La relación entre Ultrafiltros y Teoremas Tipo Ramsey

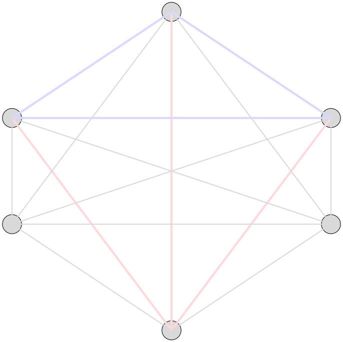
David J. Fernández Bretón

Department of Mathematics and Statistics
York University

Facultad de Ciencias UNAM
20 de marzo de 2014

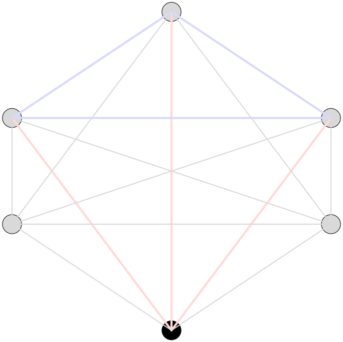
Teorema

En toda fiesta con al menos 6 personas, es posible encontrar 3 tales que o bien todas ellas se conocen entre sí, o bien ninguna de ellas se conoce mutuamente.



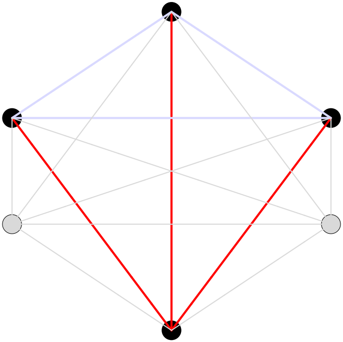
Teorema

En toda fiesta con al menos 6 personas, es posible encontrar 3 tales que o bien todas ellas se conocen entre sí, o bien ninguna de ellas se conoce mutuamente.



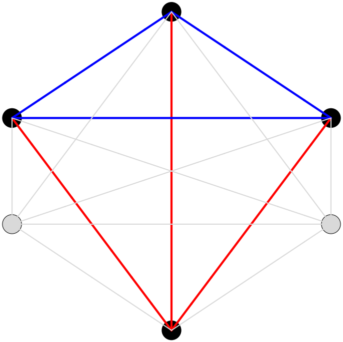
Teorema

En toda fiesta con al menos 6 personas, es posible encontrar 3 tales que o bien todas ellas se conocen entre sí, o bien ninguna de ellas se conoce mutuamente.



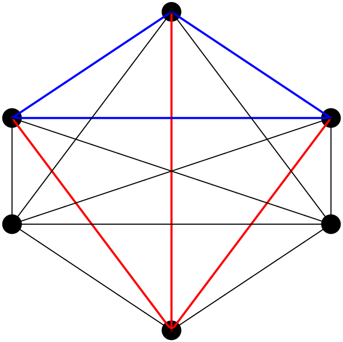
Teorema

En toda fiesta con al menos 6 personas, es posible encontrar 3 tales que o bien todas ellas se conocen entre sí, o bien ninguna de ellas se conoce mutuamente.



Teorema

En toda fiesta con al menos 6 personas, es posible encontrar 3 tales que o bien todas ellas se conocen entre sí, o bien ninguna de ellas se conoce mutuamente.



En notación húngara, lo anterior se escribe:

$$6 \longrightarrow (3)^2_2$$

Teorema (Ramsey)

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})\left(m \longrightarrow (n)^2_2\right)$$

Teorema (Ramsey)

$$\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)^2_2$$

En notación húngara, lo anterior se escribe:

$$6 \longrightarrow (3)^2_2$$

Teorema (Ramsey)

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})\left(m \longrightarrow (n)^2_2\right)$$

Teorema (Ramsey)

$$\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)^2_2$$

Teorema (van der Waerden)

Supóngase que coloreamos a los números naturales con dos colores. Entonces es posible encontrar sucesiones aritméticas arbitrariamente largas cuyos elementos son todos del mismo color.

Teorema (Hindman)

Supóngase que coloreamos a los números naturales con dos colores. Entonces es posible encontrar un conjunto finito $X \subseteq \mathbb{N}$ cuyos elementos, junto con todas las posibles sumas finitas de ellos, son del mismo color.

Definición

*Si X es un conjunto y $\mathcal{X}$ es una familia de subconjuntos de X, entonces decimos que $\mathcal{X}$ es **partición-regular sobre** X si:*

- $(\forall A \in \mathcal{X})(\forall B \subseteq X)(A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{X})$.
- *Para todo $A \in \mathcal{X}$ se cumple que: siempre que partimos a A en dos celdas, una de las celdas es miembro de $\mathcal{X}$ (siempre que $A = A_0 \cup A_1$ hay un $i \in \{0, 1\}$ tal que $A_i \in \mathcal{X}$).*

La Teoría de Ramsey es la indagación de cuáles son las propiedades partición-regulares...

Sea X un conjunto no vacío.

Definición

*Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ es un **filtro** si:*

- $(\forall A \in \mathcal{F})(\forall B \subseteq X)(A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F})$.
- $(\forall A, B \in \mathcal{F})(A \cap B \in \mathcal{F})$.

Definición

*Una familia $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ es un **ideal** si:*

- $(\forall A \in \mathcal{I})(\forall B \subseteq X)(A \supseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{I})$.
- $(\forall A, B \in \mathcal{I})(A \cup B \in \mathcal{I})$.

Sea X un conjunto no vacío.

Definición

*Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ es un **filtro** si:*

- $(\forall A \in \mathcal{F})(\forall B \subseteq X)(A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F})$.
- $(\forall A, B \in \mathcal{F})(A \cap B \in \mathcal{F})$.

Definición

*Una familia $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ es un **ideal** si:*

- $(\forall A \in \mathcal{I})(\forall B \subseteq X)(A \supseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{I})$.
- $(\forall A, B \in \mathcal{I})(A \cup B \in \mathcal{I})$.

Definición

Una familia $\mathcal{X} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ *es un* ***coideal*** *si* $\mathfrak{P}(X) \setminus \mathcal{X}$ *es un ideal.*

Definición

Una familia $\mathcal{U} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ *es un* ***ultrafiltro*** *si es un filtro y además es* $\subseteq$*-maximal entre los filtros. Equivalentemente, si siempre que* $\mathcal{U} \ni X = X_0 \cup X_1$ *hay un* $i \in \{0, 1\}$ *tal que* $X_i \in \mathcal{U}$*.*

Teorema

Si $\mathcal{X}$ es una familia de subconjuntos de X, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- *$\mathcal{X}$ es partición-regular,*
- *$\mathcal{X}$ es un coideal,*
- *todo filtro $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$ puede extenderse a un ultrafiltro $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$.*

Para $X \subseteq \mathbb{N}$,

$$\mathrm{FS}(X) = \left\{ \sum_{x \in F} x \middle| F \in [X]^{<\omega} \setminus \{\varnothing\} \right\}.$$

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ es un **IP-conjunto** si para algún $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito, $\mathrm{FS}(X) \subseteq A$.

Teorema (Hindman)

Si A es un IP-conjunto y $A = A_0 \cup A_1$, entonces hay un $i \in \{0, 1\}$ tal que A_i es un IP-conjunto. En otras palabras, la familia

$$\mathcal{X}_{\mathrm{IP}} = \{A \subseteq \mathbb{N} \,|\, A \text{ es un IP} - \text{conjunto}\}$$

es partición-regular.

$\beta\mathbb{N}$ es el conjunto de todos los ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$. Lo topologizamos declarando que, para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, el conjunto

$$\bar{A} = \{p \in \beta\mathbb{N} \big| A \in p\}$$

es un abierto básico. Identificamos cada $n \in \mathbb{N}$ con el ultrafiltro principal

$$\{A \subseteq G \big| x \in A\}.$$

Entonces $\beta\mathbb{N}$ es la **compactación de Čech-Stone** de $\mathbb{N}$.

Es posible extender la operación $+$ de $\mathbb{N}$ a todo $\beta\mathbb{N}$. La fórmula es:

$$p+q=\{A\subseteq G\big|\{x\in G\big|A-x\in q\}\in p\},$$

y con esta operación, $\beta\mathbb{N}$ es un semigrupo topológico-derecho.

Lema

Si $p\in\beta\mathbb{N}$ es idempotente (es decir, $p+p=p$), entonces para todo $A\in p$ existe un conjunto infinito $X\subseteq\mathbb{N}$ tal que $\mathrm{FS}(X)\subseteq A$. En otras palabras, $p\subseteq\mathcal{X}_{\mathrm{IP}}$.

Teorema

Sea $p \in \beta\mathbb{N}$. Entonces, $p \subseteq \mathcal{X}_{\mathrm{IP}}$ si y sólo si p es un punto de adherencia del conjunto de idempotentes en $\beta\mathbb{N}$.

Corolario

El Teorema de Hindman es equivalente a la existencia de idempotentes en $\beta\mathbb{N}$.

Teorema (Lema de Ellis-Numakura)

Todo semigrupo topológico-derecho compacto tiene idempotentes.

Teorema

Sea $p \in \beta\mathbb{N}$. Entonces, $p \subseteq \mathcal{X}_{\mathrm{IP}}$ si y sólo si p es un punto de adherencia del conjunto de idempotentes en $\beta\mathbb{N}$.

Corolario

El Teorema de Hindman es equivalente a la existencia de idempotentes en $\beta\mathbb{N}$.

Teorema (Lema de Ellis-Numakura)

Todo semigrupo topológico-derecho compacto tiene idempotentes.