

# Forzamiento y la Hipótesis del Continuo

David J. Fernández Bretón

Department of Mathematics and Statistics  
York University

Seminario de Estudiantes  
Cinvestav, 19 de marzo de 2014



## Hipótesis del Continuo

*Todo subconjunto infinito de  $\mathbb{R}$  es o bien numerable o bien equipotente con  $\mathbb{R}$ .*

## Pregunta (Cantor, Hilbert)

*¿Es verdadera o falsa la hipótesis del continuo?*

## Teorema (Gödel 1939)

*Es imposible demostrar la falsedad de la hipótesis del continuo usando únicamente los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos (ZFE).*

## Teorema (Cohen 1960)

*Es imposible demostrar la hipótesis del continuo usando únicamente los axiomas de ZFE.*

## Hipótesis del Continuo

*Todo subconjunto infinito de  $\mathbb{R}$  es o bien numerable o bien equipotente con  $\mathbb{R}$ .*

## Pregunta (Cantor, Hilbert)

*¿Es verdadera o falsa la hipótesis del continuo?*

## Teorema (Gödel 1939)

*Es imposible demostrar la falsedad de la hipótesis del continuo usando únicamente los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos (ZFE).*

## Teorema (Cohen 1960)

*Es imposible demostrar la hipótesis del continuo usando únicamente los axiomas de ZFE.*

## Definición

**El Alfabeto de la Teoría de Conjuntos** consta de los siguientes símbolos:

- **Conectivas Lógicas:**  $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \iff$ .
- **Cuantificadores:**  $\forall, \exists$ .
- **Delimitadores:**  $), ($ .
- **Símbolos de Variable:**  $x, y, z, \dots$
- **Símbolos de Relación:**  $=, \in$ .

## Definición

**El Lenguaje de la Teoría de Conjuntos (LTC)** consta de todas las Fórmulas Bien Formadas (FBF), que se definen de manera recursiva:

- *Dados dos símbolos de variable  $x$  y  $y$ ,  $x = y$  y  $x \in y$  son FBF.*
- *Si  $\psi, \varphi$  son FBF entonces también lo son  $\neg(\psi)$ ,  $(\psi) \wedge (\varphi)$ ,  $(\psi) \vee (\varphi)$ ,  $(\psi) \Rightarrow (\varphi)$  y  $(\psi) \iff (\varphi)$ .*
- *Si  $\psi$  es una FBF y  $x$  es un símbolo de variable, entonces  $(\forall x)(\psi)$  y  $(\exists x)(\psi)$  es una FBF.*

## Definición

El **Alfabeto de la Teoría de Conjuntos** consta de los siguientes símbolos:

- *Conectivas Lógicas:*  $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \iff$ .
- *Cuantificadores:*  $\forall, \exists$ .
- *Delimitadores:*  $), ($ .
- *Símbolos de Variable:*  $x, y, z, \dots$
- *Símbolos de Relación:*  $=, \in$ .

## Definición

El **Lenguaje de la Teoría de Conjuntos (LTC)** consta de todas las *Fórmulas Bien Formadas (FBF)*, que se definen de manera recursiva:

- *Dados dos símbolos de variable  $x$  y  $y$ ,  $x = y$  y  $x \in y$  son FBF.*
- *Si  $\psi, \varphi$  son FBF entonces también lo son  $\neg(\psi)$ ,  $(\psi) \wedge (\varphi)$ ,  $(\psi) \vee (\varphi)$ ,  $(\psi) \Rightarrow (\varphi)$  y  $(\psi) \iff (\varphi)$ .*
- *Si  $\psi$  es una FBF y  $x$  es un símbolo de variable, entonces  $(\forall x)(\psi)$  y  $(\exists x)(\psi)$  es una FBF.*

*Reglas de Inferencia:* Reglas que relacionan cierta fórmula con una cantidad finita de otras fórmulas, diciendo que la primera **se sigue** de las otras o bien que las últimas implican la primera.

### Ejemplo (Modus Ponens)

La fórmula  $\psi$  se sigue de las fórmulas  $(\varphi) \Rightarrow (\psi)$  y  $\varphi$ .

### Ejemplo (Generalización Existencial)

La fórmula  $(\exists x)(\psi[x])$  se sigue de la fórmula  $\psi[a]$ .

### Definición

Si  $\Psi$  es un conjunto de fórmulas (axiomas) y  $\psi$  otra fórmula, una **demostración** de  $\psi$  desde  $\Psi$  es una sucesión finita de fórmulas  $\psi_1, \dots, \psi_n$  tal que  $\psi_n = \psi$  y cada fórmula  $\psi_i$  o bien pertenece a  $\Psi$ , o bien se sigue de algunas de las  $\psi_j$  con  $j < i$ . Si existe una demostración de  $\psi$  desde  $\Psi$ , esto lo denotamos  $\Psi \vdash \psi$  (y si no, entonces es  $\Psi \not\vdash \psi$ ).

*Reglas de Inferencia:* Reglas que relacionan cierta fórmula con una cantidad finita de otras fórmulas, diciendo que la primera **se sigue** de las otras o bien que las últimas implican la primera.

### Ejemplo (Modus Ponens)

La fórmula  $\psi$  se sigue de las fórmulas  $(\varphi) \Rightarrow (\psi)$  y  $\varphi$ .

### Ejemplo (Generalización Existencial)

La fórmula  $(\exists x)(\psi[x])$  se sigue de la fórmula  $\psi[a]$ .

### Definición

Si  $\Psi$  es un conjunto de fórmulas (axiomas) y  $\psi$  otra fórmula, una **demostración** de  $\psi$  desde  $\Psi$  es una sucesión finita de fórmulas  $\psi_1, \dots, \psi_n$  tal que  $\psi_n = \psi$  y cada fórmula  $\psi_i$  o bien pertenece a  $\Psi$ , o bien se sigue de algunas de las  $\psi_j$  con  $j < i$ . Si existe una demostración de  $\psi$  desde  $\Psi$ , esto lo denotamos  $\Psi \vdash \psi$  (y si no, entonces es  $\Psi \not\vdash \psi$ ).

## Definición

Un **modelo** es una terna ordenada  $\mathfrak{M} = (M, E, \iota)$  tal que  $M$  es un conjunto no vacío,  $\iota$  es una función que a cada símbolo de variable le asigna un elemento de  $M$ , y  $E$  es una relación binaria en  $M$ .

## Definición

Si  $\mathfrak{M}$  es un modelo y  $\psi$  es una fórmula de LTC, escribiremos que  $\mathfrak{M} \models \psi$  si  $\mathfrak{M}$  **satisface** la fórmula  $\psi$ .

## Definición

Si  $\Psi$  es un conjunto de fórmulas, y  $\psi$  es otra fórmula, entonces decimos que  $\Psi \models \psi$  si para todo modelo  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{M} \models \Psi$  implica que  $\mathfrak{M} \models \psi$ .



## Definición

Un **modelo** es una terna ordenada  $\mathfrak{M} = (M, E, \iota)$  tal que  $M$  es un conjunto no vacío,  $\iota$  es una función que a cada símbolo de variable le asigna un elemento de  $M$ , y  $E$  es una relación binaria en  $M$ .

## Definición

Si  $\mathfrak{M}$  es un modelo y  $\psi$  es una fórmula de LTC, escribiremos que  $\mathfrak{M} \models \psi$  si  $\mathfrak{M}$  **satisface** la fórmula  $\psi$ .

## Definición

Si  $\Psi$  es un conjunto de fórmulas, y  $\psi$  es otra fórmula, entonces decimos que  $\Psi \models \psi$  si para todo modelo  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{M} \models \Psi$  implica que  $\mathfrak{M} \models \psi$ .

Sean  $\Psi$  un conjunto de fórmulas y  $\psi$  otra fórmula.

### Teorema (Correctud, Completud)

$\Psi \vdash \psi$  si y sólo si  $\Psi \models \psi$  (no confundir con incompletud de Gödel).

### Definición

Decimos que  $\Psi$  es **inconsistente** si para alguna fórmula  $\psi$ ,  $\Psi \vdash \psi$  y  $\Psi \vdash \neg(\psi)$  (equivalentemente, si  $\Psi \vdash \psi$  para toda fórmula  $\psi$ ). De lo contrario, decimos que  $\Psi$  es **consistente**.

### Teorema

$\Psi$  es consistente si y sólo si existe un modelo  $\mathfrak{M}$  tal que  $\mathfrak{M} \models \Psi$ .

Sean  $\Psi$  un conjunto de fórmulas y  $\psi$  otra fórmula.

### Teorema (Correctud, Completud)

$\Psi \vdash \psi$  si y sólo si  $\Psi \models \psi$  (no confundir con incompletud de Gödel).

### Definición

Decimos que  $\Psi$  es **inconsistente** si para alguna fórmula  $\psi$ ,  $\Psi \vdash \psi$  y  $\Psi \vdash \neg(\psi)$  (equivalentemente, si  $\Psi \vdash \psi$  para toda fórmula  $\psi$ ). De lo contrario, decimos que  $\Psi$  es **consistente**.

### Teorema

$\Psi$  es consistente si y sólo si existe un modelo  $\mathfrak{M}$  tal que  $\mathfrak{M} \models \Psi$ .

## Teorema (Gödel, Cohen)

Denotemos por HC la fórmula que expresa la hipótesis del continuo. Supongamos que existe un modelo  $\mathfrak{M}$  tal que  $\mathfrak{M} \models \text{ZFE}$ . Entonces, hay modelos  $\mathfrak{M}'$  y  $\mathfrak{M}''$  tales que  $\mathfrak{M}' \models \text{ZFE} \cup \{\text{HC}\}$  y  $\mathfrak{M}'' \models \text{ZFE} \cup \{\neg\text{HC}\}$ .

## Definición

- Una **noción de forzamiento** es simplemente un conjunto preordenado  $(\mathbb{P}, \leq)$  (que satisface cierta condición técnica).
- A los elementos  $p \in \mathbb{P}$  les llamamos **condiciones** y cuando  $p \leq q$  decimos que  $p$  **extiende** a  $q$ .
- Un subconjunto  $D \subseteq \mathbb{P}$  es **denso** (coincial) si  $(\forall x \in \mathbb{P})(\exists y \in D)(y \leq x)$ .

## Teorema (Gödel, Cohen)

Denotemos por HC la fórmula que expresa la hipótesis del continuo. Supongamos que existe un modelo  $\mathfrak{M}$  tal que  $\mathfrak{M} \models \text{ZFE}$ . Entonces, hay modelos  $\mathfrak{M}'$  y  $\mathfrak{M}''$  tales que  $\mathfrak{M}' \models \text{ZFE} \cup \{\text{HC}\}$  y  $\mathfrak{M}'' \models \text{ZFE} \cup \{\neg\text{HC}\}$ .

## Definición

- Una **noción de forzamiento** es simplemente un conjunto preordenado  $(\mathbb{P}, \leq)$  (que satisface cierta condición técnica).
- A los elementos  $p \in \mathbb{P}$  les llamamos **condiciones** y cuando  $p \leq q$  decimos que  $p$  **extiende** a  $q$ .
- Un subconjunto  $D \subseteq \mathbb{P}$  es **denso** (coincial) si  $(\forall x \in \mathbb{P})(\exists y \in D)(y \leq x)$ .

## Teorema (Löwenheim-Skolem)

*Dado cualquier modelo  $\mathfrak{M}$ , es posible encontrar un modelo numerable  $\mathfrak{M}'$  (es decir, la primera coordenada  $M'$  de la terna ordenada  $\mathfrak{M}'$  es un conjunto numerable) tal que para todo enunciado (es decir, fórmula sin variables libres)  $\varphi$  se cumple que  $\mathfrak{M} \models \varphi$  si y sólo si  $\mathfrak{M}' \models \varphi$ .*

## Corolario (Paradoja de Skolem)

*Si ZFE es consistente (es decir, si hay un modelo que satisface los axiomas de ZFE) entonces existe un modelo  $\mathfrak{M} = (M, E, \iota)$  tal que  $M$  es numerable y tal que  $\mathfrak{M} \models \text{ZFE}$ .*

## Corolario (Teorema Fundamental del Forzamiento)

*Sea  $(M, \in)$  un modelo numerable de ZFE, y sea  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forzamiento. Entonces, es posible encontrar un filtro (un conjunto dirigido hacia abajo y cerrado por arriba)  $G \subseteq \mathbb{P}$  que intersecta a todos los subconjuntos  $D \subseteq \mathbb{P}$  que son densos y que son elementos de  $M$  (nota: la condición técnica en la definición de forzamiento garantiza que  $G \notin M$ ).*

## Teorema (Löwenheim-Skolem)

*Dado cualquier modelo  $\mathfrak{M}$ , es posible encontrar un modelo numerable  $\mathfrak{M}'$  (es decir, la primera coordenada  $M'$  de la terna ordenada  $\mathfrak{M}'$  es un conjunto numerable) tal que para todo enunciado (es decir, fórmula sin variables libres)  $\varphi$  se cumple que  $\mathfrak{M} \models \varphi$  si y sólo si  $\mathfrak{M}' \models \varphi$ .*

## Corolario (Paradoja de Skolem)

*Si ZFE es consistente (es decir, si hay un modelo que satisface los axiomas de ZFE) entonces existe un modelo  $\mathfrak{M} = (M, E, \iota)$  tal que  $M$  es numerable y tal que  $\mathfrak{M} \models \text{ZFE}$ .*

## Corolario (Teorema Fundamental del Forzamiento)

*Sea  $(M, \in)$  un modelo numerable de ZFE, y sea  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forzamiento. Entonces, es posible encontrar un filtro (un conjunto dirigido hacia abajo y cerrado por arriba)  $G \subseteq \mathbb{P}$  que intersecta a todos los subconjuntos  $D \subseteq \mathbb{P}$  que son densos y que son elementos de  $M$  (nota: la condición técnica en la definición de forzamiento garantiza que  $G \notin M$ ).*

## Teorema (Löwenheim-Skolem)

*Dado cualquier modelo  $\mathfrak{M}$ , es posible encontrar un modelo numerable  $\mathfrak{M}'$  (es decir, la primera coordenada  $M'$  de la terna ordenada  $\mathfrak{M}'$  es un conjunto numerable) tal que para todo enunciado (es decir, fórmula sin variables libres)  $\varphi$  se cumple que  $\mathfrak{M} \models \varphi$  si y sólo si  $\mathfrak{M}' \models \varphi$ .*

## Corolario (Paradoja de Skolem)

*Si ZFE es consistente (es decir, si hay un modelo que satisface los axiomas de ZFE) entonces existe un modelo  $\mathfrak{M} = (M, E, \iota)$  tal que  $M$  es numerable y tal que  $\mathfrak{M} \models \text{ZFE}$ .*

## Corolario (Teorema Fundamental del Forzamiento)

*Sea  $(M, \in)$  un modelo numerable de ZFE, y sea  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forzamiento. Entonces, es posible encontrar un filtro (un conjunto dirigido hacia abajo y cerrado por arriba)  $G \subseteq \mathbb{P}$  que intersecta a todos los subconjuntos  $D \subseteq \mathbb{P}$  que son densos y que son elementos de  $M$  (nota: la condición técnica en la definición de forzamiento garantiza que  $G \notin M$ ).*



Forzamiento

Teoría de Galois

Modelo base  $M$ Campo  $F$ Conjunto preordenado  $\mathbb{P}$ Polinomio  $p(x)$ Noción de Forzamiento  $\mathbb{P}$ Polinomio irreducible no lineal  $p(x)$ Filtro genérico  $G$ Raíz  $\alpha$  del polinomio  $p$ Extensión genérica  $M[G]$ Extensión de campos  $F(\alpha)$

## Definición

Sea  $X$  un conjunto de cardinalidad estrictamente mayor que  $\aleph_1$ . Nuestro conjunto preordenado será

$$\mathbb{P} = \{f : M \longrightarrow \{0, 1\} \mid M \subseteq X \times \mathbb{N} \text{ finito}\},$$

con el orden dado por  $f \leq g$  si y sólo si  $f \supseteq g$ .

## Definición

Si  $G$  es un ultrafiltro  $\mathbb{P}$ -genérico, entonces en  $M[G]$  definimos un subconjunto de  $\mathbb{N}$  por cada elemento  $x \in X$ , de la manera siguiente:

$$A_x = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists f \in G)((x, n) \in \text{dom}(f) \wedge f(x, n) = 1)\}$$

## Definición

Sea  $X$  un conjunto de cardinalidad estrictamente mayor que  $\aleph_1$ . Nuestro conjunto preordenado será

$$\mathbb{P} = \{f : M \longrightarrow \{0, 1\} \mid M \subseteq X \times \mathbb{N} \text{ finito}\},$$

con el orden dado por  $f \leq g$  si y sólo si  $f \supseteq g$ .

## Definición

Si  $G$  es un ultrafiltro  $\mathbb{P}$ -genérico, entonces en  $M[G]$  definimos un subconjunto de  $\mathbb{N}$  por cada elemento  $x \in X$ , de la manera siguiente:

$$A_x = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists f \in G)((x, n) \in \text{dom}(f) \wedge f(x, n) = 1)\}$$

**Lema**

Para cada  $(x, n) \in X \times \mathbb{N}$ , el conjunto

$$\{f \in \mathbb{P} \mid (x, n) \in \text{dom}(f)\}$$

es denso.

**Lema**

Para cada subconjunto  $B \subseteq N$  que es elemento de  $M$ , y para cada  $x \in X$ , el conjunto

$$\{f \in \mathbb{P} \mid (\exists n \in \mathbb{N})(f(x, n) \neq \chi_B)\}$$

es denso.

**Lema**

Para cada par de elementos distintos  $x, y \in X$ , el conjunto

$$\{f \in \mathbb{P} \mid (\exists n \in \mathbb{N})((x, n), (y, n) \in \text{dom}(f) \wedge f(x, n) \neq f(y, n))\}$$

es denso.

**Lema**

Para cada  $(x, n) \in X \times \mathbb{N}$ , el conjunto

$$\{f \in \mathbb{P} \mid (x, n) \in \text{dom}(f)\}$$

es denso.

**Lema**

Para cada subconjunto  $B \subseteq N$  que es elemento de  $M$ , y para cada  $x \in X$ , el conjunto

$$\{f \in \mathbb{P} \mid (\exists n \in \mathbb{N})(f(x, n) \neq \chi_B)\}$$

es denso.

**Lema**

Para cada par de elementos distintos  $x, y \in X$ , el conjunto

$$\{f \in \mathbb{P} \mid (\exists n \in \mathbb{N})((x, n), (y, n) \in \text{dom}(f) \wedge f(x, n) \neq f(y, n))\}$$

es denso.

**Lema**

Para cada  $(x, n) \in X \times \mathbb{N}$ , el conjunto

$$\{f \in \mathbb{P} \mid (x, n) \in \text{dom}(f)\}$$

es denso.

**Lema**

Para cada subconjunto  $B \subseteq N$  que es elemento de  $M$ , y para cada  $x \in X$ , el conjunto

$$\{f \in \mathbb{P} \mid (\exists n \in \mathbb{N})(f(x, n) \neq \chi_B)\}$$

es denso.

**Lema**

Para cada par de elementos distintos  $x, y \in X$ , el conjunto

$$\{f \in \mathbb{P} \mid (\exists n \in \mathbb{N})((x, n), (y, n) \in \text{dom}(f) \wedge f(x, n) \neq f(y, n))\}$$

es denso.

Como  $\{A_x \mid x \in X\}$  es una familia de subconjuntos distintos de  $\mathbb{N}$ , en la extensión genérica  $\mathbb{R}$  tiene cardinalidad al menos tan grande como  $X$ .

Sin embargo, algo pudo pasarle a la cardinalidad de  $X$  en el proceso...

### Lema

*La noción de forzamiento  $\mathbb{P}$  preserva cardinales debido a que es c.c.c.*








Como  $\{A_x \mid x \in X\}$  es una familia de subconjuntos distintos de  $\mathbb{N}$ , en la extensión genérica  $\mathbb{R}$  tiene cardinalidad al menos tan grande como  $X$ .

Sin embargo, algo pudo pasarle a la cardinalidad de  $X$  en el proceso...

## Lema

*La noción de forzamiento  $\mathbb{P}$  preserva cardinales debido a que es c.c.c.*



-  Bartoszyński, Tomek y Judah, Haim **Set Theory. On the Structure of the Real Line.** A. K. Peters, Massachusetts, 1995.
-  Devlin, Keith J. **The Axiom of Constructibility.** Lecture Notes in Mathematics (617), Springer-Verlag, 1977.
-  Hrbacek, Karel y Jech, Thomas **Introduction to set theory. 3rd. ed.,** Pure and Applied Mathematics (220), Marcel Dekker, 1999.
-  Jech, Thomas **Set Theory.** Pure and Applied Mathematics (79), Academic Press, 1978.
-  Kunen, Kenneth **Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.** Studies in Logic and the Foundations of Mathematics (102), Elsevier, 2006.
-  Shelah, Saharon **Proper and Improper Forcing,** Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, 1998.
-  Villegas Silva, Luis Miguel; Rojas Rebolledo, Diego y Miranda Perea, Favio Ezequiel; **Conjuntos y modelos.** Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa, 2000.