Kirby es consistente con ZFE.



Instituto Politécnico Nacional

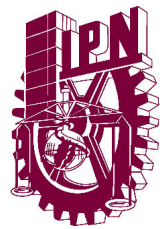
Una *forma débil* de la conjetura de Schanuel sería la siguiente:

Teorema (Wilkie, Kirby)

Existe un campo $k \subseteq \mathbb{C}$ numerable, algebraica y exponencialmente cerrado, tal que $\mathrm{trdg}(k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})) \geq n$ siempre que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Demostración del teorema anterior por Viale:

1. Realizar una construcción de forzamiento (colapso de Lévy) para obtener $\mathbf{V}[G] \supseteq \mathbf{V}$ tal que $k := \mathbb{C} \cap \mathbf{V}$ es numerable.
2. En $\mathbf{V}[G]$, tenemos que k es numerable, algebraica y exponencialmente cerrado.
3. Además, se satisface la conjetura de Schanuel sobre k (básicamente, todo elemento de $\mathbb{C} \setminus k$ es muy, muy indescriptible en términos de k).
4. Por lo tanto, el enunciado del teorema de Wilkie y Kirby es consistente con ZFE.
5. Pero dicho enunciado tiene una complejidad baja,

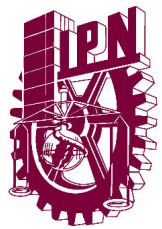


Instituto Politécnico Nacional

Una *forma débil* de la conjetura de Schanuel sería la siguiente:

Demostración del teorema anterior por Viale:

1. Realizar una construcción de forzamiento (colapso de Lévy) para obtener $\mathbf{V}[G] \supseteq \mathbf{V}$ tal que $k := \mathbb{C} \cap \mathbf{V}$ es numerable.
2. En $\mathbf{V}[G]$, tenemos que k es numerable, algebraica y exponencialmente cerrado.
3. Además, se satisface la conjetura de Schanuel sobre k (básicamente, todo elemento de $\mathbb{C} \setminus k$ es muy, muy indescriptible en términos de k).
4. Por lo tanto, el enunciado del teorema de Wilkie y Kirby es consistente con ZFE.
5. Pero dicho enunciado tiene una complejidad baja, y por lo tanto, por el *teorema de absolutez de Schoenfield*, es *absoluto*



Instituto Politécnico Nacional

Una *forma débil* de la conjetura de Schanuel sería la siguiente:

Demostración del teorema anterior por Viale:

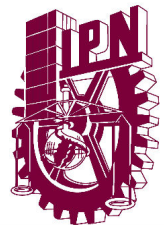
1. Realizar una construcción de forzamiento (colapso de Lévy) para obtener $\mathbf{V}[G] \supseteq \mathbf{V}$ tal que $k := \mathbb{C} \cap \mathbf{V}$ es numerable.
2. En $\mathbf{V}[G]$, tenemos que k es numerable, algebraica y exponencialmente cerrado.
3. Además, se satisface la conjetura de Schanuel sobre k (básicamente, todo elemento de $\mathbb{C} \setminus k$ es muy, muy indescriptible en términos de k).
4. Por lo tanto, el enunciado del teorema de Wilkie y Kirby es consistente con ZFE.
5. Pero dicho enunciado tiene una complejidad baja, y por lo tanto, por el *teorema de absolutez de Schoenfield*, es *absoluto* (si es consistente con ZFE entonces es un teorema de ZFE).

Instituto Politécnico Nacional

Una *forma débil* de la conjetura de Schanuel sería la siguiente:

Demostración del teorema anterior por Viale:

1. Realizar una construcción de forzamiento (colapso de Lévy) para obtener $\mathbf{V}[G] \supseteq \mathbf{V}$ tal que $k := \mathbb{C} \cap \mathbf{V}$ es numerable.
2. En $\mathbf{V}[G]$, tenemos que k es numerable, algebraica y exponencialmente cerrado.
3. Además, se satisface la conjetura de Schanuel sobre k (básicamente, todo elemento de $\mathbb{C} \setminus k$ es muy, muy indescriptible en términos de k).
4. Por lo tanto, el enunciado del teorema de Wilkie y Kirby es consistente con ZFE.
5. Pero dicho enunciado tiene una complejidad baja, y por lo tanto, por el *teorema de absolutez de Schoenfield*, es *absoluto* (si es consistente con ZFE entonces es un teorema de ZFE).
6. Por lo tanto, el enunciado es un teorema de ZFE.



Instituto Politécnico Nacional

En conclusión...

Instituto Politécnico Nacional

En conclusión...

Hacer Matemáticas sin saber Teoría de Conjuntos

Hacer Matemáticas utilizando herramientas conjuntistas

Instituto Politécnico Nacional

En conclusión...

Hacer Matemáticas sin saber Teoría de Conjuntos

Hacer Matemáticas utilizando herramientas conjuntistas

¡¡¡Muchísimas gracias!!!

Instituto Politécnico Nacional