Curso Avanzado de Álgebra: Introducción a las Demostraciones de Consistencia e Independencia

David J. Fernández Bretón

Temario

El principal objetivo de este curso es que el alumno comprenda los elementos básicos de las pruebas de consistencia e independencia, es decir, las demostraciones de que ciertos enunciados matemáticos no se pueden ni demostrar ni refutar desde los axiomas usuales de la teoría de conjuntos. Históricamente, el primer ejemplo de este fenómeno fue la Hipótesis del Continuo, que constituyó el primer problema planteado por Hilbert en su famosa lista de problemas del siglo (pasado). En 1930 Gödel demostró que la negación de la Hipótesis del Continuo no puede demostrarse a partir de los axiomas de la Teoría de Conjuntos, y en 1960 Cohen complementó este resultado al demostrar que la Hipótesis del Continuo tampoco puede demostrarse a partir de dichos axiomas. En este curso introduciremos las herramientas técnicas necesarias para comprender estos dos resultados.

Temas a tratar:

1. Teoría básica de conjuntos
   - *a*) Axiomas de la teoría de conjuntos y construcciones básicas,
   - *b*) Números cardinales,
   - *c*) Números ordinales,
   - *d*) La jerarquía de Zermelo, teorema de reflexión.
2. El universo constructible
   - *a*) Definiendo definibilidad,
   - *b*) La jerarquía constructible,
   - *c*) Lema de condensación,
   - *d*) Hipótesis generalizada del continuo en $\mathbf{L}$.
3. Forzamiento
   - *a*) Nociones de forzamiento y su combinatoria (conjuntos densos, filtros genéricos, nombres),
   - *b*) Construyendo extensiones de un modelo de ZFE,
   - *c*) El teorema del forzamiento,
   - *d*) Forzamiento de Cohen, colapso de Lévy,
   - *e*) Lema del Δ-sistema; independencia de la hipótesis del continuo,
   - *f*) Forzamiento iterado con soporte finito,
   - *g*) El problema de Suslin y su indecibilidad.

Referencias

[1] Keith Devlin, *Constructibility.* Perspectives in Mathematical Logic 6. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[2] Peter G. Hinman, *Fundamentals of Mathematical Logic.* A. K. Peters/CRC Press, 2005.

[3] Thomas Jech, *Set Theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[4] Kenneth Kunen, *Set Theory. An introduction to independence proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 102, North Holland, 1992.