INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Existencia de ultrafiltros idempotentes a partir de construcciones límite y formas débiles de elección

T E S I S

que para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias Fisicomatemáticas

presenta:

Jesús Alberto Soria Rojas

Director de tesis:

Dr. David José Fernández Bretón

Ciudad de México, junio 2024

Instituto Politécnico Nacional

SIP-13
REP 2017

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
Dirección de Posgrado

*ACTA DE REGISTRO DE TEMA DE TESIS
Y DESIGNACIÓN DE DIRECTOR DE TESIS*

Ciudad de México, a 08 de marzo del 2024

El Colegio de Profesores de Posgrado de la Escuela Superior de Física y Matemáticas en su Sesión
(Unidad Académica)

Ordinaria No. 03 celebrada el día 20 del mes marzo de 2024, conoció la solicitud presentada por el (la) alumno (a):

Apellido Paterno:	SORIA	Apellido Materno:	ROJAS	Nombre (s):	JESÚS ALBERTO

Número de boleta: A 2 2 0 7 7 4

del Programa Académico de Posgrado: Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas

Referente al registro de su tema de tesis

1.- Se acordó aprobar el tema de tesis:

"Existencia de ultrafiltros idempotentes a partir de construcciones límite y formas débiles de elección"

Objetivo general del trabajo de tesis:

Presentar una demostración original de que no existen ultrafiltros idempotentes construidos a partir de un Q-punto, por medio de sumas Frolík-Blass.

2.- Se designa como Directores de Tesis a los profesores:

Director: DR. DAVID JOSÉ FERNÁNDEZ BRETÓN 2° Director:

No aplica: x

3.- El Trabajo de investigación base para el desarrollo de la tesis será elaborado por el alumno en:

la Escuela Superior de Física y Matemáticas

que cuenta con los recursos e infraestructura necesarios.

4.- El interesado deberá asistir a los seminarios desarrollados en el área de adscripción del trabajo desde la fecha en que se suscribe la presente, hasta la aprobación de la versión completa de la tesis por parte de la Comisión Revisora correspondiente.

Director(a) de Tesis	Director de Tesis (en su caso)
DR. DAVID JOSÉ FERNÁNDEZ BRETÓN	na
Alumno	**Presidente del Colegio**
JESÚS ALBERTO SORIA ROJAS	DR. MIGUEL NERI ROSAS

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
S.E.P.
DIRECCIÓN
ESCUELA SUPERIOR DE
FÍSICA Y MATEMÁTICAS
I.P.N.

SIP-14
REP 2017

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
Dirección de Posgrado

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 12:00 horas del día 24 del mes de mayo del 2024 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Posgrado de: Escuela Superior de Física y Matemáticas para examinar la tesis titulada: "Existencia de ultrafiltros idempotentes a partir de construcciones límite y formas débiles de elección" del (la) alumno (a):

Apellido Paterno:	SORIA	Apellido Materno:	ROJAS	Nombre (s):	JESÚS ALBERTO

Número de boleta: A 2 2 0 7 7 4

Alumno del Programa Académico de Posgrado: Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas

Una vez que se realizó un análisis de similitud de texto, utilizando el software antiplagio, se encontró que el trabajo de tesis tiene 4 % de similitud. **Se adjunta reporte de software utilizado.**

Después que esta Comisión revisó exhaustivamente el contenido, estructura, intención y ubicación de los textos de la tesis identificados como coincidentes con otros documentos, concluyó que en el presente trabajo **SI** [ ] **NO** [x] **SE CONSTITUYE UN POSIBLE PLAGIO.**

JUSTIFICACIÓN DE LA CONCLUSIÓN:

El trabajo constituye una investigación original del tema de ultrafiltros idempotentes con un enfoque novedoso propuesto por el asesor de tesis. La tesis contiene una recopilación de material estándar que se incluye como antecedentes, como es común en tesis de matemáticas, y posterior a este se encuentran los resultados originales.

****Es responsabilidad del alumno como autor de la tesis la verificación antiplagio, y del Director o Directores de tesis el análisis del % de similitud para establecer el riesgo o la existencia de un posible plagio.**

Finalmente y posterior a la lectura, revisión individual, así como el análisis e intercambio de opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR** [x] **SUSPENDER** [ ] **NO APROBAR** [ ] la tesis por **UNANIMIDAD** [x] o **MAYORÍA** [ ] en virtud de los motivos siguientes:

La tesis está escrita con la calidad esperada para una tesis de maestría en matemáticas. Además de esto, se incluyen resultados originales, lo cual es extraordinario para una tesis de maestría.

COMISIÓN REVISORA DE TESIS

DR. DAVID JOSÉ FERNÁNDEZ BRETÓN DIRECTOR DE TESIS	Rodrigo J. Hernández G. DR. RODRIGO JESÚS HERNÁNDEZ GUTIÉRREZ	DR. JOSÉ OSCAR GONZÁLEZ CERVANTES
DR. PABLO LAM ESTRADA	Max DR. EGOR MAXIMENKO	DR. MIGUEL NERI ROSAS **PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES**

DIRECCIÓN
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
I.P.N.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA DE AUTORIZACIÓN DE USO DE OBRA PARA DIFUSIÓN

En la Ciudad de México el día 12 del mes de junio del año 2024, el que suscribe Jesús Alberto Soria Rojas alumno del programa Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas con número de registro A220774, adscrito a la Escuela Superior de Física y Matemáticas manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de tesis bajo la dirección del Dr. David José Fernández Bretón y cede los derechos del trabajo intitulado "*Existencia de ultrafiltros idempotentes a partir de construcciones límite y formas débiles de elección"*, al Instituto Politécnico Nacional, para su difusión con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expresado del autor y/o director. Este puede ser obtenido escribiendo a las siguientes direcciones de correo:

jsoriar1400@alumno.ipn.mx

dfernandezb@ipn.mx

Si el permiso se otorga al usuario, deberá dar agradecimiento correspondiente y citar la fuente de este.

Jesús Alberto Soria Rojas

Nombre completo y firma autografá del (de la) estudiante

Resumen

El espacio $\beta\mathbb{N}$ —que consiste de todos los ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$— es la compactación Stone-Čech del más familiar de todos los semigrupos discretos. La primera parte de este trabajo se centra en presentar dicho espacio de una forma natural, explorando sus propiedades topológicas y algebraicas elementales, culminando con la prueba del Lema de Ellis-Numakura. El segundo capítulo está dedicado a describir una demostración, debida a Di Nasso y Tachtsis, de la existencia de idempotentes, en la que se evita el Lema de Zorn. En la segunda mitad del texto presentamos tres herramientas fundamentales en el estudio de ultrafiltros, a saber: el orden Rudin-Keisler, los ultrafiltros selectivos y la suma Frolík-Blass. Una vez presentadas dichas herramientas, la última parte está dedicada a presentar una prueba original de que no existen ultrafiltros idempotentes construidos a partir de un Q-punto, por medio de sumas Frolík-Blass.

Abstract

The space $\beta\mathbb{N}$, consisting of all ultrafilters over $\mathbb{N}$, is the Stone-Čech compactification of the most familiar of all discrete semigroups. The first part of this work focuses on presenting this space in a natural way, exploring its elementary topological and algebraic properties, culminating with the proof of the Ellis-Numakura's Lemma. The second chapter is dedicated to describing a proof, due to Di Nasso and Tachtsis, of the existence of idempotents, avoiding the use of Zorn's Lemma. In the second half of the text, we present three fundamental tools in the study of ultrafilters, namely: the Rudin-Keisler order, selective ultrafilters and the Frolík-Blass sum. Once these tools are introduced, the last part is dedicated to presenting an original proof that shows there are no idempotent ultrafilters constructed from a Q-point, via Frolík-Blass sums.

A mis padres y hermana
Adelina, Jesús y Alina

Cuán difícil es alcanzar la ignorancia
Proverbio chino

Agradecimientos

Estoy muy agradecido con el Dr. David Fernández por supervisar esta tesis y por haber sido instrumental en su desarrollo, así como por su paciencia y su tiempo. Su enseñanza me impulsó a mejorar en matemáticas.

Las palabras nunca serán suficientes para agradecer a mis padres por todo su apoyo; sin ellos, este trabajo no habría sido posible.

Índice general

Agradecimientos **9**

Introducción **13**

1. Hechos Preliminares **17**

1.1. Ultrafiltros . . . 17

1.2. El espacio $\beta\mathbb{N}$ . . . 21

1.3. La compactación de Stone-Čech . . . 23

1.4. El semigrupo topológico derecho $(\beta\mathbb{N}, +)$ . . . 25

2. Ultrafiltros idempotentes sin el Lema de Zorn **29**

2.1. Filtros aditivos . . . 31

2.2. Evitando el Lema de Zorn . . . 33

3. El orden Rudin-Keisler **37**

3.1. El producto tensorial . . . 40

3.2. Ultrafiltros selectivos . . . 41

4. Ningún idempotente a partir de un Q-punto **43**

4.1. q^n nunca es idempotente . . . 43

4.2. La suma Frolík-Blass de ultrafiltros . . . 46

4.3. q-bondad . . . 48

A. Teorema de Hindman **51**

B. Cardinalidad **53**

Bibliografía **55**

Introducción

Un ultrafiltro es una asignación de valores de verdad a la familia[1] de subconjuntos de un conjunto, es una familia maximal entre las familias con la propiedad de la intersección finita de un conjunto y es un método de convergencia al infinito. De la primera propiedad surge la conexión con la lógica y la teoría de modelos; de las segunda y tercera surge su conexión con la teoría de conjuntos y la topología. Todas estas descripciones de un ultrafiltro están conectadas con el concepto de compacidad. Su génesis se remonta a principios del siglo XX, con contribuciones fundacionales de luminarias como A. Tarski, J. Łoś y M. Stone. En los últimos cuarenta años, los ultrafiltros han sido estudiados extensivamente y se han convertido en herramientas fundamentales en diversas disciplinas matemáticas; desde la teoría de Ramsey y combinatoria aditiva hasta el álgebra conmutativa pasando por la teoría de modelos y la topología.

En 1971, F. Galvin fue el primero en darse cuenta que la existencia de ultrafiltros «casi invariantes bajo traslaciones» (lo que ahora conocemos como ultrafiltros idempotentes) implicaría la demostración de una conjetura de R. Graham y B. Rothschild: «Para cualquier coloración finita de los naturales existe un conjunto infinito X tal que todas las sumas finitas de elementos distintos de X tienen el mismo color» (esta conjetura se convertiría en una piedra angular de la teoría de Ramsey). En 1972, N. Hindman demostró que si se asume la hipótesis del continuo, entonces la conjetura de Graham-Rothschild implica la existencia de ultrafiltros casi invariantes bajo traslaciones y, en 1974, demostró, utilizando un complicado argumento combinatorio, la conjetura de Graham-Rotschild (ahora conocida como el Teorema de Hindman). Sin embargo, la existencia de ultrafiltros casi invariantes bajo traslaciones en ZFE no se descubrió hasta 1975. En una ocasión Galvin se encontró con S. Glazer y le preguntó si sabía algo sobre la existencia de tales ultrafiltros. Glazer respondió de inmediato de forma afirmativa. Galvin no lo podía creer; pensó que tal vez Glazer había malentendido la pregunta, pues la respuesta no podía ser tan fácil. La respuesta, en efecto, sí, era fácil y surge de tres hechos: el primero es que cualquier semigrupo topológico derecho compacto tiene idempotentes (esto se conoce como el Lema

[1]Utilizamos la frase «familia de conjuntos» como sinónimo de «conjunto de conjuntos».

de Ellis-Numakura); el segundo es que la compactación Stone-Čech de los naturales $\beta\mathbb{N}$ tiene una operación inherente que extiende la suma de $\mathbb{N}$, la cual hace a $(\beta\mathbb{N},+)$ un semigrupo topológico derecho; y el tercero es que el espacio $\beta\mathbb{N}$ se puede ver como el conjunto de ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$. Los primeros dos hechos eran relativamente conocidos pero del tercer hecho, muy poca gente sabía, Glazer era uno de esos pocos.

Así, los ultrafiltros resuenan profundamente en la compactación Stone-Čech de un semigrupo discreto, pues se interpretan como los puntos de dicho espacio y, en particular, los ultrafiltros idempotentes tienen un papel crucial en la teoría de Ramsey. La existencia de ultrafiltros no principales se sigue del axioma de elección (este hecho es conocido como el Teorema del Ultrafiltro: Todo filtro se puede extender a un ultrafiltro) y la existencia de elementos idempotentes en semigrupos topológicos compactos, es decir, el Lema de Ellis-Numakura, se sigue del Lema de Zorn. Por lo tanto, podemos ver que existe una intrincada relación entre la existencia de ultrafiltros idempotentes y el axioma de elección. Esto no es casual, el axioma de elección suele implicar la existencia de aquellos objetos matemáticamente «extremos». Y en estos casos surge la pregunta natural, ¿qué tanta *elección* se necesita para demostrar su existencia? O, dicho de otra forma, entre toda la fauna de formas débiles de elección, en dónde se clasifica tal existencia.

En 2017, M. Di Nasso y E. Tachtsis [4] mostraron que se puede suponer una forma más débil que el axioma de elección para probar dicha existencia. Definiendo una clase de filtros que llamaron aditivos, sin usar el Lema de Zorn y en cambio suponiendo el Teorema del Ultrafiltro para $\mathbb{R}$, denotado $\mathsf{TU}(\mathbb{R})$, probaron la existencia de ultrafiltros idempotentes. El método consiste en dos hechos clave. Primero mostraron, utilizando el Teorema del Ultrafiltro para $\mathbb{N}$, denotado $\mathsf{TU}(\mathbb{N})$, que si todo filtro aditivo puede ser extendido a un ultrafiltro por medio de una función de elección, entonces todo filtro aditivo puede ser extendido a un ultrafiltro idempotente. Y, por último, usando $\mathsf{TU}(\mathbb{R})$ construyeron una función de elección que extiende todo filtro a un ultrafiltro. Di Nasso y Tachtsis cierran su artículo con varias preguntas, entre ellas: ¿la existencia de un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$ implica la existencia de un ultrafiltro idempotente sobre $\mathbb{N}$? Responder dicha pregunta fue la motivación de este trabajo.

En la primera sección del Capítulo 1 exponemos los hechos fundamentales de ultrafiltros, usamos la definición estándar de ultrafiltro como filtro maximal. A partir de las siguientes secciones nos enfocamos principalmente en ultrafiltros sobre los naturales, introducimos el espacio $\beta\mathbb{N}$, analizamos sus propiedades topológicas elementales y después sus propiedades algebraicas. El capítulo cierra con la demostración del Lema Ellis-Numakura. El Capítulo 2, se puede considerar una digresión, no volvemos a utilizar los hechos ahí presentados y su finalidad es introducir la motivación de este trabajo. Está dedicado a formular los resultados de Di Nasso y Tachtsis en español; desde la definición de filtro aditivo, sus propiedades, hasta los complicados teoremas de extensión. El Capítulo 3 está dedicado al orden Rudin-Keisler, el cual es una herramienta fundamental que muestra que no todos los ultrafiltros fueron creados iguales. Mostramos sus propiedades elementales y cerramos el capítulo con la introducción de ultrafiltros selectivos, los cuales son minimales en $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ con respecto al orden Rudin-Keisler. Hacemos notar que dichos ultrafiltros son independientes de ZF. Es decir, existen modelos de ZF sin ultrafiltros selectivos y existen modelos con ultrafiltros selectivos. (Vea [2, 12, 13].)

En 1976, A. Mathias [12] construyó un modelo de ZF donde el axioma de elección falla pero existen ultrafiltros no principales, este modelo es un modelo de Solovay[2] al que se le adjunta un ultrafiltro selectivo. Existe una vieja conjetura debida a A. Blass, en la que se cree que los únicos ultrafiltros que existen en dicho modelo son las imágenes Rudin-Keisler de sumas Frolík-Blass del ultrafiltro selectivo. La manera en que decidimos abordar el problema propuesto fue tomar el modelo de Mathias como caja negra. Todas las demostraciones del Capítulo 4 están diseñadas para correr en dicho modelo. Si la conjetura de Blass es cierta, y no hay ultrafiltros idempotentes a partir de un selectivo, entonces la existencia de un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$ no implica la existencia de un ultrafiltro idempotente sobre $\mathbb{N}$.

Teniendo en mente el modelo de Mathias, empezamos con un ultrafiltro selectivo q, sin embargo conforme fuimos avanzando, nos dimos cuenta que no era necesario todo el poder de la «selectividad», sino una hipótesis más débil (con particiones finitas), es decir, hasta el momento solo necesitamos que el ultrafiltro q sea un Q-punto. La primera sección del Capítulo 4 está dedicada a demostrar que las sumas q^n de q consigo mismo nunca son idempotentes. En las siguientes secciones introducimos la suma Frolík-Blass, mostramos que sumando (en el sentido Frolík-Blass) recursivamente el ultrafiltro q, se producen ultrafiltros sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, identificando esos ultrafiltros con sus imágenes Rudin-Keisler bajo la suma entrada por entrada, los ultrafiltros resultantes sobre $\mathbb{N}$ tienen una propiedad combinatoria bastante *amable* (a la que llamamos q-bondad) que los vuelve no idempotentes. Sin embargo, si se toman las imágenes Rudin-Keisler de estos ultrafiltros bajo funciones arbitrarias (en vez de la suma entrada por entrada), entonces la q-bondad no necesariamente se conserva.

El siguiente paso para resolver el problema propuesto sería analizar dichas imágenes Rudin-Keisler bajo funciones arbitrarias y tratar de encontrar alguna propiedad similar (ya sea combinatoria o topológica) que este relacionada con la idempotencia. Dicho camino generalizaría las ideas aquí presentadas y, aunque similar, necesitaría de otro tipo de

[2]Uno de los modelos más conocidos donde el axioma de elección falla es el modelo de Solovay [18]. En el modelo se cumple ZF, falla AE y todo conjunto de reales es Lebesgue medible. De esta forma R. Solovay mostró que para probar la existencia de conjuntos no medibles es esencial el axioma de elección.

herramientas además de las utilizadas. Con el fin de que este trabajo sea autónomo y presente la primera etapa de como se abordó el problema, hemos decidido terminarlo con el teorema 4.3.14.

El Apéndice A está dedicado al Teorema de Hindman, lo demostramos usando la prueba de Galvin y Glazer. En el Apéndice B mostramos que el conjunto $[\mathbb{R}]^{<\omega} \times [[\mathbb{R}]^{<\omega}]^{<\omega}$ está en biyección con $\mathbb{R}$, un hecho crucial en la demostración de Di Nasso y Tachtsis, que no es obvio sin el axioma de elección.

Capítulo 1

Hechos Preliminares

1.1. Ultrafiltros

Definición 1.1.1. Un *filtro* $\mathscr{F}$ sobre X es una familia no vacía de subconjuntos de X tal que:

(I) $A \in \mathscr{F}, A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathscr{F}$.

(II) $A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{F}$.

(III) $\varnothing \notin \mathscr{F}$.

Observación 1.1.2. Dada nuestra definición, no existen filtros sobre $\varnothing$.

Ejemplo 1.1.3. Dado cualquier conjunto no vacío X, el singulete $\{X\}$ es un filtro sobre X.

Ejemplo 1.1.4. El conjunto de todas las vecindades de un punto en un espacio topológico X constituye un filtro sobre X.

Ejemplo 1.1.5. Si X es un conjunto infinito, los complementos de los subconjuntos finitos de X (llamados cofinitos) forman un filtro sobre X. En particular, si $X = \mathbb{N}$ el filtro correspondiente es conocido como el *filtro de Fréchet*.

Definición 1.1.6. Sea $\mathscr{B}$ un subconjunto de un filtro $\mathscr{F}$ sobre X tal que $\mathscr{B} \neq \varnothing$. Decimos que $\mathscr{B}$ es una *base de filtro* de $\mathscr{F}$ si y solo si

$$\forall A \in \mathscr{F} : \exists B \in \mathscr{B} : B \subseteq A$$

Ejemplo 1.1.7. En un espacio topológico todo sistema fundamental de vecindades de un punto[1] es una base del filtro de todas las vecindades de dicho punto.

Ejemplo 1.1.8. $\forall n \in \mathbb{N}$, sea $S(n) := \{p \in \mathbb{N} \mid p \geq n\}$. $S(n)$ se llama la sección de $\mathbb{N}$ según n. El conjunto de todas estas secciones es una base del filtro de Fréchet.

Teorema 1.1.9. *Sea $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $\mathscr{B} \neq \varnothing$. Para que $\mathscr{F} = \{A \subseteq X \mid \exists B \in \mathscr{B} : B \subseteq A\}$ sea un filtro es necesario y suficiente que:*

(i) $A, B \in \mathscr{B} \Rightarrow \exists C \in \mathscr{B}$ *tal que* $C \subseteq A \cap B$.

(ii) $\varnothing \notin \mathscr{B}$.

Nótese que si $\mathscr{B}$ cumple (i) y (ii), entonces es una base de filtro de $\mathscr{F}$.

Demostración. La necesidad es clara.

Mostremos la suficiencia. Supongamos que se cumplen (i) y (ii). Notemos que por definición $\mathscr{F}$ es cerrado bajo superconjuntos. Sean $A, B \in \mathscr{F}$. Existen $A', B' \in \mathscr{B}$ tales que $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$, luego por (i), existe $C' \in \mathscr{B}$ tal que $C' \subseteq A' \cap B' \subseteq A \cap B$. Por lo tanto $A \cap B \in \mathscr{F}$. Debido a (ii), se cumple $\varnothing \notin \mathscr{F}$. $\square$

Definición 1.1.10. Un filtro sobre X se dice *ultrafiltro* si es maximal con respecto a la inclusión.

Ejemplo 1.1.11. Dado $x \in X$, la familia $\{A \subseteq X \mid x \in A\}$ es un ultrafiltro sobre X. En efecto, es claro que $\{A \subseteq X \mid x \in A\}$ es un filtro y si $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un filtro tal que $\{A \subseteq X \mid x \in A\} \subseteq \mathscr{F}$; entonces para todo $A \in \mathscr{F}$, se tiene que, $\{x\} = \{x\} \cap A \in \mathscr{F}$.

Este ejemplo da lugar a la siguiente definición.

Definición 1.1.12. Un ultrafiltro u sobre X se dice que es *principal* si existe $x \in X$ tal que $u_x := \{A \subseteq X \mid x \in A\} = u$. De otro modo u se llamará *no principal.*

Observación 1.1.13. Notemos que si u es un filtro sobre X tal que $\{x\} \in u$, entonces $u = u_x$. En efecto, si $A \in u$, entonces $\{x\} = \{x\} \cap A \in u$, es decir, $u = \{A \subseteq X \mid x \in A\}$.

Es consistente con ZF que todos los ultrafiltros son principales y también es consistente con ZF que no todos los ultrafiltros son principales. Para garantizar la existencia de ultrafiltros no principales es necesaria alguna instancia del axioma de elección AE[2].

Probemos pues, que en ZFE existen ultrafiltros no principales.

[1] Sea X un espacio topológico. Sea $x \in X$. Se llama *sistema fundamental de vecindades de x* a una colección $\mathcal{N}_x$ de vecindades de x tal que toda vecindad de x contiene un conjunto de $\mathcal{N}_x$.

[2] Algunos principios más débiles que AE también garantizan la existencia de ultrafiltros no principales. (Vea [10, Parte V].)

Teorema 1.1.14 (Teorema del Ultrafiltro (ZFE))**.** *Dado X, todo filtro sobre X se puede extender a un ultrafiltro.*

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ un filtro sobre X. Sea

$$\mathbb{P} = \{\mathscr{G} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathscr{F} \subseteq \mathscr{G} \text{ y } \mathscr{G} \text{ es un filtro sobre } X\}.$$

Este conjunto está parcialmente ordenado bajo la inclusión. Veamos que cumple las hipótesis del Lema de Zorn. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $\mathbb{P}$. Demostremos que $\bigcup\mathcal{C}$ es un filtro sobre X.

1. Si $A \in \bigcup\mathcal{C}$ y $A \subseteq B$, existe $\mathscr{G} \in \mathcal{C}$ tal que $A \in \mathscr{G}$, luego $B \in \mathscr{G}$. Por lo tanto $B \in \bigcup\mathcal{C}$.

2. Si A, $B \in \bigcup\mathcal{C}$, existe $\mathscr{G} \in \mathcal{C}$ tal que A, $B \in \mathscr{G}$ (porque $\mathcal{C}$ es una cadena), entonces $A \cap B \in \mathscr{G}$. Así $A \cap B \in \bigcup\mathcal{C}$.

3. $\varnothing \notin \bigcup\mathcal{C}$

Entonces $\bigcup\mathcal{C}$ es una cota superior para $\mathcal{C}$ en $\mathbb{P}$, luego aplicando el Lema de Zorn existe un filtro maximal u que contiene a $\mathscr{F}$. □

Denotaremos por $\mathsf{TU}(X)$ la restricción del teorema del ultrafiltro TU al conjunto X, es decir, que todo filtro sobre X se extiende a un ultrafiltro.[3]

Teorema 1.1.15. *Un filtro u sobre X es un ultrafiltro si y solo si para todo $A \subseteq X$ se cumple $A \in u$ o bien $X \setminus A \in u$.*

Demostración. Supongamos que para cada $A \subseteq X$, se tiene $A \in u$ o $X \setminus A \in u$. Supongamos que u no es maximal, es decir, existe un filtro $\mathscr{F}$ tal que $u \subsetneq \mathscr{F}$, luego existe $A \in \mathscr{F}$ tal que $A \notin u$. Por hipótesis $X \setminus A \in u$. Entonces A y $X \setminus A$ son elementos de $\mathscr{F}$. Pero esto es absurdo, porque $A \cap (X \setminus A) = \varnothing$. Luego u es un ultrafiltro.

Recíprocamente, supongamos que u es un ultrafiltro. Sea $A \subseteq X$. Supongamos que $A \notin u$, entonces se tiene que para todo $B \in u$, $B \nsubseteq A$. Luego para todo $B \in u$, $B \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$ y por hipótesis si $B, B' \in u$; entonces $B \cap B' \in u$, es decir, la colección $\{B \cap (X \setminus A) \mid B \in u\}$ es una base del filtro $\mathscr{F} = \{C \subseteq X \mid C \supseteq B \cap (X \setminus A) \text{ y } B \in u\}$ y además $u \subseteq \mathscr{F}$ (pues $\forall B \in u$, $B \cap (X \setminus A) \subseteq B$). Siendo u un ultrafiltro se sigue que $u = \mathscr{F}$. Pero $X \setminus A \in \mathscr{F}$. Luego $X \setminus A \in u$. □

[3]El principio TU es equivalente al *Teorema del Ideal Primo Booleano* IPB: «Toda álgebra Booleana no trivial tiene un ideal primo». (Vea [10] donde IPB corresponde a la forma 14 y TU a la forma 14A.)

Teorema 1.1.16. *Sea u un filtro sobre X. Para que u sea un ultrafiltro sobre X es necesario y suficiente que si $A \cup B \in u$ entonces $A \in u$ o $B \in u$.*

Demostración. Mostremos la suficiencia. Sea $A \subseteq X$ arbitrario, como $A \cup (X \setminus A) = X \in u$, por hipótesis se tiene $A \in u$ o $X \setminus A \in u$. Por el teorema anterior, se concluye que u es un ultrafiltro sobre X.

Recíprocamente, supongamos que u es un ultrafiltro sobre X. Supongamos que $A \cup B \in u$ y que $A \notin u$. Mostremos que $B \in u$. Como $A \cup B \in u$ entonces $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \notin u$. Por el teorema anterior, $X \setminus A \in u$. Luego $X \setminus B \notin u$. Por lo tanto $B \in u$. □

De los dos teoremas anteriores emergen dos interpretaciones distintas (pero en el fondo la misma) de un ultrafiltro. La primera en términos de la teoría de la medida, considerándolo como una medida finitamente aditiva sobre $\mathcal{P}(X)$, donde dado un subconjunto $A \subseteq X$ su medida es 1 si $A \in u$ y 0 si $A \notin u$; de esta forma, el ultrafiltro mide qué tan «grande» o «pequeño» es un conjunto (nótese que para los ultrafiltros no principales, los conjuntos finitos siempre son «pequeños»). La segunda interpretación viene desde la perspectiva de la lógica: un ultrafiltro es una asignación de valores de verdad sobre los subconjuntos de X, donde $A \subseteq X$ es «verdadero» si $A \in u$ y es «falso» si $A \notin u$.

Teorema 1.1.17. *Un filtro u sobre X es no principal si y solo si extiende al filtro de cofinitos.*

Demostración. Supongamos que u es no principal. Sea $x \in X$ arbitrario. Entonces $\{x\} \in u$ o bien $X \setminus \{x\} \in u$. Por hipótesis $\{x\} \notin u$. Luego $X \setminus \{x\} \in u$ para todo $x \in X$. Sea $A \subseteq X$ cofinito, entonces

$$A = \bigcap_{x \notin A} (X \setminus \{x\})$$

Todo filtro es cerrado bajo intersecciones finitas, por lo tanto $A \in u$.

Recíprocamente supongamos que u es principal, luego existe $x \in X$ tal que $\{x\} \in u$. Pero entonces $X \setminus \{x\}$ es un elemento del filtro de cofinitos que no está en u, así que u no extiende el filtro de cofinitos. □

Definición 1.1.18. Una familia de conjuntos $\mathscr{A}$ tiene la *propiedad de la intersección finita* (PIF) si y solo si siempre que $\mathscr{B}$ es un subconjunto finito no vacío de $\mathscr{A}$, $\bigcap \mathscr{B} \neq \varnothing$.

Observación 1.1.19. Es claro que si una familia tiene la PIF, entonces el vacío no es elemento de la familia.

Lema 1.1.20 ($\mathsf{ZF} + \mathsf{TU}$). *Sea una familia $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ con la PIF. Entonces existe un ultrafiltro u sobre X tal que $\mathscr{A} \subseteq u$.*

Demostración. Sea $\mathscr{C} = \{\bigcap \mathscr{B} \mid \mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ es finito$\}$. Mostremos que $\mathscr{C}$ es una base de filtro. En efecto, $\varnothing \notin \mathscr{C}$ y si $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \subseteq \mathscr{A}$ son finitos, entonces $\bigcap \mathscr{B}_1 \cap \bigcap \mathscr{B}_2 = \bigcap(\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2) \in \mathscr{C}$.

Así, la familia $\mathscr{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \exists C \in \mathscr{C} : A \supseteq C\}$ es un filtro. Por TU, existe u un ultrafiltro que extiende a $\mathscr{F}$. Por lo tanto $\mathscr{A} \subseteq u$. $\square$

Observación 1.1.21. Del lema anterior, se sigue que un ultrafiltro es un conjunto maximal entre las familias con la PIF. Más aún, se tiene una caracterización de jerarquía entre las familias con la PIF. Todo ultrafiltro es un filtro, todo filtro es una base de filtro y toda base de filtro es una familia con la PIF.

En adelante nos enfocaremos en filtros y ultrafiltros sobre los números naturales, a menos que se indique lo contrario.

1.2. El espacio $\beta\mathbb{N}$

Definición 1.2.1.

$$\beta\mathbb{N} = \{u \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid u \text{ es un ultrafiltro sobre } \mathbb{N}\}.$$

Definición 1.2.2. Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, definimos

$$\overline{A} = \{u \in \beta\mathbb{N} \mid A \in u\}.$$

Equipamos a $\beta\mathbb{N}$ con la topología generada por la familia $\{\overline{A} \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$.

Lema 1.2.3. *Sean* A, $B \subseteq \mathbb{N}$

1. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. $\overline{\mathbb{N} \setminus A} = \beta\mathbb{N} \setminus \overline{A}$.
4. $\overline{A} = \varnothing$ *si y solo si* $A = \varnothing$.
5. $\overline{A} = \beta\mathbb{N}$ *si y solo si* $A = \mathbb{N}$.
6. $\overline{A} = \overline{B}$ *si y solo si* $A = B$.

Demostración. Estos hechos no son difíciles de demostrar, mostremos 1 y 3.

1. $u \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow A \cap B \in u \Leftrightarrow A \in u \wedge B \in u \Leftrightarrow u \in \overline{A} \wedge u \in \overline{B}$.

3. $u \in \overline{\mathbb{N} \setminus A} \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus A \in u \Leftrightarrow A \notin u \Leftrightarrow u \notin \overline{A} \Leftrightarrow u \in \beta\mathbb{N} \setminus \overline{A}$.

$\square$

De 1 se sigue que los conjuntos de la forma $\overline{A}$ son cerrados bajo intersecciones finitas, así la colección $\{\overline{A} \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$ es una base de la topología. De 3 se tiene que estos conjuntos son a la vez cerrados y por lo tanto también forman una base para los conjuntos cerrados[4].

Por comodidad utilizaremos la siguiente definición de compacidad.[5]

Definición 1.2.4. Un espacio topológico X se dice *compacto* si y solo si cualquier familia de cerrados con la PIF tiene intersección no vacía.

Nota: Algunos autores agregan la condición de que el espacio sea de Hausdorff y le llaman *cuasicompacto* a lo que aquí llamamos *compacto*, nosotros nos referiremos a aquellos espacios como *compactos de Hausdorff*.

Teorema 1.2.5 ($\mathsf{ZF} + \mathsf{TU}(\mathbb{N})$)**.** *El espacio $\beta\mathbb{N}$ es compacto de Hausdorff.*

Demostración. Para mostrar que $\beta\mathbb{N}$ es compacto consideraremos una familia $\mathscr{A}$ de cerrados básicos, es decir, conjuntos de la forma $\overline{A}$, con la PIF y mostraremos que $\mathscr{A}$ tiene intersección no vacía. Sea $\mathscr{B} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \overline{A} \in \mathscr{A}\}$. Si $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{B}$ es una subfamilia finita, entonces existe $p \in \bigcap_{A\in\mathscr{C}} \overline{A}$ y así $\bigcap\mathscr{C} \in p$ y por lo tanto $\bigcap\mathscr{C} \neq \varnothing$. Es decir, $\mathscr{B}$ tiene la PIF, por el lema 1.1.20 existe $u \in \beta\mathbb{N}$ tal que $\mathscr{B} \subseteq u$. Luego $u \in \bigcap\mathscr{A}$.

Mostremos ahora que $\beta\mathbb{N}$ es de Hausdorff. Sean $u, v \in \beta\mathbb{N}$ distintos. Si $A \in u \setminus v$, entonces $\mathbb{N} \setminus A \in v$. Así $\overline{A}$ y $\overline{\mathbb{N} \setminus A}$ son abiertos disjuntos que contienen a u y v respectivamente. $\square$

Sea $e : \mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}$ el mapeo dado por $n \mapsto u_n$, donde $u_n = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid n \in A\}$, es claro que e es inyectivo, denotaremos a la imagen de $\mathbb{N}$ en $\beta\mathbb{N}$, es decir, el conjunto de ultrafiltros principales, como $e[\mathbb{N}]$.

Sea $Y \subseteq \beta\mathbb{N}$, denotaremos la cerradura topológica de Y como $\operatorname{cl} Y$.

Teorema 1.2.6.

1. *$e[\mathbb{N}]$ es denso en $\beta\mathbb{N}$ y sus elementos son los puntos aislados de $\beta\mathbb{N}$.*

[4] Sea X un espacio toplógico, si $\mathscr{B}$ es una base para la topología de X, entonces se dice que el conjunto de los complementos de $\mathscr{B}$ es una base para los cerrados de la toplogía de X.

[5] Vea [14, Teorema 26.9] para la demostración de la equivalencia con la definición usual de cubiertas abiertas.

2. *Para todo* $A \subseteq \mathbb{N}$, $\overline{A} = \mathrm{cl}\, e[A]$

Demostración.

1. Sea $\overline{A}$ un abierto básico no vacío de $\beta\mathbb{N}$, luego $A \neq \varnothing$. Si $n \in A$, entonces $A \in u_n$. Luego $u_n \in e[\mathbb{N}] \cap \overline{A}$. Por lo tanto $e[\mathbb{N}]$ interseca a cualquier abierto no vacío de $\beta\mathbb{N}$, de modo que es denso en $\beta\mathbb{N}$.

   Sea $n \in \mathbb{N}$, notemos que $\overline{\{n\}} = \{u_n\}$, entonces $\{u_n\}$ es abierto y por lo tanto u_n es punto aislado. Recíprocamente si u es aislado, entonces $\{u\}$ es abierto, luego $\{u\} \cap e[\mathbb{N}] \neq \varnothing$ y por lo tanto $u \in e[\mathbb{N}]$.

2. Para todo $a \in A$, $u_a \in \overline{A}$ y se tiene $e[A] \subseteq \overline{A}$, luego cl $e[A] \subseteq \overline{A}$. Para la inclusión reversa, sea $p \in \overline{A}$ y $\overline{B}$ una vecindad básica de p, entonces $A \in p$ y $B \in p$, y así $A \cap B \neq \varnothing$. Sea $a \in A \cap B$. Como $u_a \in e[A] \cap \overline{B}$, $e[A] \cap \overline{B} \neq \varnothing$ y por lo tanto $p \in$ cl $e[A]$.

□

1.3. La compactación de Stone-Čech

En esta sección asumiremos que los espacios topológicos son de Hausdorff.

Recordemos que por *encaje* de un espacio topológico X hacia un espacio topológico Z nos referimos a una función $\varphi : X \longrightarrow Z$ tal que φ es un homeomorfismo entre X y $\varphi[X]$.

Definición 1.3.1. Sea X un espacio topológico. Una *compactación de* X es una pareja (φ, C) tal que C es un espacio compacto, φ un encaje de X hacia C y $\varphi[X]$ es denso en C.

Definición 1.3.2. Sea X un espacio topológico completamente regular[6]. Una compactación Stone-Čech de X es una pareja (φ, Z) tal que

1. Z es un espacio compacto.

2. φ es un encaje de X hacia Z.

3. $\varphi[X]$ es denso en Z.

[6]Un espacio topológico X es *completamente regular* si para todo cerrado $C \subseteq X$ y para todo $x \in X \setminus C$, existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f[C] = \{1\}$, en particular todo espacio completamente regular es regular. (Vea [11, p. 117].)

4. Dado cualquier espacio compacto Y y cualquier función continua $f : X \longrightarrow Y$, existe una única función continua $g : Z \longrightarrow Y$ tal que $g \circ \varphi = f$. Es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

conmuta.

Lema 1.3.3. *Sea X un espacio completamente regular y sean (φ, Z) y (ψ, W) dos compactaciones Stone-Čech de X. Entonces existe un único homeomorfismo $f : Z \longrightarrow W$ tal que $f \circ \varphi = \psi$.*

Demostración. Por hipótesis, existen funciones continuas $f : Z \longrightarrow W, g : W \longrightarrow Z$ únicas tales que los diagramas son conmutativos,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & Z \arrow[d, "f"] \\ & W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & W \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

es decir, $f\circ\varphi = \psi$ y $g\circ\psi = \varphi$, entonces por la propiedad universal $f\circ g : W \longrightarrow W$ hace que el diagrama $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\psi"'] & W \arrow[d, "f\circ g"] \\ & W \end{tikzcd}$ conmute, pero también id_W, así que por unicidad, $f\circ g = id_W$. Simétricamente, $g \circ f = id_Z$. Y así, $g = f^{-1}$ y $f : Z \longrightarrow W$ es el homeomorfismo buscado. □

Habitualmente se le llama *la* compactación Stone-Čech del espacio X y no *una* compactación Stone-Čech, la razón se sigue del lema anterior (las compactaciones son homeomorfas).

Notemos que de los teoremas 1.2.5 y 1.2.6 se sigue que $(e, \beta\mathbb{N})$ cumple los incisos 1, 2 y 3 de la definición 1.3.2. Para la prueba de que en efecto $(e, \beta\mathbb{N})$ es *la* compactación Stone-Čech de $\mathbb{N}$ vea [9, Teorema 3.27].

En general, dado un espacio topológico X, la existencia de la compactación Stone-Čech βX es equivalente al Teorema del Ultrafiltro TU. (Vea [10].) En particular, para que $\beta\mathbb{N}$ exista basta con la restricción del Teorema del Ultrafiltro al conjunto $\mathbb{N}$, $\mathsf{TU}(\mathbb{N})$.

1.4. El semigrupo topológico derecho $(\beta\mathbb{N}, +)$

Por lo expuesto en la sección anterior podemos identificar, sin pérdida de generalidad, al encaje $e(\mathbb{N})$ como $\mathbb{N}$. Mostremos ahora que la noción de suma en $\mathbb{N}$ se puede extender a $\beta\mathbb{N}$.

Definimos $A - n = \{x \in \mathbb{N} \mid x + n \in A\}$.

Notemos que si $A \subseteq \mathbb{N}$ y $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $(A - n) - m = A - (m + n)$ y también $(\mathbb{N} \setminus A) - n = \mathbb{N} \setminus (A - n)$.

Definición 1.4.1. Para todo $v \in \beta\mathbb{N}$. Sea

$$A_v = \{n \in \mathbb{N} \mid A - n \in v\}$$

Lema 1.4.2. *Para todo* A, $B \subseteq \mathbb{N}$ *y* $v \in \beta\mathbb{N}$

1. $A_v \cap B_v = (A \cap B)_v$
2. $A_v \cup B_v = (A \cup B)_v$
3. $\mathbb{N} \setminus A_v = (\mathbb{N} \setminus A)_v$
4. *Si* $A \subseteq B$, *entonces* $A_v \subseteq B_v$
5. *Para cualquier* $n \in \mathbb{N}$, $A_v - n = (A - n)_v$

Demostración. Los incisos del 1 al 4 no son difíciles, mostremos el inciso 5.

$$\begin{aligned} m \in A_v - n &\Leftrightarrow m + n \in A_v \\ &\Leftrightarrow m + n \in \{l \in \mathbb{N} \mid A - l \in v\} \\ &\Leftrightarrow A - (n + m) \in v \\ &\Leftrightarrow m \in \{l \in \mathbb{N} \mid (A - n) - l \in v\} \\ &\Leftrightarrow m \in (A - n)_v \end{aligned}$$

□

Definición 1.4.3. Sean $u, v \in \beta\mathbb{N}$.

$$u + v = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A_v \in u\}$$

Es fácil ver que en efecto esta operación en $\beta\mathbb{N}$ extiende la suma de $\mathbb{N}$. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, $A \in u_n + u_m$ sii $A_{u_m} \in u_n$ sii $n \in A_{u_m}$ sii $A - n \in u_m$ sii $m \in A - n$ sii $m + n \in A$ sii $A \in u_{n+m}$.

Definición 1.4.4. Sea X un espacio topológico y $* : X \times X \longrightarrow X$ una operación asociativa sobre X. Dado $x \in X$, definimos la *traslación derecha* ρ_x de x sobre X como la función $\rho_x : X \longrightarrow X$ tal que $\rho_x(y) = y*x$. Decimos que $(X, *)$ es un *semigrupo topológico derecho* si para todo $x \in X$, ρ_x es continua.

Teorema 1.4.5. *El espacio* $(\beta\mathbb{N}, +)$ *es un semigrupo topológico derecho.*

Demostración. Primero probemos que $\beta\mathbb{N}$ es cerrado bajo $+$. Sean $u, v \in \beta\mathbb{N}$. Es claro que $\varnothing \notin u+v$. Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq B$. Si $A \in u+v$, entonces $A_v \in u$, luego $B_v \in u$. Así $B \in u + v$. Ahora sean $A, B \in u + v$, luego $A_v, B_v \in u$, es decir, $(A \cap B)_v \in u$. Por lo tanto $A \cap B \in u + v$. Se sigue que $u + v$ es un filtro. Mostremos que es un ultrafiltro. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Notemos que $\mathbb{N} = A_v \cup (\mathbb{N} \setminus A)_v$ donde los dos últimos conjuntos son disjuntos. Como u es un ultrafiltro se sigue que o bien $A_v \in u$ o bien $(\mathbb{N} \setminus A)_v \in u$. Luego $A \in u + v$ o $\mathbb{N} \setminus A \in u + v$. Por lo tanto $u + v \in \beta\mathbb{N}$.

Mostraremos ahora que la operación es asociativa. Sean $u, v, w \in \beta\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
A \in u + (v + w) &\Leftrightarrow A_{v+w} \in u \\
&\Leftrightarrow \{n \mid A - n \in v + w\} \in u \\
&\Leftrightarrow \{n \mid (A - n)_w \in v\} \in u \\
&\Leftrightarrow \{n \mid A_w - n \in v\} \in u \\
&\Leftrightarrow (A_w)_v \in u \\
&\Leftrightarrow A_w \in u + v \\
&\Leftrightarrow A \in (u + v) + w
\end{aligned}$$

Así, se tiene que $(\beta\mathbb{N}, +)$ es un semigrupo. Por último mostremos que para todo $u \in \beta\mathbb{N}$ la traslación derecha ρ_u de u sobre $\beta\mathbb{N}$ es continua. Sea $u \in \beta\mathbb{N}$ fijo. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Probaremos que el conjunto

$$\rho_u^{-1}[\overline{A}] = \{v \in \beta\mathbb{N} \mid \rho_u(v) \in \overline{A}\} = \{v \in \beta\mathbb{N} \mid v + u \in \overline{A}\}$$

es abierto en $\beta\mathbb{N}$. $v \in \rho_u^{-1}[\overline{A}]$ sii $v + u \in \overline{A}$ sii $A \in v + u$, sii $A_u \in v$ sii $v \in \overline{A_u}$. Así, $\overline{A_u} = \rho_u^{-1}[\overline{A}]$. Por lo tanto, $\rho_u^{-1}[\overline{A}]$ es abierto en $\beta\mathbb{N}$. □

Nota: Señalamos que algunos autores definen como $u+v$, lo que aquí es $v+u$, algunos otros aunque estén de acuerdo con la definición de $u + v$, le llaman al espacio $(\beta\mathbb{N}, +)$ semigrupo topológico «izquierdo» porque la operación $+$ es una función continua para el sumando izquierdo. Y finalmente hay quienes difieren tanto en la suma como en la continuidad. Nosotros seguimos la convención de [5].

Lema 1.4.6. *Sean $u, v \in \beta\mathbb{N}$. Los conjuntos de la forma $\bigcup_{x\in A} x + B_x$, tales que $A \in u$ y $B_x \in v$ para todo $x \in A$, forman una base para $u + v$.*

Demostración. Es claro que dicha familia es no vacía, pues $\mathbb{N} \setminus \{1\} = \bigcup_{x\in\mathbb{N}} x + \mathbb{N}$. Sea $\bigcup_{x\in A} x + B_x$, tal que $A \in u$ y $B_x \in v$ para todo $x \in A$, arbitrario. Sea $a \in A$. Para cualquier $b \in B_a$ se tiene que $a + b \in a + B_a$, luego $B_a \subseteq (\bigcup_{x\in A} x + B_x) - a$, entonces $(\bigcup_{x\in A} x+B_x)-a \in v$. Por lo tanto $A \subseteq (\bigcup_{x\in A} x+B_x)_v$ y así se tiene que $(\bigcup_{x\in A} x+B_x)_v \in u$. Entonces, $\bigcup_{x\in A} x + B_x \in u + v$.

Sea $A \in u + v$, entonces $A_v \in u$ y para cualquier $x \in A_v$ se tiene que $A - x \in v$. Sea $a \in \bigcup_{x\in A_v} x + (A - x)$, entonces existe $x \in A_v$ tal que $a \in x + (A - x)$, luego existe $y \in A - x$ tal que $a = x + y$, es decir, $a \in A$. Por lo tanto, $\bigcup_{x\in A_v} x + (A - x) \subseteq A$. $\square$

Teorema 1.4.7 (Ellis-Numakura (ZFE))**.** *El espacio $(\beta\mathbb{N}, +)$ contiene algún elemento idempotente, es decir, existe $u \in \beta\mathbb{N}$ tal que $u = u + u$.*

Demostración. Para $S, T \subseteq \beta\mathbb{N}$, definimos $S+T = \{u+v \mid u \in S,\ v \in T\}$ y $S+u = S+\{u\}$ con $u \in \beta\mathbb{N}$. Sea

$$\mathbb{P} = \{S \subseteq \beta\mathbb{N} \mid S \text{ es cerrado, } S \neq \varnothing,\ S + S \subseteq S\}$$

Este conjunto está parcialmente ordenado bajo la inclusión. Sea $\mathscr{C}$ una cadena en $\mathbb{P}$ y sea $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ finito no vacío, entonces $\bigcap \mathscr{A} = \min \mathscr{A}$, es decir, $\mathscr{C}$ tiene la PIF y, por compacidad, $\bigcap \mathscr{C} \neq \varnothing$, por lo tanto $\bigcap \mathscr{C}$ es una cota inferior de $\mathscr{C}$ en $\mathbb{P}$. Entonces, por el Lema de Zorn, existe un conjunto minimal no vacío $T \in \mathbb{P}$. Sea $u \in T$. Mostraremos que u es idempotente.

Es claro que $T + u$ es no vacío y $T + u \subseteq T$. Además

$$(T + u) + (T + u) \subseteq T + (T + u) \subseteq (T + T) + u \subseteq T + u$$

También es compacto, pues es la imagen del compacto T bajo el mapeo continuo $t \mapsto t+u$. Por la minimalidad de T, se tiene que $T + u = T$, en particular $u \in T + u$.

Consideremos el conjunto

$$T' = \{v \in T \mid v + u = u\}$$

Acabamos de mostrar que este conjunto es no vacío. Además, T' es cerrado porque es la intersección de los conjuntos cerrados $\{v \in \beta\mathbb{N} \mid v + u = u\}$ y T, donde aquel es la preimagen del conjunto cerrado $\{u\} = \bigcap_{A\in u} \overline{A}$ bajo el mapeo continuo $t \mapsto t+u$. Es claro que T' es un subsemigrupo de $\beta\mathbb{N}$. Así, una vez más por minimalidad, $T' = T$, es decir, $u \in T'$. Por lo tanto, $u + u = u$. $\square$

Observación 1.4.8. Note que de la definición de idempotencia se sigue que para que un ultrafiltro $u \in \beta\mathbb{N}$ sea idempotente es necesario y suficiente que: si $A \in u$, entonces $\{n \in \mathbb{N} \mid A - n \in u\} \in u$. Interpretando al ultrafiltro u como una medida μ, lo que esto significa es que la medida es *casi invariante bajo traslaciones*, es decir, si $\mu(A) = 1$, entonces $\mu(A - n) = 1$ en casi todas partes.

Alrededor de 1971, F. Galvin fue el primero en darse cuenta que, asumiendo la existencia de ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$ que fueran «casi invariantes bajo traslaciones», uno podría obtener una pequeña demostración de una conjetura de R. Graham y B. Rothschild: «Para cualquier coloración finita de los naturales existe un conjunto infinito X tal que todas las sumas finitas de elementos distintos de X tienen el mismo color» (esta conjetura se convertiría en una piedra angular de la teoría de Ramsey). En 1972, N. Hindman demostró que si se asume la hipótesis del continuo, entonces la conjetura de Graham-Rothschild implica la existencia de ultrafiltros casi invariantes bajo traslaciones y, en 1974, Hindman demostró, utilizando un complicado argumento combinatorio, la conjetura de Graham-Rotschild (ahora conocida como el Teorema de Hindman). Sin embargo, la existencia en ZFE de aquellos particulares ultrafiltros quedó en misterio por algún tiempo.

En 1975, Galvin se encontró con S. Glazer y le preguntó si dichos ultrafiltros podrían existir, Glazer respondió de inmediato y sin dudarlo de forma afirmativa, Galvin no lo podía creer, pensó que tal vez Glazer había malentendido la pregunta, pues la respuesta no podía ser tan fácil. Resulta que, de hecho, ¡sí, era fácil! En aquella época era sabido que cualquier semigrupo topológico derecho compacto tiene idempotentes (esto es el Lema de Ellis-Numakura), también era sabido que $\beta\mathbb{N}$ tiene una operación natural que extiende la suma de $\mathbb{N}$ la cual hace a $(\beta\mathbb{N}, +)$ un semigrupo topológico derecho, pero Glazer conocía un hecho más. Muy poca gente sabía que el espacio $\beta\mathbb{N}$ se puede ver como el conjunto de ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$, Glazer era uno de esos pocos. Conociendo estos hechos, en efecto, la respuesta era inmediata.

En las últimas décadas, los ultrafiltros han sido estudiados extensivamente y se han convertido en una herramienta sumamente utilizada en varias ramas de la matemática, desde teoría de Ramsey y combinatoria aditiva hasta el álgebra conmutativa pasando por la teoría de modelos y topología. Para ver algunas de sus aplicaciones en teoría de Ramsey vea [5]. La historia de los ultrafiltros idempotentes, Hindman la refiere en [8].

En el Apéndice A enunciamos y mostramos el Teorema de Hindman usando la prueba de Galvin y Glazer.

Capítulo 2

Ultrafiltros idempotentes sin el Lema de Zorn

En el capítulo anterior vimos que la demostración del Lema de Ellis-Numakura hace uso del Lema de Zorn. Nunca es poco deseable encontrar demostraciones alternativas de resultados conocidos en donde aparezca el axioma de elección AE, estas nos pueden dar una nueva perspectiva que nos conduzca a nuevas aplicaciones y pueden aportar una mayor profundidad al conocimiento del tema en cuestión. Así, surge la pregunta natural: ¿Qué tanta *elección* se necesita para probar la existencia de ultrafiltros idempotentes?

En 2017, M. Di Nasso y E. Tachtsis [4] mostraron que se puede suponer una forma más débil que AE. Definiendo una clase de filtros que llamaron aditivos, sin usar el Lema de Zorn y en cambio suponiendo el Teorema del Ultrafiltro para $\mathbb{R}$, denotado $\mathsf{TU}(\mathbb{R})$, probaron la existencia de ultrafiltros idempotentes.

El método consiste en dos hechos claves. Primero mostraron, utilizando el Teorema del Ultrafiltro para $\mathbb{N}$, denotado $\mathsf{TU}(\mathbb{N})$, que si todo filtro aditivo puede ser extendido a un ultrafiltro por medio de una función de elección, entonces todo filtro aditivo puede ser extendido a un ultrafiltro idempotente. Y, por último, usando $\mathsf{TU}(\mathbb{R})$ construyeron una función de elección que extiende todo filtro a un ultrafiltro.

En este capítulo expondremos dichos resultados.

Definición 2.0.1. La *pseudosuma* de dos filtros $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ está definida por

$$\mathscr{F} + \mathscr{G} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \{n \mid A - n \in \mathscr{G}\} \in \mathscr{F}\}$$

Notemos que si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son ultrafiltros entonces $+$ es la suma usual en $\beta\mathbb{N}$.

Definición 2.0.2. Para filtros $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ y v ultrafiltro, sea

$$\mathscr{F}(v, \mathscr{G}) = \{B \subseteq \mathbb{N} \mid B \supseteq F \cap A_v \text{ para algún } F \in \mathscr{F} \text{ y algún } A \in \mathscr{G}\}$$

Notemos que la familia $\mathscr{F}(v,\mathscr{G})$ es cerrada bajo intersecciones finitas y superconjuntos. En efecto:

Si B, $C \in \mathscr{F}(v,\mathscr{G})$ entonces existen F_B, $F_C \in \mathscr{F}$ y A_B, $A_C \in \mathscr{G}$ tales que $B \supseteq F_B \cap (A_B)_v$ y $C \supseteq F_C \cap (A_C)_v$, luego $B \cap C \supseteq (F_B \cap F_C) \cap (A_B \cap A_C)_v$.

Si $B \in \mathscr{F}(v,\mathscr{G})$ y $C \supseteq B$ entonces existen $F \in \mathscr{F}$ y $A \in \mathscr{G}$ tales que $C \supseteq B \supseteq F \cap A_v$.

También es fácil ver que $(\forall F \in \mathscr{F})(F \in \mathscr{F}(v,\mathscr{G}))$ y $(\forall A \in \mathscr{G})(A_v \in \mathscr{F}(v,\mathscr{G}))$. Esto se sigue de $(\forall F \in \mathscr{F})(F = F \cap \mathbb{N} = F \cap \mathbb{N}_v)$ y $(\forall A \in \mathscr{G})(A_v = \mathbb{N} \cap A_v)$.

Proposición 2.0.3. *Sean $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ filtros y v un ultrafiltro. Si $\mathscr{F}(v,\mathscr{G})$ satisface la PIF, entonces la familia $\mathscr{F}(v,\mathscr{G})$ es el mínimo filtro que contiene tanto a $\mathscr{F}$ como a $\{A_v \mid A \in \mathscr{G}\}$.*

Demostración. De la PIF se tiene que $\varnothing \notin \mathscr{F}(v,\mathscr{G})$. Por lo tanto $\mathscr{F}(v,\mathscr{F})$ es un filtro.

Sea $\mathscr{H}$ un filtro tal que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}$ y $\{A_v \mid A \in \mathscr{G}\} \subseteq \mathscr{H}$. Sea $B \in \mathscr{F}(v,\mathscr{G})$, entonces existen $F \in \mathscr{F}$ y $A \in \mathscr{G}$ tales que $B \supseteq F \cap A_v$; como $F \in \mathscr{H}$, $A_v \in \mathscr{H}$ y $\mathscr{H}$ es un filtro, entonces $B \in \mathscr{H}$. Luego $\mathscr{F}(v,\mathscr{G}) \subseteq \mathscr{H}$. $\square$

Proposición 2.0.4. *Sea $\mathscr{F}$ un filtro y v un ultrafiltro. Entonces para todo filtro $\mathscr{G} \supseteq \mathscr{F} + v$, la familia $\mathscr{F}(v,\mathscr{G})$ es un filtro tal que $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}(v,\mathscr{G}) + v$.*

Demostración. Si $\varnothing \in \mathscr{F}(v,\mathscr{G})$, entonces existen $F \in \mathscr{F}$ y $A \in \mathscr{G}$ tales que $F \cap A_v = \varnothing$, luego $F \subseteq \mathbb{N} \setminus A_v = (\mathbb{N} \setminus A)_v \Rightarrow (\mathbb{N} \setminus A)_v \in \mathscr{F} \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus A \in \mathscr{F} + v \subseteq \mathscr{G} \Rightarrow A \notin \mathscr{G}$. Por lo tanto $\mathscr{F}(v,\mathscr{G})$ es un filtro. Por último, si $A \in \mathscr{G} \Rightarrow A_v \in \mathscr{F}(v,\mathscr{G}) \Leftrightarrow A \in \mathscr{F}(v,\mathscr{G}) + v$. $\square$

Corolario 2.0.5. Sean $\mathscr{F}$ un filtro y v, w ultrafiltros tales que $w \supseteq \mathscr{F} + v$. Entonces para todo ultrafiltro u se tiene que:

1. Si $u \supseteq \mathscr{F}(v,w)$, entonces $u + v = w$.
2. Si $u + v = w$ y $\mathscr{F} \subseteq u$, entonces $\mathscr{F}(v,w) \subseteq u$.

Demostración.

1. Si $u \supseteq \mathscr{F}(v,w)$, entonces $u \supseteq \mathscr{F}$ y $w \subseteq \mathscr{F}(v,w) + v \subseteq u + v$. Por lo tanto $w = u + v$, por la maximalidad de los ultrafiltros.
2. Por definición, $u + v = w$ si y solo si $A_v \in u$ para todo $A \in w$. Por hipótesis $F \in u$ para todo $F \in \mathscr{F}$, se sigue que $\mathscr{F}(v,w) \subseteq u$.

$\square$

Corolario 2.0.6 ($\mathsf{ZF} + \mathsf{TU}(\mathbb{N})$)**.** Sea $\mathscr{F}$ un filtro y sean u, v ultrafiltros. Entonces $w \supseteq \mathscr{F} + v$ si y solo si $w = u + v$ para algún ultrafiltro $u \supseteq \mathscr{F}$

Demostración. Si $u \supseteq \mathscr{F} \Rightarrow u + v \supseteq \mathscr{F} + v$ para todo $v \in \beta\mathbb{N}$. Recíprocamente, dado un ultrafiltro $w \supseteq \mathscr{F} + v$, por $\mathsf{TU}(\mathbb{N})$ existe un ultrafiltro $u \supseteq \mathscr{F}(v, w) \supseteq \mathscr{F}$ y la igualdad $u + v = w$ se satisface por el corolario anterior. □

2.1. Filtros aditivos

Definición 2.1.1. Un filtro $\mathscr{F}$ es *aditivo* si para todo ultrafiltro $v \supseteq \mathscr{F}$, la pseudosuma $\mathscr{F} + v \supseteq \mathscr{F}$, es decir, $A_v \in \mathscr{F}$ para todo $A \in \mathscr{F}$.

Obsérvese que en cualquier modelo de ZF, si un filtro no tiene un ultrafiltro que lo extienda, entonces por vacuidad es un filtro aditivo.

Ejemplo 2.1.2. Un ejemplo trivial está dado por $\mathscr{F} = \{\mathbb{N}\}$.

Ejemplo 2.1.3. El filtro de Fréchet es aditivo. En efecto, sea v un ultrafiltro no principal, es decir, extiende al filtro de Fréchet; $A \subseteq \mathbb{N}$ cofinito y $n \geq \text{máx}(\mathbb{N} \setminus A)$, entonces $(\mathbb{N} \setminus A) - n = \mathbb{N} \setminus (A - n) = \varnothing$. Así, $A_v = \{n \in \mathbb{N} \mid A - n \in v\}$ es cofinito.

Un filtro $\mathscr{F}$ es llamado *idempotente* si $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F} + \mathscr{F}$.[1]. Es trivial ver que todo filtro idempotente es aditivo, sin embargo el recíproco no es cierto. Un contraejemplo está dado en [4, pp. 406-407].

Veamos ahora un ejemplo más interesante de un filtro idempotente, y por lo tanto aditivo, considerando «conjuntos aditivamente grandes». Para todo $X \subseteq \mathbb{N}$, el conjunto de todas las sumas finitas de elementos distintos de X se denota por

$$\text{FS}(X) = \left\{ \sum_{x \in F} x \mid F \subseteq X \text{ es finito y no vacío} \right\}.$$

Observación 2.1.4. Note que $\text{FS}(X)$ incluye términos como $x_1 + x_3 + x_{17}$ pero no $x_3 + x_3$.

Se dice que un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ es *aditivamente grande*, a veces también llamado un *IP-conjunto*, si contiene un conjunto $\text{FS}(X)$ para algún X infinito. El siguiente ejemplo muestra que cualquier conjunto aditivamente grande determina un filtro aditivo.

Ejemplo 2.1.5. Dado un conjunto infinito $X = \{x_1 < x_2 < ...\}$ denotamos por

$$\mathcal{FS}_X = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \supseteq \text{FS}(X \setminus F) \text{ para algún } F \subseteq X \text{ finito}\}.$$

[1] T. Papazyan [15] fue el primero en introducir la noción de un «*filtro* casi invariante bajo traslaciones», es decir, lo que aquí llamamos filtro idempotente, y mostró que un filtro maximal en esa clase (usando el Lema de Zorn) es necesariamente un ultrafiltro y por lo tanto un ultrafiltro idempotente.

Es claro que $\mathrm{FS}(X) \in \mathcal{FS}_X$, $\varnothing \notin \mathcal{FS}_X$ y $\mathcal{FS}_X$ es cerrada bajo superconjuntos. Veamos que también es cerrada bajo intersecciones finitas. Esto se sigue de lo siguiente. Si $A, B \in \mathcal{FS}_X$, entonces existen $F_A, F_B \subseteq X$ finitos tales que $A \supseteq \mathrm{FS}(X \setminus F_A)$ y $B \supseteq \mathrm{FS}(X \setminus F_B)$ luego se tiene que

$$A \cap B \supseteq \mathrm{FS}(X \setminus F_A) \cap \mathrm{FS}(X \setminus F_B) \supseteq \mathrm{FS}(X \setminus (F_A \cup F_B))$$

por lo tanto la familia $\mathcal{FS}_X$ es un filtro. Ahora mostremos que $\mathcal{FS}_X \subseteq \mathcal{FS}_X + \mathcal{FS}_X$.

Dado cualquier $k \in \mathbb{N}$, sea $x \in \mathrm{FS}(x_n \mid n \geq k) \Rightarrow \exists x_{n_i} \in X$ tales que $x = \sum_{i=1}^{l} x_{n_i}$ con $k \leq n_1 < ... < n_l$. Si $y \in \mathrm{FS}(x_n \mid n > n_l) \Rightarrow \exists x_{m_i} \in X$ tales que $y = \sum_{i=1}^{t} x_{m_i}$ con $n_l < m_1 < ... < m_t$.

Entonces $x + y = \sum_{i=1}^{l} x_{n_i} + \sum_{i=1}^{t} x_{m_i} \in \mathrm{FS}(x_n \mid n \geq k) \Rightarrow y \in \mathrm{FS}(x_n \mid n \geq k) - x \Rightarrow \mathrm{FS}(x_n \mid n > n_l) \subseteq \mathrm{FS}(x_n \mid n \geq k) - x \Rightarrow \mathrm{FS}(x_n \mid n \geq k) - x \in \mathcal{FS}_X$. Así se tiene que $\mathrm{FS}(x_n \mid n \geq k) \subseteq \{x \mid \mathrm{FS}(x_n \mid n \geq k) - x \in \mathcal{FS}_X\}$. Por lo tanto, $\{x \mid \mathrm{FS}(x_n \mid n \geq k) - x \in \mathcal{FS}_X\} \in \mathcal{FS}_X$.

Proposición 2.1.6 ($\mathsf{ZF} + \mathsf{TU}(\mathbb{N})$)**.** *Un filtro $\mathscr{F}$ es aditivo si y solo si $\mathscr{F} \subseteq u + v$ para cada par de ultrafiltros u, $v \supseteq \mathscr{F}$*

Demostración. Probemos primero la necesidad. Si $\mathscr{F} \subseteq v$, por aditividad, cada $A \in \mathscr{F}$ cumple que $A_v \in \mathscr{F}$. Supongamos que $\mathscr{F} \subseteq u, v$. Sea $A \in \mathscr{F}$, entonces $A_v \in u$, por lo tanto, $A \in u + v$ y, así, $\mathscr{F} \subseteq u + v$.

Recíprocamente, supongamos que existe $v \supseteq \mathscr{F}$ tal que $\mathscr{F} \nsubseteq \mathscr{F} + v$ y sea $A \in \mathscr{F}$ con $A \notin \mathscr{F} + v$, es decir, $A_v \notin \mathscr{F}$. Es claro que la familia $\{F \cap (\mathbb{N} \setminus A_v) \mid F \in \mathscr{F}\}$ satisface la PIF, luego por el lema 1.1.20 existe un ultrafiltro $u \supseteq \{F \cap (\mathbb{N} \setminus A_v) \mid F \in \mathscr{F}\}$ además $u \supseteq \mathscr{F}$ y $A_v \notin u$. Entonces $A \notin u + v$ y por lo tanto $\mathscr{F} \nsubseteq u + v$. □

Proposición 2.1.7 ($\mathsf{ZF} + \mathsf{TU}(\mathbb{N})$)**.** *Sea $\mathscr{F}$ un filtro aditivo. Entonces para cada ultrafiltro $v \supseteq \mathscr{F}$, el filtro $\mathscr{F} + v$ es aditivo.*

Demostración. Sea $w \supseteq \mathscr{F} + v$ ultrafiltro. Entonces por el corolario 2.0.6, existe un ultrafiltro $u \supseteq \mathscr{F}$ tal que $w = u + v$. Por la aditividad de $\mathscr{F}$, tenemos que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F} + u \subseteq v + u \Rightarrow \mathscr{F} \subseteq \mathscr{F} + v + u \Rightarrow \mathscr{F} + v \subseteq \mathscr{F} + v + u + v = (\mathscr{F} + v) + w$. □

Proposición 2.1.8 ($\mathsf{ZF} + \mathsf{TU}(\mathbb{N})$)**.** *Sea $\mathscr{F}$ un filtro aditivo. Entonces para todo $v \in \beta\mathbb{N}$ tal que $v \supseteq \mathscr{F} + v$, $\mathscr{F}(v, v)$ es un filtro aditivo.*

Demostración. Por la proposición 2.0.4, $\mathscr{F}(v, v)$ es un filtro. Sean $u_1, u_2 \supseteq \mathscr{F}(v, v)$ ultrafiltros. Mostremos que $\mathscr{F}(v, v) \subseteq u_1 + u_2$. Como $u_1, u_2 \supseteq \mathscr{F}(v, v) \supseteq \mathscr{F}$, por la aditividad de $\mathscr{F}$ se tiene que $\mathscr{F} \subseteq u_1 + u_2$. Por el corolario 2.0.5, tenemos que $u_1 + v = u_2 + v = v$ y así $v = u_1 + u_2 + v$. Luego para todo $A \in v$, $A_v \in u_1 + u_2$ y terminamos la demostración. □

2.2. Evitando el Lema de Zorn

Proposición 2.2.1 ($\mathsf{ZF}+\mathsf{TU}(\mathbb{N})$)**.** *Si existe una función de elección Φ que le asocia a cada filtro aditivo $\mathscr{F}$ un ultrafiltro $\Phi(\mathscr{F}) \supseteq \mathscr{F}$, entonces existe una función de elección Ψ que le asocia a cada filtro aditivo un ultrafiltro $\Psi(\mathscr{F}) \supseteq \mathscr{F}$ tal que $\Psi(\mathscr{F}) \supseteq \mathscr{F} + \Psi(\mathscr{F})$.*

Demostración. Dado un filtro aditivo $\mathscr{F}$. Definamos por recursión transfinita una sucesión de filtros.

1. $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}$.

2. $\mathscr{F}_{\alpha+1} = \mathscr{F}_\alpha$ si $\Phi(\mathscr{F}_\alpha) \supseteq \mathscr{F}_\alpha + \Phi(\mathscr{F}_\alpha)$ y $\mathscr{F}_{\alpha+1} = \mathscr{F}_\alpha + \Phi(\mathscr{F}_\alpha)$ en otro caso.

3. Si λ es ordinal límite, $\mathscr{F}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathscr{F}_\alpha$.

Mostremos inductivamente que los filtros de esta sucesión son aditivos y que $\mathscr{F}_\alpha \subseteq \mathscr{F}_\beta$ si $\alpha \leq \beta$. El paso sucesor se sigue de lo siguiente. Si $\mathscr{F}_\alpha$ es aditivo, por la proposición 2.1.7, $\mathscr{F}_\alpha + \Phi(\mathscr{F}_\alpha)$ es aditivo. Si λ es un ordinal límite, sean $u, v \supseteq \mathscr{F}_\lambda$ ultrafiltros, entonces $u, v \supseteq \mathscr{F}_\alpha$ para todo $\alpha < \lambda$, luego por la hipótesis inductiva $\mathscr{F}_\alpha \subseteq u + v$ para todo $\alpha < \lambda$. Por lo tanto $\mathscr{F}_\lambda \subseteq u + v$. Así $\mathscr{F}_\lambda$ es aditivo.

Veamos ahora que la sucesión $\langle \mathscr{F}_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{ORD} \rangle$ es eventualmente estacionaria. Supongamos que $\langle \mathscr{F}_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{ORD} \rangle$ es estrictamente creciente. Consideremos la clase-función F sobre $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ definida como sigue: si $X = \mathscr{F}_\alpha$ para algún $\alpha \in \mathbf{ORD}$, entonces $F(X) = \alpha$, donde α es el mínimo ordinal tal que $X = \mathscr{F}_\alpha$ y $F(X) = *$ en otro caso. Por el esquema de axioma de reemplazo $F[\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))] = F[\langle \mathscr{F}_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{ORD} \rangle] = \mathbf{ORD}$ es un conjunto, lo cual es absurdo.

Entonces definamos $\Psi(\mathscr{F}) = \Phi(\mathscr{F}_\alpha)$ donde α es el mínimo ordinal tal que $\mathscr{F}_{\alpha+1} = \mathscr{F}_\alpha$. Este ultrafiltro $\Psi(\mathscr{F})$ satisface las propiedades deseadas. En efecto, $\Phi(\mathscr{F}_\alpha) \supseteq \mathscr{F}_\alpha \supseteq \mathscr{F}_0 = \mathscr{F}$. Más aún si $\Phi(\mathscr{F}_\alpha) \not\supseteq \mathscr{F} + \Phi(\mathscr{F}_\alpha)$, entonces por la definición de $\mathscr{F}_{\alpha+1}$, se tiene que, $\mathscr{F}_{\alpha+1} = \mathscr{F}_\alpha + \Phi(\mathscr{F}_\alpha)$ pero como $\Phi(\mathscr{F}_\alpha) \supseteq \mathscr{F}_\alpha$ y $\Phi(\mathscr{F}_\alpha) \not\supseteq \mathscr{F}_{\alpha+1}$ se sigue que $\mathscr{F}_{\alpha+1} \neq \mathscr{F}_\alpha$. Contradicción. □

Teorema 2.2.2 ($\mathsf{ZF}+\mathsf{TU}(\mathbb{N})$)**.** *Si existe una función de elección Φ que le asocia a cada filtro aditivo $\mathscr{F}$ un ultrafiltro $\Phi(\mathscr{F}) \supseteq \mathscr{F}$, entonces existe una función de elección Θ que le asocia a cada filtro aditivo un ultrafiltro idempotente $\Theta(\mathscr{F}) \supseteq \mathscr{F}$.*

Demostración. Fijemos una función Ψ dada por la proposición anterior. Dado un filtro aditivo $\mathscr{F}$, por recursión transfinita definamos la siguiente sucesión.

1. $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}$.

2. En el paso sucesor, consideremos el ultrafiltro $v_\alpha = \Psi(\mathscr{F}_\alpha)$ y sea $\mathscr{F}_{\alpha+1} = \mathscr{F}_\alpha$ si $v_\alpha \supseteq \mathscr{F}_\alpha(v_\alpha, v_\alpha)$ o $\mathscr{F}_{\alpha+1} = \mathscr{F}_\alpha(v_\alpha, v_\alpha)$ en otro caso.

3. Si λ es ordinal límite, $\mathscr{F}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathscr{F}_\alpha$.

Inductivamente se muestra que todos los $\mathscr{F}_\alpha$ son filtros aditivos y que $\mathscr{F}_\alpha \subseteq \mathscr{F}_\beta$ si $\alpha \leq \beta$. La razón es la siguiente. En el paso sucesor $\mathscr{F}_\alpha(v_\alpha, v_\alpha) \supseteq \mathscr{F}_\alpha$ es aditivo por la proposición 2.1.8, pues $v_\alpha = \Psi(\mathscr{F}_\alpha) \supseteq \mathscr{F}_\alpha + v_\alpha$.

Por el mismo argumento que en la demostración anterior, no puede ser que $\mathscr{F}_{\alpha+1} \neq \mathscr{F}_\alpha$ para todos los ordinales. Así se puede definir $\Theta(\mathscr{F}) = \Psi(\mathscr{F}_\alpha)$ donde α es el mínimo ordinal tal que $\mathscr{F}_{\alpha+1} = \mathscr{F}_\alpha$. Verifiquemos que el ultrafiltro $\Theta(\mathscr{F})$ satisface las propiedades deseadas. Primero, $\Theta(\mathscr{F}) = \Psi(\mathscr{F}_\alpha) \supseteq \mathscr{F}$. Ahora notemos que $v_\alpha \supseteq \mathscr{F}_\alpha(v_\alpha, v_\alpha)$, si no, $\mathscr{F}_{\alpha+1} = \mathscr{F}_\alpha(v_\alpha, v_\alpha)$ y entonces $\mathscr{F}_{\alpha+1} \neq \mathscr{F}_\alpha$ pues $v_\alpha \supseteq \mathscr{F}_\alpha$ pero $v_\alpha \not\supseteq \mathscr{F}_{\alpha+1}$. Así $\Theta(\mathscr{F}) = \Psi(\mathscr{F}_\alpha) = v_\alpha$ y por el corolario 2.0.5, tenemos que $v_\alpha + v_\alpha = v_\alpha$. $\square$

Proposición 2.2.3 ($\mathsf{ZF} + \mathsf{TU}(\mathbb{R})$). *Existe una función Φ que le asocia a cada filtro $\mathscr{F}$ un ultrafiltro $\Phi(\mathscr{F}) \supseteq \mathscr{F}$.*

Demostración. Todo filtro es un elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ que está en biyección con $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Así se tiene una enumeración 1-1 de todos los filtros $\{\mathscr{F}_Y \mid Y \in \mathfrak{F}\}$ para alguna familia apropiada $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Fijemos una biyección $\psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, sea $I = [\mathbb{R}]^{<\omega} \times [[\mathbb{R}]^{<\omega}]^{<\omega}$ y para todo $(A, Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$, sea

$$X(A, Y) = \{(F, S) \in I \mid S \subseteq \mathcal{P}(F);\ \psi(A, Y) \cap F \in S\}.$$

Notemos que para todo $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$, la familia

$$\langle \mathfrak{B} \rangle = \{X(A, Y) \mid (A, Y) \in \mathfrak{B}\} \cup \{X(A, Y)^c \mid (A, Y) \notin \mathfrak{B}\}$$

tiene la PIF. En efecto, dadas las parejas $(A_1, Y_1), \ldots, (A_k, Y_k) \in \mathfrak{B}$ distintas a pares y las parejas $(B_1, Z_1), \ldots, (B_h, Z_h) \notin \mathfrak{B}$ también distintas a pares, para todo i, j elegimos un elemento $u_{i,j} \in \psi(A_i, Y_i) \triangle \psi(B_j, Z_j)$ (donde $\triangle$ denota la diferencia simétrica). Sean

$$F = \{u_{i,j} \mid i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, h\} \quad \text{y} \quad S = \{\psi(A_i, Y_i) \cap F \mid i = 1, \ldots, k\}.$$

Observemos que, por definición, $S \subseteq \mathcal{P}(F)$ y $\psi(A_i, Y_i) \cap F \in S$ para todo $i = 1, \ldots k$, además como $(A_i, Y_i), (B_j, Z_j)$ son disjuntos a pares, se tiene que $\psi(A_i, Y_i), \psi(B_j, Z_j)$ son distintos a pares, más aún, como $u_{i,j} \notin \psi(A_i, Y_i) \cap \psi(B_j, Z_j)$ para todo $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, h$ entonces $\psi(A_i, Y_i) \cap F \neq \psi(B_j, Z_j) \cap F$ para todo $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, h$. Por lo tanto $(F, S) \in \bigcap_{i=1}^k X(A_i, Y_i) \cap \bigcap_{j=1}^h X(B_j, Z_j)^c$.

Para todo $Y \in \mathfrak{F}$, consideremos la siguiente familia de subconjuntos de I:

$$\mathscr{G}_Y = \{X(A,Y) \mid A \in \mathscr{F}_Y\} \cup \{\Lambda(A,B,Y) \mid A,\ B \subseteq \mathbb{N}\} \cup \{\Gamma(A,Y) \mid A \subseteq \mathbb{N}\} \\ \cup \{\Delta(A,B,Y) \mid A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}\}$$

donde

- $\Lambda(A,B,Y) = X(A,Y)^c \cup X(B,Y)^c \cup X(A \cap B, Y)$
- $\Gamma(A,Y) = X(A,Y) \cup X(\mathbb{N} \setminus A, Y)$
- $\Delta(A,B,Y) = X(A,Y)^c \cup X(B,Y)$

El objetivo es mostrar que toda unión finita $\bigcup_{i=1}^k \mathscr{G}_{Y_i}$, donde $Y_i \in \mathfrak{F}$, tiene la PIF y por lo tanto también $\mathscr{G} = \bigcup_{Y \in \mathfrak{F}} \mathscr{G}_Y$ tiene la PIF. Por $\mathsf{TU}(\mathbb{N})$, que es consecuencia de $\mathsf{TU}(\mathbb{R})$, elegimos ultrafiltros $v_i \supseteq \mathscr{F}_{Y_i}$ para $i = 1, \ldots, k$. Entonces

$$\mathscr{H} = \bigcup_{i=1}^k (\{X(A,Y_i) \mid A \in v_i\} \cup \{X(A,Y_i)^c \mid A \notin v_i\})$$

tiene la PIF, porque $\mathscr{H} \subseteq \langle \mathfrak{B} \rangle$ donde $\mathfrak{B} = \{(A,Y_i) \mid i = 1,\ldots,k;\ A \in v_i\}$. Ahora sean $G_1,\ldots,G_h \in \bigcup_{i=1}^k \mathscr{G}_{Y_i}$. Para todo G_j sea $H_j \in \mathscr{H}$ tal que $H_j \subseteq G_j$ como sigue. Si $G_j = X(A,Y_i)$ para algún $A \in \mathscr{F}_{Y_i}$ entonces sea $H_j = G_j$; si $G_j = \Lambda(A,B,Y_i)$, entonces sea $H_j = X(A,Y_i)^c$ si $A \notin v_i$, sea $H_j = X(B,Y_i)^c$ si $A \in v_i$ y $B \notin v_i$, y sea $H_j = X(A \cap B, Y_i)$ si $A, B \in v_i$; si $G_j = \Gamma(A,Y_i)$, entonces sea $H_j = X(A,Y_i)$ si $A \in v_i$, y sea $H_j = X(\mathbb{N} \setminus A, Y_i)$ si $A \notin v_i$; y si $G_j = \Delta(A,B,Y_i)$ (donde $A \subseteq B$), entonces sea $H_j = X(B,Y_i)$ si $A \in v_i$ o $B \in v_i$, y sea $H_j = X(A,Y_i)^c$ si $A \notin v_i$ y $B \notin v_i$. Pero entonces $\bigcap_{j=1}^h G_j$ es no vacía porque contiene $\bigcap_{j=1}^h H_j$ y la familia $\mathscr{H}$ tiene la PIF.

Como $I = [\mathbb{R}]^{<\omega} \times [[\mathbb{R}]^{<\omega}]^{<\omega}$ está en biyección con $\mathbb{R}$ (vea el Apéndice B), por $\mathsf{TU}(\mathbb{R})$ existe un ultrafiltro $\mathfrak{U} \supseteq \mathscr{G}$. Finalmente, para cada $Y \in \mathfrak{F}$, la familia

$$u_Y = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid X(A,Y) \in \mathfrak{U}\}$$

es un ultrafiltro que extiende a $\mathscr{F}_Y$. En efecto, si $A \in \mathscr{F}_Y$, entonces $X(A,Y) \in \mathscr{G}_Y \subseteq \mathfrak{U}$ y así $A \in u_Y$. Ahora supongamos que $A, B \in u_Y$, es decir $X(A,Y), X(B,Y) \in \mathfrak{U}$. Como $\Lambda(A,B,Y) \in \mathscr{G}_Y \subseteq \mathfrak{U}$, se tiene que $X(A \cap B, Y) = \Lambda(A,B,Y) \cap X(A,Y) \cap X(B,Y) \in \mathfrak{U}$ y así $A \cap B \in u_Y$. Ahora sea $A \in u_Y$ y $B \supseteq A$. Como $\Delta(A,B,Y) \in \mathscr{G}_Y \subseteq \mathfrak{U}$, se tiene que $X(A,Y) \cap \Delta(A,B,Y) \in \mathfrak{U}$. Además, $X(B,Y) \supseteq X(A,Y) \cap X(B,Y) = X(A,Y) \cap \Delta(A,B,Y)$, por lo tanto $X(B,Y) \in \mathfrak{U}$ y así $B \in u_Y$. Por último sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Si $A \notin u_Y$, es decir si $X(A,Y) \notin \mathfrak{U}$, entonces $X(A,Y)^c \in \mathfrak{U}$. Pero $\Gamma(A,Y) \in \mathscr{G}_Y \subseteq \mathfrak{U}$, así $X(\mathbb{N} \setminus A, Y) \supseteq \Gamma(A,Y) \cap X(A,Y)^c \in \mathfrak{U}$ y por lo tanto $\mathbb{N} \setminus A \in u_Y$. Así, la correspondencia $\mathscr{F}_Y \mapsto u_Y$ nos da la función de elección deseada. $\square$

Entonces de la proposición 2.2.3 y del teorema 2.2.2, se sigue que:

Teorema 2.2.4 ($\mathsf{ZF} + \mathsf{TU}(\mathbb{R})$)**.** *Todo filtro aditivo se puede extender a un ultrafiltro idempotente.*

Observación 2.2.5. Como todo filtro idempotente $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F} + \mathscr{F}$ es aditivo, se sigue como un corolario el resultado de Papazyan [15] que todo filtro idempotente maximal es un ultrafiltro idempotente.

Observación 2.2.6. El teorema 2.2.4 no se puede probar en ZF, esto se sigue del hecho de que el filtro de Fréchet $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ es finito}\}$ es aditivo y si existiera un ultrafiltro que lo extendiera, entonces habría algún ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$ en ZF, pero es bien sabido que existen modelos de ZF sin ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$. (Vea [10].)

Consideremos los siguientes enunciados:

(i) Todo filtro aditivo se puede extender a un ultrafiltro idempotente.

(ii) Todo filtro idempotente se puede extender a un ultrafiltro idempotente.

(iii) Existe un ultrafiltro idempotente sobre $\mathbb{N}$.

(iv) Existe un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$.

En este capítulo, se demostró que en ZF se tiene: $\mathsf{TU}(\mathbb{R}) \Rightarrow (i)$ y, además, nótese que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv). Una de las preguntas con las que Di Nasso y Tachtsis cierran [4] es si las implicaciones pueden invertirse. En particular, el problema que nos propusimos abordar (es decir, la motivación de este trabajo) fue responder si (iv) $\Rightarrow$ (iii). En el Capítulo 4 exponemos los resultados a los que llegamos.

Capítulo 3

El orden Rudin-Keisler

En este capítulo introduciremos una herramienta fundamental que nos aportará claridad sobre la estructura de $\beta\mathbb{N}$, mostrándonos como es que un ultrafiltro es esencialmente distinto de otro. El *orden Rudin-Keisler*[1] sobre $\beta\mathbb{N}$ nos permite estudiar la estructura intrínseca de un ultrafiltro examinando su posición relativa en el orden parcial. Existen teoremas profundos e intrincados que muestran la conectividad entre la topología, la estructura algebraica de $\beta\mathbb{N}$ y el orden Rudin-Keisler, nuestro objetivo no es presentar dichos teoremas; nosotros estamos interesaremos por los ultrafiltros minimales en dicho orden (conocidos como ultrafiltros selectivos), así como la relación entre $\beta(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ y $\beta\mathbb{N}$, y es lo que dará pauta al Capítulo 4.

Definición 3.0.1. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función y $u \in \beta\mathbb{N}$. Definimos la *imagen Rudin-Keisler* de u bajo f como

$$f(u) = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid f^{-1}[A] \in u\}.$$

Lema 3.0.2. *Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función y $u \in \beta\mathbb{N}$. La familia $\mathscr{B} = \{f[A] \subseteq \mathbb{N} \mid A \in u\}$ es una base de filtro.*

Demostración. Es claro que $\varnothing \notin \mathscr{B}$. Si $A, B \in u$ entonces $A \cap B \in u$, así $f[A \cap B] \in \mathscr{B}$ y $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$. Por lo tanto $\mathscr{B}$ es una base de filtro. □

Teorema 3.0.3. *Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función y $u \in \beta\mathbb{N}$. Entonces $f(u)$ es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ y la familia $\mathscr{B} = \{f[A] \subseteq \mathbb{N} \mid A \in u\}$ es base de $f(u)$.*

Demostración. Mostremos primero que $f(u)$ es un ultrafiltro. Es obvio que $\varnothing \notin f(u)$. Si $A, B \in f(u)$, entonces $f^{-1}[A], f^{-1}[B] \in u$, luego $f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] \in u$ y también

[1] El orden Rudin-Keisler fue introducido y estudiado por M. Rudin [16, 17] e independientemente por H. Keisler en conferencias impartidas en UCLA en 1967.

$f^{-1}[A \cap B] \supseteq f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$, así $f^{-1}[A \cap B] \in u$ y por lo tanto $A \cap B \in f(u)$. Si $A \in f(u)$ y $A \subseteq B$, entonces $f^{-1}[A] \in u$ y $f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B]$, luego $B \in f(u)$. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$, supongamos que $f^{-1}[A] \notin u$, entonces $\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A] \in u$ y $\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[\mathbb{N} \setminus A]$, es decir, $\mathbb{N} \setminus A \in f(u)$. Por lo tanto $f(u) \in \beta\mathbb{N}$. Finalmente si $f^{-1}[A] \in u$ para algún $A \subseteq \mathbb{N}$, entonces $f[f^{-1}[A]] \subseteq A$. Por lo tanto, $\mathscr{B}$ es base de $f(u)$. $\square$

Notemos que en particular, si $A \in u$, entonces $f[A] \in f(u)$; y si $B \in f(u)$, entonces $f^{-1}[B] \in u$.

Lema 3.0.4. *Sean $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ funciones y $u \in \beta\mathbb{N}$. Si existe $A \in u$ tal que $f \upharpoonright A = g \upharpoonright A$ entonces $f(u) = g(u)$.*

Demostración. Si $B \in f(u)$, entonces $f^{-1}[B] \in u$, luego $A \cap f^{-1}[B] \in u$ pero $A \cap f^{-1}[B] = A \cap g^{-1}[B]$, entonces $g^{-1}[B] \in u$ y así se tiene que $B \in g(u)$. Luego $f(u) \subseteq g(u)$ y, por maximalidad, $f(u) = g(u)$. $\square$

Lema 3.0.5. *Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función sin puntos fijos. Entonces hay una partición de $\mathbb{N}$ en tres conjuntos A_0, A_1 y A_2 con la propiedad de que $A_i \cap f[A_i] = \varnothing$ para todo $i \in \{0, 1, 2\}$.*

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea

$$O_n := \{f^k(n) \mid k \in \omega\}$$

donde $f^0(n) = n$ y $f^{k+1}(n) = f(f^k(n))$.

Recursivamente definimos una sucesión de conjuntos X_n, sea $X_1 = O_1$ y dado X_n, sea $k_n = \min(\mathbb{N} \setminus \bigcup_{k \leq n} X_k)$ y $X_{n+1} = O_{k_n}$; si k_n no existe, entonces $X_{n+1} = \varnothing$. Así $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

Sea $h_1 : X_1 \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ una función definida como sigue. Si $|X_1| \equiv 1 \mod 3$, definimos $r_1 = |X_1|$, $h_1(f^{r_1 - 1}(1)) = 1$ y $h_1(f^n(1)) \equiv n \mod 3$, si $n < r_1 - 1$. En caso contrario hacemos $h_1(f^n(1)) \equiv n \mod 3$. Supongamos que tenemos definidas funciones $h_n : \bigcup_{k \leq n} X_k \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ tales que $h_1 \subseteq h_2 \subseteq \ldots \subseteq h_n$ y $\forall x \in \bigcup_{k \leq n} X_k$, $h_n(x) \neq h_n(f(x))$. Si $X_{n+1} = \varnothing$, hacemos $h_{n+1} = h_n$. Si $x \in X_{n+1}$, sea $l_x \in \omega$ el mínimo tal que $f^{l_x}(k_{n+1}) = x$. Sea $h_{n+1} : \bigcup_{k \leq n+1} X_k \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ la función definida como sigue:

Si $x \in \bigcup_{k \leq n} X_k$, $h_{n+1}(x) = h_n(x)$. Si $x \in X_{n+1} \setminus \bigcup_{k \leq n} X_k$:

- Si $X_{n+1} \setminus \bigcup_{k \leq n} X_k$ es infinito, hacemos $h_{n+1}(x) \equiv l_x \mod 3$.
- Si $X_{n+1} \setminus \bigcup_{k \leq n} X_k$ es finito y $X_{n+1} \bigcap \bigcup_{k \leq n} X_k \neq \varnothing$, sea $t \in \omega$ el máximo tal que $f^t(k_{n+1}) \notin \bigcup_{k \leq n} X_k$ y definimos $h_{n+1}(f^{t-i}(k_{n+1})) = h_n(f^{t+2+i}(k_{n+1}))$ con $i \in \{0, \ldots, t\}$.

- En caso de que X_{n+1} sea finito y $X_{n+1} \bigcap \bigcup_{k \leq n} X_k = \varnothing$. Si $|X_{n+1}| \equiv 1 \mod 3$ definimos $r_{n+1} = |X_{n+1}|$ y $h_1(f^{r_{n+1}-1}(1)) = 1$. Si $n < r_{n+1} - 1$, entonces $h_1(f^n(1)) \equiv n \mod 3$. En caso contrario hacemos $h_{n+1}(f^{l_x}(k_{n+1})) \equiv l_x \mod 3$.

Sea $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la función definida como $h = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$, esta función es tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene $h(n) \neq h(f(n))$. Definimos los conjuntos A_i como $A_i = h^{-1}[\{i\}]$ para cada $i \in \{0, 1, 2\}$. Por lo tanto se tiene $A_i \cap f[A_i] = \varnothing$ para todo $i \in \{0, 1, 2\}$. $\square$

Teorema 3.0.6. *Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función y $u \in \beta\mathbb{N}$. Entonces $f(u) = u$ si y solo si $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = n\} \in u$.*

Demostración. Sea $E = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = n\}$. Mostremos primero la necesidad, supongamos que $f(u) = u$. Por contradicción, supongamos que $\mathbb{N} \setminus E \in u$. Sea $m \in \mathbb{N} \setminus E$ arbitrario, y sea $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función dada por $g(n) = f(n)$ si $n \in \mathbb{N} \setminus E$ y $g(n) = m$ si $n \in E$. Entonces g no tiene puntos fijos. Como $f = g$ en $\mathbb{N} \setminus E$ por el lema 3.0.4 se tiene que $g(u) = f(u) = u$. Por el lema 3.0.5 existe una partición de $\mathbb{N}$; A_0, A_1, A_2 tal que $A_i \cap g[A_i] = \varnothing$ para todo $i \in \{0, 1, 2\}$, además $A_i \in u$ para algún $i \in \{0, 1, 2\}$, entonces $A_i \cap g[A_i] \neq \varnothing$, lo cual es absurdo.

Recíprocamente, supongamos que $E \in u$. Sea $id : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la función identidad. Como $f = id$ en E, entonces $f(u) = id(u) = u$. $\square$

El *orden Rudin-Keisler* $\leq_{RK}$ sobre $\beta\mathbb{N}$ se define como sigue:

Definición 3.0.7. Para cualesquier $u, v \in \beta\mathbb{N}$, $u \leq_{RK} v$ si y solo si existe una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(v) = u$. Decimos que $u <_{RK} v$ si $u \leq_{RK} v$ y $v \nleq_{RK} u$, y decimos $u \equiv_{RK} v$ si $u \leq_{RK} v$ y $v \leq_{RK} u$.

Notemos que la relación $\leq_{RK}$ es reflexiva, transitiva pero no es antisimétrica; por otro lado $\equiv_{RK}$ es una relación de equivalencia y $\leq_{RK}$ induce un orden parcial en el conjunto de dichas clases de equivalencia.

Teorema 3.0.8. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $u \equiv_{RK} v$.

(b) $u \leq_{RK} v$ *y siempre que* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *y* $f(v) = u$, *existe* $Q \in v$ *tal que* $f \restriction Q$ *es inyectiva.*

(c) Existe una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *y* $Q \in v$ *tal que* $f(v) = u$ *y* $f \restriction Q$ *es inyectiva.*

(d) Existe una biyección $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *tal que* $g(v) = u$.

Demostración. (a) implica (b). Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(v) = u$. Como $v \leq_{RK} u$, elijamos $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $g(u) = v$. Entonces $g \circ f(v) = g(f(v)) = v$, por el teorema 3.0.6, $Q = \{n \in \mathbb{N} \mid g(f(n)) = n\} \in v$, además es claro que $f \restriction Q$ es inyectiva.

Es trivial que (b) implica (c).

(c) implica (d). Tomemos una partición $Q = Q_1 \cup Q_2$, donde Q_1 y Q_2 sean infinitos. Sea $i \in \{1, 2\}$ tal que $Q_i \in v$, entonces $|\mathbb{N} \setminus Q_i| = |\mathbb{N} \setminus f[Q_i]|$, sea g_1 una biyección entre ambos conjuntos, luego la función $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida como $g \restriction Q_i = f \restriction Q_i$ y $g \restriction (\mathbb{N} \setminus Q_i) = g_1 \restriction (\mathbb{N} \setminus Q_i)$, es una biyección y, por el lema 3.0.4, $g(v) = u$.

(d) implica (a). Como $g(v) = u$, $u \leq_{RK} v$. Como $g^{-1}(u) = v$, $v \leq_{RK} u$. $\square$

Lema 3.0.9. *Sea $u \in \beta\mathbb{N}$. u es principal si y solo si para todo $v \in \beta\mathbb{N}$, $u \leq_{RK} v$.*

Demostración. Supongamos que para todo $v \in \beta\mathbb{N}$, $u \leq_{RK} v$. Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, entonces existe una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(u_n) = u$, luego $f[\{n\}] \in u$. Por lo tanto u es principal.

Recíprocamente. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $u = u_n$ y sea $v \in \beta\mathbb{N}$ arbitrario. Consideremos la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(m) = n$, así para cualquier $A \in v$, $f[A] = \{n\}$. Entonces $u \leq_{RK} v$. $\square$

Lema 3.0.10. *Sean $u, v \in \beta\mathbb{N}$ tales que u es principal. Entonces $u + v \equiv_{RK} v + u \equiv_{RK} v$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $u = u_n$. Consideremos $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la función dada por $m \mapsto n + m$. Es claro que esta función es inyectiva. Además, si $A \in v$, $f[A] = n + A = \bigcup_{x \in \{n\}} x + A = \bigcup_{x \in A} x + \{n\}$. Por lo tanto, por el teorema 3.0.8, $u + v \equiv_{RK} v + u \equiv_{RK} v$. $\square$

3.1. El producto tensorial

Definición 3.1.1. Sean $u, v \in \beta\mathbb{N}$, el *producto tensorial* $u \otimes v$ de u y v se define como

$$u \otimes v = \{A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \{s \in \mathbb{N} \mid \{t \in \mathbb{N} \mid (s, t) \in A\} \in v\} \in u\}.$$

Del teorema 4.2.2 se sigue que $u \otimes v$ es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y del lema 4.2.3 que una base de dicho ultrafiltro son los conjuntos de la forma $\{(s, t) \mid s \in P \text{ y } t \in Q_s\}$ donde $P \in u$ y $Q_s \in v$ para todo $s \in P$. Note que si $n, m \in \mathbb{N}$, $u_n \otimes u_m = u_{(n,m)}$, donde, de acuerdo a nuestra notación, $u_{(n,m)}$ es el ultrafiltro principal generado por (n, m).

Tomando cualquier biyección $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ podemos considerar a $u \otimes v$ como un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ al identificarlo con $f(u \otimes v)$, además note que aunque $f(u \otimes v)$ puede variar dependiendo de la función f, de cualquier forma siempre cae en la misma clase de equivalencia módulo $\equiv_{RK}$.

Lema 3.1.2. *Sean π_1, π_2 las proyecciones canónicas de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Entonces para cualesquiera $u, v \in \beta\mathbb{N}$, $\pi_1(u \otimes v) = u$ y $\pi_2(u \otimes v) = v$. En particular si u, v son no principales, entonces $u <_{RK} u \otimes v$ y $v <_{RK} u \otimes v$*

Demostración. Sea $A \in u$, note que $\pi_1^{-1}[A] = \{(n,m) \mid n \in A, m \in \mathbb{N}\} \in u \otimes v$. Análogamente si $A \in v$, $\pi_2^{-1}[A] = \{(n,m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in A\} \in u \otimes v$. Así $u \leq_{RK} u \otimes v$ y $v \leq_{RK} u \otimes v$.

Notemos que si u, v son no principales, entonces las proyecciones π_1, π_2 nunca son inyectivas para ningún elemento de $u \otimes v$, y así $u \not\equiv_{RK} u \otimes v$ y $v \not\equiv_{RK} u \otimes v$ por el teorema 3.0.8. $\square$

Observación 3.1.3. Si $u \in \beta\mathbb{N}$ es principal, entonces $v \equiv_{RK} u \otimes v$. Análogamente, si $v \in \beta\mathbb{N}$ es principal, entonces $u \equiv_{RK} u \otimes v$.

3.2. Ultrafiltros selectivos

Esta sección trata sobre los ultrafiltros minimales, respecto al orden Rudin-Keisler, en $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. La existencia de tales ultrafiltros es independiente de ZFE. (Vea [2, 12, 13].)

Definición 3.2.1. $u \in \beta\mathbb{N}$ es un *ultrafiltro selectivo* si para toda partición $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$, o bien existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A_m \in u$, o bien existe $A \in u$ tal que $|A \cap A_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.2.2. *Sea $u \in \beta\mathbb{N}$. u es selectivo si y solo si para toda función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ existe $A \in u$ tal que $f \restriction A$ es o bien constante o bien inyectiva.*

Demostración. Supongamos que $u \in \beta\mathbb{N}$ es selectivo. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función arbitraria, consideremos las preimágenes $f^{-1}[\{n\}]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que forman un partición de $\mathbb{N}$, por hipótesis; o bien existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-1}[\{k\}] \in u$, es decir, la función restringida a dicho conjunto es constante con valor k; o bien existe $A \in u$ tal que $|A \cap f^{-1}[\{n\}]| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $f \restriction A$ es inyectiva.

Recíprocamente, sea $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una partición de $\mathbb{N}$. Sea la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $f^{-1}[\{n\}] = A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, existe $A \in u$ tal que $f \restriction A$ es; o bien constante, es decir, $u \ni A \subseteq A_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$; o bien es inyectiva, es decir, $|A \cap A_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 3.2.3. *Sean $u, v \in \beta\mathbb{N}$ no principales tales que u es selectivo. Si $v \leq_{RK} u$, entonces $u \equiv_{RK} v$.*

Demostración. Por definición del orden Rudin-Keisler, existe una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(u) = v$, como u es selectivo por el teorema 3.2.2, existe $A \in u$ tal que $f \upharpoonright A$ es; o bien constante, es decir, el ultrafiltro $f(u)$ es principal lo cual contradice la hipótesis; o bien inyectiva, entonces por el teorema 3.0.8 se tiene que $u \equiv_{RK} v$. $\square$

El resultado anterior muestra que entre los ultrafiltros no principales, los ultrafiltros selectivos son minimales respecto al orden Rudin-Keisler. Históricamente los ultrafiltros selectivos (también llamados ultrafiltros de Ramsey), emergieron del estudio de la topología de $\beta\mathbb{N}$ y por lo tanto han precedido y motivado la investigación del orden Rudin-Keisler; así, estos ultrafiltros son interesantes independientemente del orden Rudin-Kesiler.

Capítulo 4

Ningún idempotente a partir de un Q-punto

En 1976, A. Mathias [12] construyó un modelo donde el axioma de elección falla pero existen ultrafiltros no principales, este modelo es un modelo de Solovay[1] al que se le adjunta un ultrafiltro selectivo. Existe una vieja conjetura debida a A. Blass, en la que se cree que los únicos ultrafiltros que existen en dicho modelo son las imágenes Rudin-Keisler de sumas Frolík-Blass del ultrafiltro selectivo.

Como vimos al final del Capítulo 2, la pregunta que nos propusimos contestar fue la siguiente: ¿La existencia de un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$ implica la existencia de un ultrafiltro idempotente sobre $\mathbb{N}$? La manera en que decidimos abordar el problema fue tomar el modelo de Mathias como caja negra. Todas las demostraciones siguientes están diseñadas para correr en dicho modelo. Si la conjetura de Blass es cierta, y logramos demostrar que no hay ultrafiltros idempotentes a partir de un selectivo, entonces habremos respondido la pregunta de manera negativa.

4.1. q^n nunca es idempotente

Dados $A \subseteq \mathbb{N}$ y $u \in \beta\mathbb{N}$ se definió, en el Capítulo 1, el conjunto $A_u = \{n \in \mathbb{N} \mid A - n \in u\}$ y de la definición de la suma de ultrafiltros se tiene que $A \in u + u \Leftrightarrow A_u \in u$, notemos que si u es idempotente, entonces $A \in u \Leftrightarrow A_u \in u$. Ahora supongamos que tenemos un

[1]Uno de los modelos más conocidos donde el axioma de elección falla es el modelo de Solovay [18]. En el modelo se cumple ZF, falla AE y todo conjunto de reales es Lebesgue medible. De esta forma R. Solovay mostró que para probar la existencia de conjuntos no medibles es esencial el axioma de elección.

ultrafiltro selectivo q, no es muy difícil ver que ningún selectivo es idempotente[2], pero ¿es posible que $q+q$, o en general sumar q consigo mismo n veces, sea idempotente? En esta sección responderemos esta pregunta.

Definición 4.1.1. Sean $u \in \beta\mathbb{N}$ y $A \subseteq \mathbb{N}$. Definimos recursivamente.

(i) $A_{u_0} = A$

(ii) $A_{u_1} = A_u$

(iii) $A_{u_{k+1}} = (A_{u_k})_u$

Y denotaremos $u^n = \underbrace{u + u + \ldots + u}_{n\text{-veces}}$. Así, se sigue que $A \in u^n \Leftrightarrow A_{u_{n-1}} \in u$.

Proposición 4.1.2. *Sea $u \in \beta\mathbb{N}$ no principal. Si $A \in u^n$ y $B \in u$ entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in B$ tales que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ y $\sum_{i=1}^n x_i \in A$.*

Demostración. Notemos que por hipótesis $(A)_{u_{n-1}} \cap B \in u$, entonces elegimos algún $x_1 \in (A)_{u_{n-1}} \cap B$, luego $(A - x_1)_{u_{n-2}} = (A)_{u_{n-2}} - x_1 \in u$, así, sea $x_2 \in (A - x_1)_{u_{n-2}} \cap B$ tal que $x_1 < x_2$, continuando recursivamente, en el paso sucesor tomamos algún $x_{k+1} \in (A-(x_1+\ldots+x_k))_{u_{n-k-1}} \cap B$ tal que $x_{k+1} > x_k$, y continuamos hasta que $x_n \in [A-(x_1+\cdots+x_{n-1})] \cap B$. Todos los x_k están bien definidos porque al ser u no principal, todos sus elementos son conjuntos infinitos. $\square$

Observación 4.1.3. En el Capítulo 2, se definió para cualquier $X \subseteq \mathbb{N}$ el conjunto de todas las sumas (finitas) distintas $\mathrm{FS}(X)$. Denotaremos como $\mathrm{FS}_n(X)$ al conjunto de todas las sumas distintas de n elementos de X.

Proposición 4.1.4. *Sea $u \in \beta\mathbb{N}$ no principal. Sea $A \in u$, entonces $FS_n(A) \in u^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Fije $n \in \mathbb{N}$. Supongamos por contradicción que $(\mathbb{N} \setminus \mathrm{FS}_n(A))_{u_{n-1}} \in u$. Luego por la proposición 4.1.2, existen $x_1, \ldots, x_n \in A$ distintos a pares tales que $\sum_{i=1}^n x_i \in \mathbb{N} \setminus \mathrm{FS}_n(A)$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\mathrm{FS}_n(A) \in u^n$. $\square$

Así, es inmediato el siguiente resultado.

[2]Si $q \in \beta\mathbb{N}$ es selectivo, y por lo tanto un Q-punto (obervación 4.1.10), entonces existe $A \in q$ un conjunto con unicidad de sumas (observación 4.3.3); por otra parte, si además suponemos que q es idempotente se sigue, por el teorema A.0.3, que existe $X \subseteq A$ infinito tal que $\mathrm{FS}(X) \subseteq A$, lo cual contradice la unicidad de sumas de A.

Corolario 4.1.5. Sea $u \in \beta\mathbb{N}$ no principal. Sea $A \in u$, entonces $\mathrm{FS}(A) \in u^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 4.1.6. *Sea $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $X = \{x_1 < \ldots < x_k < \ldots\}$ y $x_{n+1} \geq 2x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $x_n > x_1 + \ldots + x_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Procedamos inductivamente. El caso base es trivial. El paso sucesor está dado por $x_{k+1} \geq 2x_k > x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_k$. □

Proposición 4.1.7. *Sea $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $X = \{x_1 < \ldots < x_k < \ldots\}$ y $x_{n+1} \geq 2x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces todo $x \in FS(X)$ tiene una descomposición única en X, es decir, si $x \in FS(X)$ es*

$$x = a_1 + \ldots + a_n \quad \textit{con} \quad a_1, \ldots, a_n \in X$$

y

$$x = b_1 + \ldots + b_m \quad \textit{con} \quad b_1, \ldots, b_m \in X$$

es otra descomposición de x, entonces $n = m$ y existe $\sigma \in S_n$ tal que $a_i = b_{\sigma(i)}$ para $1 \leq i \leq n$.

Demostración. Supongamos que

$$a_1 + \ldots + a_n = x = b_1 + \ldots + b_m.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $n \leq m$ y que tanto los a_i como los b_i están ordenados ascendentemente. Por la proposición 4.1.6 se tiene que $2a_n > x \geq b_m$ y $2b_m > x \geq a_n$. Si $a_n > b_m$, entonces $2b_m > a_n > b_m$, lo cual es absurdo, pues por hipótesis $x_{n+1} \geq 2x_n$. Simétricamente si $a_n < b_m$. Por lo tanto, $a_n = b_m$. Así, cancelando $a_n = b_m$ de la igualdad obtenemos

$$a_1 + \ldots + a_{n-1} = b_1 + \ldots + b_{m-1}.$$

Usando el mismo argumento recursivamente se tiene que

$$0 = b_1 + \ldots + b_{m-n}.$$

Por lo tanto $m = n$ y $a_i = b_i$. □

Definición 4.1.8. Sea $X \subseteq \mathbb{N}$, decimos que X es un *conjunto con unicidad de sumas* si todo elemento de $\mathrm{FS}(X)$ tiene una descomposición única en X.

Definición 4.1.9. $q \in \beta\mathbb{N}$ es un *Q-punto* si y solo si para toda partición $\{A_n \mid n \in \omega\}$ de $\mathbb{N}$ en conjuntos finitos A_n existe $A \in q$ tal que $|A \cap A_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$.

Observación 4.1.10. De la definición anterior se sigue que todo ultrafiltro selectivo es un Q-punto.

Definición 4.1.11. Dado $n \in \omega$, definimos $I_n = [2^n, 2^{n+1}) \cap \mathbb{N}$ e $\mathscr{I} = \{I_n \mid n \in \omega\}$.

Nótese que $\mathscr{I}$ es una partición de $\mathbb{N}$ en conjuntos finitos I_n, además si $u \in \beta\mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{k\in\omega} I_{2k+i} \in u$ para algún $i \in \{0,1\}$, pues $\{(\bigcup_{k\in\omega} I_{2k}), (\bigcup_{k\in\omega} I_{2k+1})\}$ también forma una partición de $\mathbb{N}$.

Teorema 4.1.12. *Sea $q \in \beta\mathbb{N}$ un Q-punto. Entonces la igualdad*

$$q^n = q^m$$

es cierta si y solo si $n = m$.

Demostración. Supongamos por contradicción que $n < m$. Sea $i \in \{0,1\}$ tal que $\bigcup_{k\in\omega} I_{2k+i} \in q$ y definamos $X := \bigcup_{k\in\omega} I_{2k+i} \in q$. Por hipótesis, existe $A \in q$ tal que $|A \cap I_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$. Sea $Y := A \cap X \in q$. Entonces, por la proposición 4.1.4, $\mathrm{FS}_n(Y) \in q^n$, luego $\mathrm{FS}_n(Y) \in q^m$. Por lo tanto, de la proposición 4.1.2 se sigue que existen $x_1, \ldots, x_m \in Y$ distintos a pares tales que $x_1 + \ldots + x_m \in \mathrm{FS}_n(Y)$. Lo cual contradice la proposición 4.1.7, nótese que los elementos de $Y = \{y_1, y_2, \ldots, \}$ cumplen que $y_{m+1} \geq 2y_m$, es decir, $Y \in q$ tiene unicidad de sumas. $\square$

4.2. La suma Frolík-Blass de ultrafiltros

Ahora introduciremos una nueva forma de «sumar» ultrafiltros que llamaremos la suma Frolík-Blass o la suma indexada, desarrollada independientemente por Frolík [6] y Blass [3, Capítulo IV].

Definición 4.2.1. Sean $u \in \beta\mathbb{N}$ y una sucesión $\langle v_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ en $\beta\mathbb{N}$, definimos la *suma Frolík-Blass* de $\langle v_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ respecto a u como

$$u\text{-}\sum v_n := \{A \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid \{m \in \mathbb{N} \mid (n,m) \in A\} \in v_n\} \in u\}.$$

Hacemos notar que si la sucesión $\langle v_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ es constante, digamos igual a un ultrafiltro v, entonces la suma de Frolík-Blass se convierte en el producto tensorial, es decir, $u\text{-}\sum v = u \otimes v$.

Dado $A \subseteq \mathbb{N}^2$, denotaremos a la sección vertical de A en n como $(A)_n := \{m \in \mathbb{N} \mid (n,m) \in A\}$. No es difícil ver que $(A^c)_n = (A_n)^c$ y $(A \cap B)_n = (A)_n \cap (B)_n$.

Teorema 4.2.2. *Sean $u \in \beta\mathbb{N}$ y una sucesión $\langle v_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ en $\beta\mathbb{N}$, entonces la suma Frolík-Blass $u\text{-}\sum v_n$, es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.*

Demostración. Es claro que $\varnothing \notin u\text{-}\sum v_n$. Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}^2$ tales que $A \subseteq B$. Si $A \in u\text{-}\sum v_n$, cuando $n \in \{n \mid (A)_n \in v_n\}$ tenemos $(B)_n \in v_n$, así $\{n \mid (A)_n \in v_n\} \subseteq \{n \mid (B)_n \in v_n\}$, luego, $B \in u\text{-}\sum v_n$. Sean $A, B \in u\text{-}\sum v_n$, entonces $\{n \mid (A)_n \in v_n\}, \{n \mid (B)_n \in v_n\} \in u$, así $\{n \mid (A)_n \in v_n\} \cap \{n \mid (B)_n \in v_n\} \in u$, luego $\{n \mid (A)_n \cap (B)_n \in v_n\} \in u$. Por lo tanto, $A \cap B \in u\text{-}\sum v_n$. Se sigue que $u\text{-}\sum v_n$ es un filtro. Mostremos ahora que es un ultrafiltro. Sea $A \subseteq \mathbb{N}^2$. Notemos que $\mathbb{N} = \{n \mid (A)_n \in v_n\} \cup \{n \mid (A)_n \notin v_n\}$ donde los conjuntos de la derecha son disjuntos. Como u es un ultrafiltro, se tiene que $\{n \mid (A)_n \in v_n\} \in u$ o $\{n \mid (A^c)_n \in v_n\} \in u$, es decir, o bien $A \in u\text{-}\sum v_n$ o bien $A^c \in u\text{-}\sum v_n$. $\square$

Lema 4.2.3. *Sean $u \in \beta\mathbb{N}$ y una sucesión $\langle v_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ en $\beta\mathbb{N}$. Los conjuntos de la forma $\{(s,t) \in \mathbb{N}^2 \mid s \in P \text{ y } t \in Q_s\}$, tales que $P \in u$ y $Q_s \in v_s$ para todo $s \in P$, forman una base para $u\text{-}\sum v_n$.*

Demostración. Es claro que dicha familia es no vacía, pues $\mathbb{N}^2 = \{(s,t) \mid s \in \mathbb{N} \text{ y } t \in \mathbb{N}\}$ donde $\mathbb{N} \in u$ y $\mathbb{N} \in v_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $A := \{(s,t) \in \mathbb{N}^2 \mid s \in P \text{ y } t \in Q_s\}$, tales que $P \in u$ y $Q_s \in v_s$ para todo $s \in P$. Sea $s \in P$, entonces $Q_s \in v_s$. Si $t \in Q_s$, entonces $(s,t) \in A$; así, $t \in (A)_s := \{m \in \mathbb{N} \mid (s,m) \in A\}$, es decir, $Q_s \subseteq (A)_s$, luego, $(A)_s \in v_s$. Por lo tanto, $P \subseteq \{s \mid (A)_s \in v_s\}$, entonces $\{s \mid (A)_s \in v_s\} \in u$. Así, $A \in u\text{-}\sum v_n$.

Sea $A \in u\text{-}\sum v_n$, entonces $P := \{s \mid (A)_s \in v_s\} \in u$. Sean $s \in P$ y $t \in (A)_s$, luego $(A)_s \in v_s$ y $(s,t) \in A$. Por lo tanto, $\{(s,t) \mid s \in P \text{ y } t \in (A)_s\} \subseteq A$. $\square$

Definición 4.2.4. Sean $u \in \beta\mathbb{N}$ y una sucesión $\langle v_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ en $\beta\mathbb{N}$. Definimos $u\text{-}\bigoplus v_n$ como la imagen Rudin-Keisler de la suma Frolík-Blass de $\langle v_n\rangle$ respecto a u bajo la suma entrada por entrada. Nótese que

$$u\text{-}\bigoplus v_n = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n+m \in A\} \in u\text{-}\sum v_n\}.$$

Por definición, se tiene que $u\text{-}\bigoplus v_n \leq_{RK} u\text{-}\sum v_n$.

Lema 4.2.5. *Sean $u, v \in \beta\mathbb{N}$, entonces $u\text{-}\bigoplus v = u + v$.*

Demostración. Es claro que si $\bigcup_{n\in A} n+B_n$, tal que $A \in u$ y $B_n \in v$ para todo $n \in A$, es un básico de $u+v$, entonces $\{(n,m) \mid n \in A \text{ y } m \in B_n\} \subseteq \{(n,m) \mid n+m \in \bigcup_{n\in A} n+B_n\}$, es decir, $\{(n,m) \mid n+m \in \bigcup_{n\in A} n+B_n\} \in u \otimes v$. Así $\bigcup_{n\in A} n+B_n \in u\text{-}\bigoplus v$. Por lo tanto, $u+v \subseteq u\text{-}\bigoplus v$; así, por maximalidad, $u\text{-}\bigoplus v = u+v$. $\square$

4.3. q-bondad

Dado un ultrafiltro u, utilizando la suma Frolík-Blass recursivamente y tomando las imágenes Rudin-Keisler bajo la suma entrada por entrada de dichas sumas Frolík-Blass, se pueden construir ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$, entre los cuales están incluidos las sumas usuales u^n. Si empezamos a partir de un Q-punto q, el teorema 4.1.12 nos asegura que las sumas q^n nunca son idempotentes; en esta sección probaremos algo más general: ninguno de los ultrafiltros construidos recursivamente son idempotentes.

Definición 4.3.1. Sean $u \in \beta\mathbb{N}$ y $X = \{x_1 < x_2 < ...\}$ un conjunto con unicidad de sumas. Decimos que $A \in u$ es X-*bueno* si $A \subseteq \mathrm{FS}(X)$ y para toda subsucesión $\langle x_{i_k} \mid k \in \mathbb{N}\rangle$ de X existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_{i_1} + \ldots + x_{i_n} \in A$.

Definición 4.3.2. Sea $q \in \beta\mathbb{N}$ un Q-punto. Decimos que $u \in \beta\mathbb{N}$ es q-*bueno* si para todo $X \in q$, conjunto con unicidad de sumas, existe algún $A \in u$ que es X-bueno.

Observación 4.3.3. De la demostración del teorema 4.1.12 se sigue que todo Q-punto tiene algún conjunto con unicidad de sumas.

Definición 4.3.4. Sean $A \subseteq \mathbb{N}$ y $a \in A$, definimos A past $a := \{n \in A \mid n > a\}$

Observación 4.3.5. Note que si $u \in \beta\mathbb{N}$ es no principal y $A \in u$, entonces para todo $a \in A$, se cumple que $(A \text{ past } a) \in u$; pues en caso contrario el conjunto finito $\{n \in A \mid n \leq a\} \in u$, lo cual es absurdo.

Para los siguientes ejemplos, consideremos $q \in \beta\mathbb{N}$ un Q-punto y $X \in q$ un conjunto con unicidad de sumas.

Ejemplo 4.3.6. q es q-bueno. $X \in q$, $X \subseteq \mathrm{FS}(X)$ y para toda subsucesión $\langle x_{i_k} \mid k \in \mathbb{N}\rangle$ de X, el natural que funciona es 1, pues $x_{i_1} \in X$ y por la unicidad de sumas de X no puede pasar que exista algún otro $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_{i_1} + \ldots + x_{i_n} \in X$.

Ejemplo 4.3.7. q^2 es q-bueno. De la proposición 4.1.4, se tiene que $FS_2(X) \in q^2$, además es claro que $FS_2(X) \subseteq \mathrm{FS}(X)$ y para toda subsucesión $\langle x_{i_k} \mid k \in \mathbb{N}\rangle$ de X, 2 es el único natural tal que $x_{i_1} + x_{i_2} \in FS_2(X)$; una vez más el argumento es la unicidad de sumas de X.

Ejemplo 4.3.8. En general, q^n es q-bueno. $FS_n(X) \in q^n$, $FS_n(X) \subseteq \mathrm{FS}(X)$ y para toda subsucesión $\langle x_{i_k} \mid k \in \mathbb{N}\rangle$ de X, n es el único tal que $x_{i_1} + \ldots + x_{i_n} \in \mathrm{FS}_n(X)$.

Ejemplo 4.3.9. Un ejemplo más interesante es cuando tomamos la sucesión $\langle q^n \rangle$ en $\beta\mathbb{N}$, entonces $q\text{-}\bigoplus q^n$ es q-bueno. Sea $A = \{x + \sum_i x_i \mid x \in X,\ \sum_i x_i \in FS_x(X \text{ past } x)\}$. Sea $B = \{(s,t) \mid s \in X,\ t \in FS_s(X \text{ past } s)\}$, B es un básico de $q\text{-}\sum q^n$, pues $X \in q$, y de la observación 4.3.5 se sigue que $(X \text{ past } s) \in q$, entonces $FS_s(X \text{ past } s) \in q^s$ para toda $s \in X$; además si $(s,t) \in B$, se tiene que $s + t \in A$, es decir, $B \subseteq \{(s,t) \mid s + t \in A\}$. Así, $A \in q\text{-}\bigoplus q^n$ y además $A \subseteq \mathrm{FS}(X)$. Si $\langle x_{i_k} \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ es una subsucesión arbitraria de X, entonces $x_{i_1} \in X$ y $x_{i_2} + \ldots + x_{i_{x_{i_1}+1}} \in FS_{x_{i_1}}(X \text{ past } x_{i_1})$. Por lo tanto, $x_{i_1} + 1$ es el único natural tal que $x_{i_1} + \ldots + x_{i_{x_{i_1}+1}} \in A$, otra vez, por la unicidad de sumas de X.

Proposición 4.3.10. *Sean $q \in \beta\mathbb{N}$ un Q-punto y $u \in \beta\mathbb{N}$ q-bueno, entonces u no es idempotente.*

Demostración. Sea $X \in q$ un conjunto con unicidad de sumas, por hipótesis, existe algún $A \in u$ que es X-bueno. Basta mostrar que

$$\left[\bigcup_{a \in A} a + A \cap \mathrm{FS}(X \text{ past } a) \right] \cap A = \varnothing$$

donde $\bigcup_{a \in A} a + A \cap \mathrm{FS}(X \text{ past } a)$ es un básico de $u + u$, pues $A \in u$ y $\mathrm{FS}(X \text{ past } a) \in u$ por la observación 4.3.5 y el corolario 4.1.5.

Sean $a \in A$ y $b \in A \cap \mathrm{FS}(X \text{ past } a)$. Luego, existen $x_1, \ldots, x_j, x_k, \ldots, x_l \in X$ tales que $a = x_1 + \ldots + x_j$ y $b = x_k + \ldots + x_l$ con $x_m < x_n$ si $m < n$. Si consideramos la subsucesión $x_1, \ldots, x_j, x_k, \ldots, x_l, x_{l+1}, x_{l+2}, x_{l+3}, \ldots$, (donde los elementos a partir de x_{l+1} pueden ser arbitrarios o de cualquier valor constante) entonces j es el único natural que cumple la condición de X-bondad para A. Por lo tanto, $a + b \notin A$. □

Proposición 4.3.11. *Sean $q \in \beta\mathbb{N}$ un Q-punto, $u \in \beta\mathbb{N}$ q-bueno y una sucesión $\langle v_n \rangle$ en $\beta\mathbb{N}$ de ultrafiltros q-buenos, entonces*

$$u\text{-}\sum v_n \equiv_{RK} u\text{-}\bigoplus v_n$$

Demostración. Sea $X \in q$ un conjunto con unicidad de sumas, por hipótesis, existen $A \in u$ y $A_n \in v_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, todos ellos X-buenos. Sea $B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in A_a \cap \mathrm{FS}(X \text{ past } a)\}$, note que este conjunto es un básico de $u\text{-}\sum v_n$. Mostremos que el mapeo $(n,m) \mapsto n + m$ es inyectivo en B.

Sean $(x,y), (z,w) \in B$ tales que $x + y = z + w$. Como $x,\ z \in A$; $y \in A_x \cap \mathrm{FS}(X \text{ past } x)$, $w \in A_z \cap \mathrm{FS}(X \text{ past } z)$; se tiene que $x = a_{i_1} + \ldots + a_{i_s}$, $y = a_{i_{s+1}} + \ldots + a_{i_{s+t}}$, $z = b_{i_1} + \ldots + b_{i_{s'}}$, $w = b_{i_{s'+1}} + \ldots + b_{i_{s'+t'}}$; es decir, $x + y,\ z + w \in \mathrm{FS}(X)$, luego por la unicidad de sumas, los sumandos son iguales y $s = s'$, $t = t'$, además, por la X-bondad, $x = z$ y $y = w$. Por lo tanto, de la definición 4.2.4 y el teorema 3.0.8, se sigue que $u\text{-}\sum v_n \equiv_{RK} u\text{-}\bigoplus v_n$. □

Definición 4.3.12. Dado $q \in \beta\mathbb{N}$ un Q-punto, definimos por recursión transfinita las siguientes familias.

(i) $\mathscr{F}_0 = \{q\}$.

(ii) En el paso sucesor. $\mathscr{F}_{\alpha+1} = \{u\text{-}\bigoplus v_n \mid u, v_n \in \mathscr{F}_\alpha\}$.

(iii) En el paso límite. $\mathscr{F}_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathscr{F}_\xi$.

Proposición 4.3.13. *Sean $q \in \beta\mathbb{N}$ un Q-punto y $u \in \beta\mathbb{N}$. Si $u \in \mathscr{F}_\alpha$, para algún $\alpha \in$ **ORD**, entonces u es q-bueno.*

Demostración. El caso base es claro, pues q es q-bueno. El paso límite es trivial. Mostremos el paso sucesor. Supongamos que la condición se cumple para α. Sea $X \in q$ un conjunto con unicidad de sumas. Sean $u \in \mathscr{F}_\alpha$ y $\langle v_n \rangle$ una sucesión en $\mathscr{F}_\alpha$. Por hipótesis inductiva, existen $A \in u$ y $A_n \in v_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, todos X-buenos.

Sea $B = \{\sum_i x_i + \sum_j x_j \mid \sum_i x_i \in A, \sum_j x_j \in A_{\sum_i x_i} \text{ past } \sum_i x_i\}$. Así $B \subseteq \mathrm{FS}(X)$ y $B \in u\text{-}\bigoplus v_n$, por ser un básico de $u\text{-}\bigoplus v_n$. Sea $\langle x_{i_k} \mid k \in \mathbb{N}\rangle$ una subsucesión de X, por la q-bondad de u, existe un único $l \in \mathbb{N}$ tal que $x_{i_1} + \ldots + x_{i_l} \in A$. Sea $a := x_{i_1} + \ldots + x_{i_l}$. Además, tomando ahora la subsucesión $x_{i_{l+1}}, x_{i_{l+2}}, \ldots$, por la X-bondad de A_a, existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_{i_{l+1}} + \ldots + x_{i_{l+n+1}} \in A_a$. Así, $l + n$ es el único natural tal que $x_{i_1} + \ldots + x_{i_l} + x_{i_{l+1}} + \ldots + x_{i_{l+n+1}} \in B$. Por lo tanto, $u\text{-}\bigoplus v_n \in \mathscr{F}_{\alpha+1}$ es q-bueno. □

De las proposiciones 4.3.10 y 4.3.13 se sigue que:

Teorema 4.3.14. *Sean $q \in \beta\mathbb{N}$ un Q-punto y $u \in \beta\mathbb{N}$. Si $u \in \mathscr{F}_\alpha$, para algún $\alpha \in$ **ORD**, entonces u no es idempotente.*

Acabamos de ver que empezar con $q \in \beta\mathbb{N}$ un Q-punto, y «sumar» (en el sentido Frolík-Blass) recursivamente el ultrafiltro q, se producen ultrafiltros sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, identificando esos ultrafiltros con sus imágenes Rudin-Keisler bajo la suma entrada por entrada, los ultrafiltros resultantes sobre $\mathbb{N}$ tienen una propiedad combinatoria bastante *amable* (la q-bondad) que los vuelve no idempotentes. Sin embargo, si se toman las imágenes Rudin-Keisler de estos ultrafiltros bajo funciones arbitrarias (en vez de la suma entrada por entrada), entonces la q-bondad no necesariamente se conserva.

El siguiente paso para resolver el problema propuesto sería analizar dichas imágenes Rudin-Keisler bajo funciones arbitrarias y tratar de encontrar alguna propiedad similar (ya sea combinatoria o topológica) que este relacionada con la idempotencia. Dicho camino generalizaría las ideas aquí presentadas y, aunque similar, necesitaría de otro tipo de herramientas además de las utilizadas. Con el fin de que este trabajo sea autónomo y presente la primera etapa de como se abordó el problema, hemos decidido terminarlo con el teorema 4.3.14.

Apéndice A

Teorema de Hindman

Proposición A.0.1. *Sea $u \in \beta\mathbb{N}$ idempotente. Si $A \in u$, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existen distintos elementos $x_1, \dots, x_n \in A$ tales que FS$(x_1, \dots, x_n) \subseteq A$.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción. Para el caso base, sea $A \in u$ arbitrario y $x_1 \in A$, luego $\mathrm{FS}(x_1) \subseteq A$. Supongamos que el resultado es cierto para n y sea $A \in u$. Como $u = u+u$, se tiene que $A^* = A \cap A_u \in u$. Sea $x_1 \in A^*$, entonces $x_1 \in A$ y $A - x_1 \in u$. Así, $B = A \cap (A - x_1) \in u$. Por hipótesis de inducción, existen $x_2, \dots, x_{n+1} \in B$ tales que $\mathrm{FS}(x_2, \dots, x_{n+1}) \subseteq B$. Sea $z \in \mathrm{FS}(x_1, \dots, x_{n+1})$ tal que $z \notin \mathrm{FS}(x_2, \dots, x_{n+1})$, entonces existe $y \in \mathrm{FS}(x_2, \dots, x_{n+1})$ tal que $x_1 + y = z$, como $y \in A - x_1$, entonces $z \in A$. Por lo tanto, $\mathrm{FS}(x_1, \dots, x_{n+1}) \subseteq A$. $\square$

Proposición A.0.2. *Sea $u \in \beta\mathbb{N}$ idempotente. Si $A \in u$, entonces para cualquier $n > k$ existen distintos elementos $x_1, \dots, x_n \in A$ tales que FS$(x_1, \dots, x_n) \subseteq A$ y los valores de $x_1, \dots, x_k$ no dependen de n.*

Demostración. La demostración se hace por inducción sobre k. Notemos que el caso base es la proposición anterior y el argumento inductivo es idéntico a la demostración previa. $\square$

Teorema A.0.3. *Sea $u \in \beta\mathbb{N}$ idempotente. Si $A \in u$, entonces existe $X \subseteq A$ infinito tal que FS$(X) \subseteq A$.*

Demostración. Fijando recursivamente los valores $x_k \in A$ encontrados en la proposición anterior, obtenemos una sucesión infinita $x_1, \dots, x_n, \dots,$ de elementos de A tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mathrm{FS}(x_1, \dots, x_n) \subseteq A$, de aquí se sigue que, si $X = \{x_1, \dots, x_n \dots, \}$, entonces $\mathrm{FS}(X) \subseteq A$; en efecto, si $x \in \mathrm{FS}(X)$, entonces existe algún $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $x \in \mathrm{FS}(x_1, \dots, x_n)$, y así $x \in A$. $\square$

Teorema A.0.4 (Hindman)**.** *Sea cualquier coloración* $c : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$*, entonces existe un conjunto infinito* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$ *tal que el conjunto* $FS(X)$ *es monocromático, es decir, existe* $i \in \{0,1\}$ *tal que* $FS(X) \subseteq c^{-1}[\{i\}]$*.*

Demostración. Sean $c : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ una coloración arbitraria y $u \in \beta\mathbb{N}$ un ultrafiltro idempotente. Notemos que $\mathbb{N} = c^{-1}[\{0\}] \cup c^{-1}[\{1\}]$, entonces $A := c^{-1}[\{i\}] \in u$ para algún $i = 0,1$. Por el teorema anterior, existe $X \subseteq A$ infinito tal que $\mathrm{FS}(X) \subseteq A$, es decir, $\mathrm{FS}(X)$ es monocromático. □

La demostración original de Hindman, en la que usa argumentos puramente combinatorios, se encuentra en [7]. Una demostración más corta pero también combinatoria es debido a Baumgartner y está en [1]. Para una introducción a la teoría de Ramsey vea [19].

Apéndice B

Cardinalidad

Los siguientes son teoremas en ZF.

Decimos que $X \precsim Y$ si existe una función $f : X \longrightarrow Y$ inyectiva y $X \approx Y$ si existe una biyección $f : X \longrightarrow Y$.

Son clásicos los primeros dos teoremas.

Teorema B.0.1 (Cantor-Bernstein)**.** *Si $X \precsim Y$ y $Y \precsim X$, entonces $X \approx Y$.*

Teorema B.0.2. $\mathbb{R} \approx 2^{\omega}$.

Teorema B.0.3. $(A^B)^C \approx A^{B\times C}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que A, B y C son disjuntos y no vacíos. Sea $f \in (A^B)^C$, entonces $\forall c \in C$: $f(c) \in A^B$, es decir, $f(c) : B \longrightarrow A$ es una función. Definamos la función $f^* : B \times C \longrightarrow A$ como $f^*(b, c) = f(c)(b)$. Sea $\varphi : (A^B)^C \longrightarrow A^{B\times C}$ la función dada por $\varphi(f) = f^*$.

Mostremos que φ es inyectiva. Sean $f, g \in (A^B)^C$ tales que $f^* = g^*$, luego $\forall(b, c) \in B \times C$: $f^*(b, c) = g^*(b, c) \Rightarrow \forall(b, c) \in B \times C$: $f(c)(b) = g(c)(b) \Rightarrow \forall c \in C$: $f(c) = g(c)$. Por lo tanto, $f = g$.

Ahora veamos que φ es sobre. Sea $\psi \in A^{B\times C}$, luego $\forall(b, c) \in B\times C$: $\psi(b, c) \in A$. Dado $c \in C$, definimos $h_c \in A^B$ tal que $\forall b \in B$: $h_c(b) = \psi(b, c)$, entonces existe $f \in (A^B)^C$ tal que $f(c) = h_c$. Por lo tanto, $\psi = f^*$.

Así, se tiene que φ es una biyección. Y por lo tanto se sigue $(A^B)^C \approx A^{B\times C}$. $\square$

Teorema B.0.4. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}$.

Demostración. Basta mostrar el caso $n = 2$. Es fácil ver que $f : 2^{\omega} \times 2^{\omega} \longrightarrow 2^{\omega}$ dada por $(\langle a_n\rangle, \langle b_n\rangle) \mapsto (a_1, b_1, a_2, b_2, ...)$ es una biyección. $\square$

Teorema B.0.5. $\forall n \in \mathbb{N}, [\mathbb{R}]^n \approx \mathbb{R}$.

Demostración. Fije $n \in \mathbb{N}$. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow [\mathbb{R}]^n$ dada por $x \mapsto \{x, x+1, \ldots, x+n-1\}$ es inyectiva. En efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = f(y)$, entonces $\text{mín} f(x) = \text{mín} f(y)$. Por lo tanto, $x = y$. Así $\mathbb{R} \precsim [\mathbb{R}]^n \precsim \mathbb{R}^n$, luego por Cantor-Bernstein $[\mathbb{R}]^n \approx \mathbb{R}$. $\square$

Teorema B.0.6. $\mathbb{R}^\omega \approx \mathbb{R}$.

Demostración. $\mathbb{R}^\omega \approx (2^\omega)^\omega \approx 2^{\omega \times \omega} \approx 2^\omega \approx \mathbb{R}$. $\square$

Teorema B.0.7. $\mathbb{R} \approx [\mathbb{R}]^{<\omega}$.

Demostración. $\mathbb{R} \precsim [\mathbb{R}]^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} [\mathbb{R}]^n \precsim \mathbb{R}^\omega \approx \mathbb{R}$. $\square$

Así, podemos concluir que el conjunto $[\mathbb{R}]^{<\omega} \times [[\mathbb{R}]^{<\omega}]^{<\omega}$ está en biyección con $\mathbb{R}$.

Bibliografía

[1] James E. Baumgartner, *A short proof of Hindman's Theorem*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **17** (1974), 384–386.

[2] Andreas R. Blass, *Notas de Andreas Blass sobre ultrafiltros.* Disponibles en `https://dept.math.lsa.umich.edu/~ablass/set.html` [En línea; 9 de marzo del 2024].

[3] Andreas R. Blass, *Orderings of ultrafilters*, Ph.D. Thesis, 1970.

[4] Mauro Di Nasso and Eleftherios Tachtsis, *Idempotent ultrafilters without Zorn's Lemma*, Proceedings of the American Mathematical Society **146** (2018), no. 1, 397–411.

[5] David Fernández-Bretón, *Using ultrafilters to prove Ramsey-type theorems*, The American Mathematical Monthly **129** (2022), no. 2, 116–131.

[6] Zdeněk Frolík, *Sums of ultrafilters*, Bulletin of the American Mathematical Society **73** (1967), 87–91.

[7] Neil Hindman, *Finite sums from sequences within cells of a partition of N*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **17** (1974), 1–11.

[8] Neil Hindman, *Algebra in the Stone-Čech compactification and its applications to Ramsey theory*, Scientiae Mathematicae Japonicae **62** (2005), no. 2, 321.

[9] Neil Hindman and Dona Strauss, *Algebra in the Stone-Čech compactification*, De Gruyter, 2012.

[10] Paul Howard and Jean E. Rubin, *Consequences of the axiom of choice*, Vol. 59, American Mathematical Soc., 1998.

[11] John L. Kelley, *General topology*, Springer, 1955.

[12] Adrian R. D. Mathias, *Happy families*, Annals of Mathematical Logic **12** (1977), no. 1, 59–111.

[13] Arnold W. Miller, *There are no Q-points in Laver's model for the Borel conjecture*, Proceedings of the American Mathematical Society **78** (1980), no. 1, 103–106.

[14] James R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2000.

[15] Talin Papazyan, *The existence of almost translation invariant ultrafilters on any semigroup*, Proceedings of the American Mathematical Society **107** (1989), no. 4, 1133–1135.

[16] Mary E. Rudin, *Types of ultrafilters*, Annals Math. Studies **60** (1966), 147–151.

[17] Mary E. Rudin, *Partial orders on the types in ßN*, American Mathematical Society **155** (1971), no. 2.

[18] Robert M. Solovay, *A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Annals of Mathematics (1970), 1–56.

[19] Stevo Todorcevic, *Introduction to Ramsey spaces*, Vol. 174, Princeton University Press, 2010.