Los principios combinatorios $\diamondsuit$ y $\clubsuit$

David J. FernándezBretón*

Miércoles 24 de febrero de 2010

Resumen

Presentamos someramente los principios combinatorios $\diamondsuit$ y $\clubsuit$, demostramos que $\mathsf{ZFE} \vdash \diamondsuit \iff \clubsuit + \mathsf{HC}$ y, finalmente, utilizando la técnica del forzamiento probamos que $\clubsuit \not\Rightarrow \diamondsuit$, i.e., que Consis($\mathsf{ZFE}$) $\Rightarrow$ Consis($\mathsf{ZFE} + \clubsuit + \neg\diamondsuit$).

1. Los principios de adivinanza

Sea $\lambda > \omega$ un cardinal regular, y $S \subseteq \lambda$ un subconjunto estacionario. Entonces, por $\diamondsuit_\lambda(S)$ entendemos el enunciado siguiente:

"Existe una sucesión $\langle A_\alpha \big| \alpha \in S\rangle$ tal que $(\forall \alpha \in S)(A_\alpha \subseteq \alpha)$ y tal que para cada $A \subseteq \lambda$, el conjunto $\{\alpha \in S \big| A \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario en λ."

Cuando estamos hablando del caso particular $\diamondsuit_\lambda(\lambda)$, usualmente lo escribimos simplemente como $\diamondsuit_\lambda$, mientras que en el caso de $\diamondsuit_{\aleph_1}$ solemos denotarlo únicamente como $\diamondsuit$.

¿Qué nos dice exactamente el principio $\diamondsuit_\lambda(S)$? Bueno, sabemos que hay por lo menos λ^+ subconjuntos de λ. $\diamondsuit_\lambda(S)$ sostiene que hay λ conjuntos dados de antemano $S_\alpha \subseteq \alpha$ tales que, para cualquier $X \subseteq \lambda$ que se me ocurra especificar, los S_α predicen (para una cantidad estacionaria de αs) el "pedacito inicial" $X \cap \alpha$ de nuestro conjunto X. Como todo conjunto estacionario es no acotado, podemos ver que de hecho los S_α nos proporcionan aproximaciones arbitrariamente "buenas" (i.e. arbitrariamente cercanas a λ) del conjunto X. Esto es, hay un conjunto estacionario $E \subseteq S$ tal que

$$X = \bigcup_{\alpha \in E} (X \cap \alpha) = \bigcup_{\alpha \in E} S_\alpha.$$

Por otra parte, un principio de adivinanza que, según demostraremos más adelante, es más débil que $\diamondsuit_\lambda(S)$, para $\lambda \geq \omega$ cardinal regular y $S \subseteq \lambda$ estacionario, es el siguiente, conocido como $\clubsuit_\lambda(S)$:

"Existe una sucesión $\langle A_\alpha \big| \alpha \in S \cap \text{lím}(\lambda)\rangle$ tal que $(\forall \alpha \in S \cap \text{lím}(\lambda))(A_\alpha \subseteq \alpha \wedge \sup(A_\alpha) = \alpha)$ y tal que para cada $X \subseteq \lambda$ no acotado, hay un $\alpha \in S \cap \text{lím}(\lambda)$ tal que $A_\alpha \subseteq X$."

Al igual que en el caso de $\diamondsuit$, a $\clubsuit_\lambda(\lambda)$ lo denotamos simplemente por $\clubsuit_\lambda$, y a $\clubsuit_{\aleph_1}$ lo denotaremos simplemente como $\clubsuit$.

2. $\diamondsuit \iff \clubsuit + \mathsf{HC}$

Proposición 1 *Para cada $S \subseteq \aleph_1$ estacionario, $\mathsf{ZFE} \vdash \diamondsuit_{\aleph_1}(S) \Rightarrow \clubsuit_{\aleph_1}(S) + \mathsf{HC}$.*

Demostración: Supongamos que se cumple $\diamondsuit_{\aleph_1}(S)$, y sea $\langle A_\alpha \big| \alpha \in S\rangle$ una sucesión que lo atestigua. Para ver que se cumple HC, probemos que $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$. Si $A \subseteq \aleph_0$, entonces en particular $A \subseteq \aleph_1$. Dado que $\{\alpha \in S \big| A \cap \alpha = A_\alpha\}$ es un subconjunto estacionario en $\aleph_1$, en particular podemos encontrar un $\omega < \alpha < \omega_1$ tal que $A \cap \alpha = A_\alpha$; elijamos un α_A de estas características. De esta forma, tenemos una función

$$\begin{aligned} f : \wp(\omega) &\longrightarrow \omega_1 \\ A &\longmapsto \alpha_A. \end{aligned}$$

*Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas; Instituto de Matemáticas UNAM, campus Morelia y Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Esta función es inyectiva: si $\alpha_A = \alpha_B$, entonces dado que $A, B \subseteq \omega < \alpha_A = \alpha_B$, esto nos dice que $A = A \cap \alpha_A = A_{\alpha_A} = A_{\alpha_B} = B \cap \alpha_B = B$. Por lo tanto $2^{\aleph_0} = |\wp(\omega)| \leq \aleph_1$. Esto prueba HC.

Ahora para probar $\clubsuit_{\aleph_1}(S)$, sea $\langle B_\alpha \big| \alpha \in S \cap \text{lím}(\omega_1) \rangle$ la sucesión que viene dada por:

$$B_\alpha := \begin{cases} A_\alpha; \ \sup(A_\alpha) = \alpha \\ \alpha; \ \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para ver que esa sucesión atestigua $\clubsuit_{\aleph_1}(S)$, tomemos $X \subseteq \aleph_1$ no acotado. Veamos que el conjunto $C := \{\alpha < \omega_1 \big| \sup(X \cap \alpha) = \alpha\}$ es un cerrado y no acotado en $\aleph_1$. Para demostrar esto, utilizaremos un truco bastante estándar, que a lo largo de estas notas se utilizará una cantidad enorme de veces, y que por lo tanto cada vez iremos detallando menos y menos[1]. Para ver que C es cerrado, sea $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ una sucesión creciente en C, y observemos que $\alpha := \sup_{n<\omega} \alpha_n \in C$. Claramente $\alpha < \omega_1$ (por la regularidad de $\aleph_1$). Por otra parte, es claro que $\sup(X \cap \alpha) \leq \alpha$. Y, dado $n < \omega$, como tenemos que $\alpha \geq \alpha_n$, entonces $X \cap \alpha \supseteq X \cap \alpha_n$, luego $\sup(X \cap \alpha) \geq \sup(X \cap \alpha_n) = \alpha_n$. Como $(\forall n < \omega)(\sup(X \cap \alpha) \geq \alpha_n)$, concluimos que $\sup(X \cap \alpha) \geq \alpha$. Esto nos dice que $\alpha \in C$, y por lo tanto C es cerrado. Para ver que es no acotado, sea ahora $\beta < \omega_1$. Si $\alpha_0 := \beta + 1 \in C$ hemos terminado, en caso contrario elegimos un $\alpha_0 < \alpha_1 \in X$ (el cual existe por ser X no acotado). Inductivamente, si ya conocemos α_n y $\alpha_n \in C$, hemos terminado, en caso contrario escogemos un $\alpha_n < \alpha_{n+1} \in X$. Si alcanzamos a construir toda la sucesión $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$, entonces tomamos $\alpha := \sup\limits_{n<\omega} \alpha_n > \beta$. Claramente $\alpha < \omega_1$. Además, para cada $n < \omega$, tenemos que $\alpha_n \in \alpha \cap X$, luego $(\forall n < \omega)(\sup(X \cap \alpha) \geq \alpha_n)$, lo cual implica que $\sup(X \cap \alpha) \geq \alpha$, pero además es obvio que $\sup(X \cap \alpha) \leq \alpha$, de modo y manera que $\sup(X \cap \alpha) = \alpha$ y $\alpha \in C$. Luego C es un cena (**ce**rrado y **n**o **a**cotado) en $\aleph_1$.

Como por hipótesis el conjunto $\{\alpha \in S \big| X \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario, esto implica que intersecta a C, es decir, hay un $\alpha \in S$ tal que $X \cap \alpha = A_\alpha$ y $\alpha = \sup(X \cap \alpha) = \sup(A_\alpha)$. Esto significa que $\alpha \in \text{lím}(\omega_1)$ (ya que si $\alpha = \beta + 1$ entonces todo subconjunto de α tiene un supremo que es a lo más β, estrictamente menor que α) y además $\sup(A_\alpha) = \alpha$, lo cual implica que $B_\alpha = A_\alpha$ y $B_\alpha = X \cap \alpha \subseteq X$. $\square$

Proposición 2 *Para cada cardinal regular $\lambda > \omega$ y cada subconjunto estacionario $S \subseteq \lambda$, el principio combinatorio $\clubsuit_\lambda(S)$ es equivalente a que la $\clubsuit_\lambda(S)$-sucesión $\langle A_\alpha \big| \alpha \in S \cap \text{lím}(\omega_1) \rangle$ adivine a cada subconjunto no acotado de λ una cantidad estacionaria de veces, es decir, a que para cada $X \subseteq \lambda$ no acotado, el conjunto $\{\alpha \in S \cap \text{lím}(\omega_1) \big| A_\alpha \subseteq X\}$ es estacionario en λ.*

Demostración:

$\Leftarrow$ Es evidente.

$\Rightarrow$ Sea $\langle A_\alpha \big| \alpha \in S \cap \text{lím}(\lambda) \rangle$ nuestra $\clubsuit_\lambda(S)$-sucesión, $X \subseteq \lambda$ no acotado y $C \subseteq \lambda$ un cena. Debemos probar que $(\exists \alpha \in C \cap S \cap \text{lím}(\lambda))(A_\alpha \subseteq X)$. Definiremos $\langle \beta_\gamma \big| \gamma < \lambda \rangle \in {}^\lambda X$ por inducción: si ya conocemos $\langle \beta_\gamma \big| \gamma < \delta \rangle$, para $\delta < \lambda$, entonces sea $\alpha_\delta := \text{mín}(C \setminus (\sup\limits_{\gamma<\delta} \beta_\gamma + 1))$, y $\beta_\delta := \text{mín}(X \setminus (\alpha_\delta + 1))$, que existe debido a que X es no acotado. Por otra parte, de la construcción es evidente que $\gamma < \delta \Rightarrow \beta_\gamma < \beta_\delta$. Así, si hacemos $X' := \{\beta_\gamma \big| \gamma < \lambda\}$, entonces X' será no acotado por tener cardinalidad λ. Por esta razón, hay un ordinal $\alpha \in S \cap \text{lím}(\lambda)$ tal que $A_\alpha \subseteq X'$. Observemos para cada $\gamma < \delta < \lambda$ hay un punto $\varepsilon \in C$ tal que $\beta_\gamma < \varepsilon < \beta_\delta$ (por la forma como construimos a los β_γ, de hecho, podemos tomar $\varepsilon = \alpha_\delta$). Así, dado que $A_\alpha \subseteq X'$ concluimos que entre dos puntos cualesquiera de A_α siempre hay uno de C. Como además $\sup(A_\alpha) = \alpha$, concluimos que α es un punto límite de C, al ser C cerrado esto nos indica que $\alpha \in C$. Así, sólo resta notar que $A_\alpha \subseteq X' \subseteq X$.

$\square$

Teorema 3 *Para cualquier subconjunto estacionario $S \subseteq \aleph_1$, $\mathsf{HC} + \clubsuit_{\aleph_1}(S) \Rightarrow \Diamond_{\aleph_1}(S)$.*

Demostración: Calculemos la cardinalidad del conjunto $[\omega_1]^{\leq \aleph_0}$. Nótese que este conjunto es igual a $\{B \subseteq \omega_1 \big| |B| \leq \aleph_0\} = \{B \subseteq \omega_1 \big| B \text{ es acotado en } \omega_1\}$: cada uno de los subconjuntos acotados de ω_1 es subconjunto de algún ordinal $\alpha < \omega_1$, y recíprocamente todos los subconjuntos de algún $\alpha < \omega_1$ son subconjuntos acotados de ω_1. Así, el conjunto de subconjuntos numerables de ω_1 es la unión de los conjuntos de subconjuntos de todos los ordinales $\alpha < \omega_1$, cada uno de los cuales tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$. De esta forma, $|[\omega_1]^{\leq \aleph_0}| = \aleph_1 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Así,

[1] También se pueden realizar estas demostraciones (de una manera muchísimo más rápida) utilizando la herramienta de los submodelos elementales, pero no lo haremos así aquí para no presuponer conocimiento de este tópico por parte del lector.

utilizando HC podemos encontrar una función suprayectiva $g : \omega_1 \twoheadrightarrow [\omega_1]^{\leq\aleph_0} \times \omega_1$. Ahora definimos la función $B_{(-)} : \omega_1 \longrightarrow [\omega_1]^{\leq\aleph_0}$ de la manera siguiente:

$$B_\alpha := \begin{cases} B; & g(\alpha) = \langle B, \beta\rangle \wedge \sup(B) \leq \alpha \\ \varnothing; & \text{otro caso.} \end{cases}$$

De esta forma, $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1\rangle$ es una lista en la que cada subconjunto acotado de ω_1 aparece ω_1 veces (esto es debido a que, dado $B \subseteq \omega_1$ acotado, si $\beta = \sup(B)$, entonces hay a lo más β (i.e. una cantidad numerable) de αs tales que si $g(\alpha) = \langle B, \gamma\rangle$ entonces $\sup(B) = \beta > \alpha$) y en la que $(\forall\alpha < \omega_1)(\sup(B_\alpha) \leq \alpha)$.

Sea $\langle A_\alpha \big| \alpha \in S \cap \text{lím}(\omega_1)\rangle$ una $\clubsuit_{\aleph_1}(S)$-sucesión. Definiremos la sucesión $\langle D_\alpha \big| \alpha \in S\rangle$ de la manera siguiente. Para $\alpha \in S \setminus \text{lím}(\omega_1)$, podemos elegir un D_α arbitrario; mientras que, para cada $\alpha \in S \cap \text{lím}(\omega_1)$,

$$D_\alpha = \{\beta < \alpha \big| (\exists\gamma \in A_\alpha)(\beta \in B_\gamma)\} = \bigcup_{\gamma\in A_\alpha} B_\gamma$$

(la última igualdad es debido a que si $\beta \in B_\gamma$ para algún $\gamma \in A_\alpha$, entonces $\beta \leq \sup(B_\gamma) \leq \gamma \in A_\alpha \subseteq \alpha$), afirmamos que esta última es una $\diamondsuit_{\aleph_1}(S)$-sucesión. En efecto, sea $X \subseteq \omega_1$. Sin pérdida de generalidad, podemos restringirnos a estudiar la sucesión $\langle D_\alpha \big| \alpha \in S \cap \text{lím}(\omega_1)\rangle$ (debido a que el conjunto $\{\alpha \in S \big| D_\alpha = X \cap \alpha\}$ es estacionario sii $\{\alpha \in S \cap \text{lím}(\omega_1) \big| D_\alpha = X \cap \alpha\}$ lo es, debido a que $\text{lím}(\omega_1)$ es un cena en ω_1). Hay dos casos:

1 Si X es acotado, sea $X' := \{\alpha < \omega_1 \big| B_\alpha = X\}$. Por construcción, sabemos que $|X'| = \aleph_1$, luego X' es no acotado en ω_1, lo cual implica que $\{\alpha \in S \cap \text{lím}(\omega_1) \big| A_\alpha \subseteq X'\}$ es estacionario. Pero pongamos atención: $(\forall\alpha \in S \cap \text{lím}(\omega_1))(A_\alpha \subseteq X' \Rightarrow X \cap \alpha = D_\alpha)$. En efecto, si $A_\alpha \subseteq X'$ esto significa que $(\forall\beta \in A_\alpha)(B_\beta = X)$. Luego

$$\alpha \supseteq D_\alpha = \bigcup_{\beta\in A_\alpha} B_\beta = \bigcup_{\beta\in A_\alpha} X = X$$

(nótese que $A_\alpha \neq \varnothing$ debido a que $\sup(A_\alpha) = \alpha > 0$) y de esta forma $X \cap \alpha = X = D_\alpha$. Luego $\{\alpha \in S \big| A_\alpha \subseteq X'\} \subseteq \{\alpha \in S \big| D_\alpha = X\}$, al ser el conjunto del lado izquierdo estacionario en $\aleph_1$, se sigue que el del lado derecho lo es, que es lo que debíamos demostrar.

2 Si X es no acotado, entonces definamos $j : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ de manera inductiva: si ya conocemos $j \restriction \alpha$, entonces observemos que el conjunto $X \cap \sup\{j(\beta) \big| \beta < \alpha\}$ es acotado, luego hay una cantidad no acotada de γs tales que $B_\gamma = X \cap \sup\{j(\beta) \big| \beta < \alpha\}$, elegimos $j(\alpha) > \sup\{j(\beta) \big| \beta < \alpha\}$ con esta propiedad. Claramente, j es estrictamente creciente, por lo tanto $(\forall\alpha < \omega_1)(\alpha \leq j(\alpha))$. Esto implicará que $C := \{\alpha < \omega_1 \big| (\forall\beta < \alpha)(j(\beta) < \alpha)\}$ es un cena: si $\langle \alpha_n \big| n < \omega\rangle \in {}^{\omega}C$ y $\alpha = \sup\limits_{n<\omega} \alpha_n$, entonces si $\beta < \alpha \Rightarrow (\exists n < \omega)(\beta < \alpha_n)$, luego al ser $\alpha_n \in C \Rightarrow j(\beta) < \alpha_n \leq \alpha$ y por lo tanto $\alpha \in C$. Ahora si $\gamma < \omega_1$, hacemos $\alpha_0 := \gamma + 1$. Para cada $n < \omega$, si $\alpha_n \in C$ hemos terminado, en caso contrario sea $\alpha_{n+1} := \sup\{j(\beta) \big| \beta < \alpha_n\} + 1 > \alpha_n$, y si al final la sucesión logra quedar de longitud ω, entonces hacemos $\alpha := \sup\limits_{n<\omega} \alpha_n$ y tenemos que $\alpha \in C$: pues si $\beta < \alpha \Rightarrow (\exists n < \omega)(\beta < \alpha_n)$, luego $j(\beta) \leq \sup\{j(\beta) \big| \beta < \alpha_n\} < \alpha_{n+1} \leq \alpha$.

Ahora, sea $X' = \text{ran}(j)$; el hecho de que j sea estrictamente creciente implica que X' es no acotado, de modo y manera que $\{\delta \in S \cap \text{lím}(\omega_1) \big| A_\delta \subseteq X'\}$ es un conjunto estacionario, y por tanto su intersección con un cena vuelve a ser estacionario, i.e. $\{\delta \in S \cap \text{lím}(\omega_1) \cap C \big| A_\delta \subseteq X'\}$ es también estacionario. Pero nuevamente pongamos atención: $(\forall\delta \in S \cap \text{lím}(\omega_1) \cap C)(A_\delta \subseteq X' \Rightarrow X \cap \delta = D_\delta)$. En efecto, sea $\delta \in S \cap \text{lím}(\omega_1) \cap C$ tal que $A_\delta \subseteq X'$, demostremos que $X \cap \delta = D_\delta$. Dado que $A_\delta \subseteq X' = \text{ran}(j)$, entonces para cada $\alpha \in A_\delta$ hay un γ_α tal que $\alpha = j(\gamma_\alpha)$ (en particular $\delta \supseteq A_\delta \ni \alpha = j(\gamma_\alpha) \geq \gamma_\alpha$), es decir, $B_\alpha = X \cap \sup\{j(\beta) \big| \beta < \gamma_\alpha\}$. Luego

$$D_\delta = \bigcup_{\alpha\in A_\delta} B_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A_\delta} \left(X \cap \sup\{j(\beta) \big| \beta < \gamma_\alpha\}\right) = X \cap \left(\bigcup_{\alpha\in A_\delta} \sup\{j(\beta) \big| \beta < \gamma_\alpha\}\right)$$

Notemos que $\bigcup\limits_{\alpha\in A_\delta} \sup\{j(\beta) \big| \beta < \gamma_\alpha\} = \delta$: como $\delta \in C$, entonces para cada $\beta < \gamma_\alpha < \delta$ se tiene que $j(\beta) < \delta$, luego $\sup\{j(\beta) \big| \beta < \gamma_\alpha\} \leq \delta$ y por consiguiente $\bigcup\limits_{\alpha\in A_\delta} \sup\{j(\beta) \big| \beta < \gamma_\alpha\} \leq \delta$. Por otra parte, dado que $\sup(A_\delta) = \delta$, para cada $\beta < \delta$ hay un $\alpha \in A_\delta$ tal que $j(\beta + 1) < \alpha < \delta$, y como j es creciente, debe tenerse que $\beta + 1 < \gamma_\alpha$ (debido a que $j(\beta + 1) < \alpha = j(\gamma_\alpha)$). Luego $\beta < \beta + 1 \leq j(\beta + 1) \leq \sup\{j(\varepsilon) \big| \varepsilon < \gamma_\alpha\} \leq$

$\bigcup_{\alpha \in A_\delta} \sup\{j(\beta) \big| \beta < \gamma_\alpha\}$, y como esto es para cada $\beta < \delta$, tenemos que $\delta \leq \bigcup_{\alpha \in A_\delta} \sup\{j(\beta) \big| \beta < \gamma_\alpha\}$. Así, concluimos que

$$D_\delta = X \cap \left(\bigcup_{\alpha \in A_\delta} \sup\{j(\beta) \big| \beta < \gamma_\alpha\} \right) = X \cap \delta.$$

De esta forma, $\{\delta \in S \cap C \big| A_\delta \subseteq X'\} \subseteq \{\delta \in S \big| X \cap \delta = D_\delta\}$, y al ser el conjunto de la izquierda un estacionario entonces necesariamente el conjunto del lado derecho también será estacionario, con lo cual el teorema queda demostrado.

$\square$

3. La consistencia de $\mathsf{ZFE} + \clubsuit + \neg\lozenge$

A partir de ahora nos dedicaremos a construir, por medio de la técnica del forzamiento, un modelo de ZFE que satisfaga $\clubsuit$, pero que al mismo tiempo satisfaga $\neg\mathsf{HC}$, lo cual implicará (proposición 1) que también satisface $\neg\lozenge$.

Comenzemos con un modelo base $V_0 \vDash 2^{\aleph_0} = \aleph_1 \wedge 2^{\aleph_1} = \aleph_2 \wedge \lozenge_{\aleph_2}(S)$, en donde $S = \{\alpha < \aleph_2 \big| \operatorname{cf}(\alpha) = \omega\}$. Podríamos comenzar con un modelo arbitrario y forzar tres veces con cuidado para obtener tal modelo V_0, pero el camino más rápido es tomar $V_0 = \mathbf{L} \vDash \mathsf{HGC} + (\forall \kappa > \omega)(\forall S \subseteq \kappa)(\kappa \text{ es regular} \wedge S \text{ es estacionario} \Rightarrow \lozenge_\kappa(S))$.

Observación 4 Notemos que una $\lozenge_{\aleph_2}(S)$-sucesión puede "adivinar" subestructuras elementales de cualquier estructura sobre $\aleph_2$: Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con símbolos de relación $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$[2] tales que, para cada i, R_i es una relación m_i-aria. Podemos "codificar" una estructura para el lenguaje $\mathcal{L}$, cuyo universo sea $\aleph_2$, dentro de $\aleph_2$; partiendo $\aleph_2$ en tantos subconjuntos disjuntos como símbolos de relación tiene $\mathcal{L}$: $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots \in [\aleph_2]^{\aleph_2}$ y construyendo la misma cantidad de biyecciones $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ con $f_i : \aleph_2^{m_i} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow M_i$. De esta manera, cada subconjunto M de $\aleph_2$ codifica una estructura para $\mathcal{L}$ (la estructura $\mathfrak{M}_M = \langle \aleph_2, f_1^{-1}[M_1 \cap M], f_2^{-1}[M_2 \cap M], \ldots \rangle$) y recíprocamente, cada estructura $\mathfrak{M} = \langle \aleph_2, R_1^{\mathfrak{M}}, R_2^{\mathfrak{M}}, \ldots \rangle$ codifica un subconjunto de $\aleph_2$ (a saber, el subconjunto $M_{\mathfrak{M}} = \bigcup_i f_i[R_i^{\mathfrak{M}}]$), de modo tal que, fijando un lenguaje $\mathcal{L}$, tenemos una correspondencia biunívoca entre subconjuntos de $\aleph_2$ y estructuras para $\mathcal{L}$ con universo $\aleph_2$.

Ahora bien, dada una estructura $\mathfrak{M} = \langle \aleph_2, R_1^{\mathfrak{M}}, R_2^{\mathfrak{M}}, \ldots \rangle$, para cada $\alpha < \omega_2$ tenemos la estructura $\mathfrak{M} \upharpoonright \alpha := \langle \alpha, R_1^{\mathfrak{M}\upharpoonright\alpha}, R_2^{\mathfrak{M}\upharpoonright\alpha}, \ldots \rangle$, en donde para cada i, $R_i^{\mathfrak{M}\upharpoonright\alpha} := R_i^{\mathfrak{M}} \cap \alpha^{m_i}$. Observemos que el conjunto

$$C := \{\alpha < \aleph_2 \big| (\forall i)(f_i[R_i^{\mathfrak{M}\upharpoonright\alpha}] \subseteq \alpha\}$$

es un cena en $\aleph_2$. El hecho de que C es cerrado está bastante tribilín (se demuestra igual que se ha demostrado cerradura en todos los casos anteriores), y el hecho de que C es no acotado no lo es menos utilizando el truco de siempre: dado $\beta < \aleph_2$ entonces hacemos $\beta + 1 =: \alpha_0 \in C$ y para cada $n < \omega$ si $\alpha_n \in C$ ya terminamos, en caso contrario definimos $\alpha_{n+1} := \sup\left(\bigcup_i f_i[R_i^{\mathfrak{M}\upharpoonright\alpha_n}]\right) + 1 > \alpha_n$, y si completamos una ω-sucesión entonces está sencillito demostrar que $\alpha := \sup_{n<\omega} \alpha_n \in C$.

Por otra parte, el teorema de Löwenheim-Skolem [Hernández-Hernández 2005, teorema 1.4, p. 136] y el teorema de la cadena elemental [Hernández-Hernández 2005, teorema 1.5, pp. 136-137] nos permiten demostrar que también el conjunto

$$C' := \{\alpha < \aleph_2 \big| \mathfrak{M} \upharpoonright \alpha \prec \mathfrak{M}\}$$

es cerrado y no acotado en $\aleph_2$ [Hernández-Hernández 2005, corolario 1.7, p. 137].

Así, si $\langle A_\alpha \big| \alpha \in S \rangle$ es una $\lozenge_{\aleph_2}(S)$-sucesión, entonces para cada estructura $\mathfrak{M}$ con universo $\aleph_2$ para el lenguaje $\mathcal{L}$ el conjunto $S' := \{\alpha \in S \big| M_{\mathfrak{M}} \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario, luego también lo es el conjunto

$$S' \cap C \cap C' =: S^{\mathfrak{M}} = \{\alpha \in S \big| \mathfrak{M} \upharpoonright \alpha \prec \mathfrak{M},\ M_{\mathfrak{M}\upharpoonright\alpha} \text{ contiene la codificación de } \mathfrak{M} \upharpoonright \alpha \text{ y ésta es } A_\alpha\},$$

en este caso decimos que, para $\alpha \in S^{\mathfrak{M}}$, A_α adivina la subestructura elemental $\mathfrak{M} \upharpoonright \alpha$.

[2] Consideramos lenguajes que contienen únicamente relaciones, debido a que toda función n-aria puede verse como una relación $n+1$-aria, mientras que toda constante puede verse como una relación unaria con un único elemento (i.e. un singulete). De esta forma, no perdemos generalidad considerando lenguajes que cuentan únicamente con relaciones en su signatura.

Construcción 5 Construyamos, en nuestro modelo base V_0, una $\clubsuit_{\aleph_2}(S)$-sucesión que resulte particularmente resistente a los dos forzamientos a los que posteriormente someteremos a nuestro modelo. Comencemos por codificar un lenguaje $\mathcal{L}$ cuya signatura contiene dos símbolos de relación binaria $<^*$ y $R(-,-)$, y sea $\langle \mathfrak{M}_\alpha = \langle \alpha, <^*{}_\alpha, R_\alpha \rangle \big| \alpha \in S\rangle$ una $\diamondsuit_{\aleph_2}(S)$-sucesión para ese tipo de estructuras (lo cual en verdad quiere decir: escogemos codificación para estructuras del lenguaje $\mathcal{L}$, y una $\diamondsuit_{\aleph_2}(S)$-sucesión $\langle M_\alpha \big| \alpha \in S\rangle$, entonces, por la observación 4, la sucesión $\langle \mathfrak{M}_{M_\alpha} \big| \alpha \in S\rangle$ adivina subestructuras elementales de cada estructura $\mathfrak{M}$ para $\mathcal{L}$ en una cantidad estacionaria de αs).

Fijémonos ahora en el conjunto $S' := \{\delta \in S \big| \varphi(\mathfrak{M}_\delta)\}$, en donde $\varphi(\mathfrak{M})$ es la afirmación de que la estructura $\mathfrak{M}$ satisface las siguientes tres condiciones:

(i) $<^*$ es un orden parcial,

(ii) Si $\beta <^* \gamma$ entonces $R(\beta, x) \Rightarrow R(\gamma, x)$, y

(iii) $(\forall \alpha)(\forall \beta)(\exists \xi > \beta)(\exists \gamma)[(\alpha <^* \gamma \wedge R(\gamma, \xi)]$

El conjunto S' es un estacionario, ya que podemos tomar una estructura $\mathfrak{M}$ con estas características[3] y sabemos que S' contiene al conjunto de δs que adivinan como estructura elemental a $\mathfrak{M}$.

Para cada $\delta \in S'$ definimos $D_\delta \subseteq \delta$ con t.o.$(D_\delta) = \omega$, de la siguiente manera: Escojamos una sucesión creciente $\langle \beta_n^\delta \big| n < \omega\rangle$ que sea cofinal en δ, por inducción sobre $n < \omega$ definiremos un par de sucesiones $\langle \gamma_n^\delta \big| n < \omega\rangle$, $\langle \xi_n^\delta \big| n < \omega\rangle$ de modo que se satisfaga

$$(\forall n < \omega)[(\gamma_n^\delta <^*{}_\delta \gamma_{n+1}^\delta) \wedge (\xi_n^\delta > \beta_n^\delta) \wedge R_\delta(\gamma_n^\delta, \xi_n^\delta)].$$

Comenzamos por escoger $\gamma_0^\delta, \xi_0^\delta < \delta$ tales que $R_\delta(\gamma_0^\delta, \xi_0^\delta)$ y $\beta_0^\delta < \xi_0^\delta$, mismos que existen debido a que $\mathfrak{M}_\delta$ cumple con la parte (iii) de la proposición φ arriba descrita. Y el paso inductivo es escoger γ_{n+1}^δ, ξ_{n+1}^δ tales que $\gamma_n^\delta <^*{}_\delta \gamma_{n+1}^\delta$, $\beta_{n+1}^\delta < \xi_{n+1}^\delta$ y $R_\delta(\gamma_{n+1}^\delta, \xi_{n+1}^\delta)$, que existen por la misma razón apenas mencionada. Finalmente definimos $D_\delta := \{\xi_n^\delta \big| n < \omega\}$ y afirmamos que $\langle D_\delta \big| \delta \in S'\rangle$ es una $\clubsuit_{\aleph_2}$-sucesión.

Proposición 6 *La sucesión $\langle D_\delta \big| \delta \in S'\rangle$ de la construcción 5 es una $\clubsuit_{\aleph_2}$-sucesión.*

Demostración: Sea $X \subseteq \aleph_2$ un conjunto no acotado. Definiremos una estructura para el lenguaje $\mathcal{L}$, dada por $\mathfrak{M} := \langle \aleph_2, <, \{(y, x) \in \aleph_2 \times \aleph_2 \big| x \in X\}\rangle$. Tenemos que $S'' := \{\delta \in S \big| \mathfrak{M}_\delta \prec \mathfrak{M}\}$ es un estacionario en $\aleph_2$, pero además claramente se cumple $\varphi(\mathfrak{M})$ (la parte (iii) se sigue de que X es no acotado). Esto significa que siempre que $\mathfrak{M}_\delta \prec \mathfrak{M}$, tendremos que se cumple $\varphi(\mathfrak{M}_\delta)$. Es decir, el conjunto S'' es subconjunto de S'. Tomemos un $\delta \in S'' \subseteq S'$. Dado que,para cada $n < \omega$, el elemento ξ_n^δ fue escogido de modo que $R_\delta(\gamma_n^\delta, \xi_n^\delta)$ (es decir, que $\xi_n^\delta \in X$), esto significa que $D_\delta \subseteq X$. □

El siguiente paso es añadir $\aleph_3$ subconjuntos a $\aleph_1$. Para ello, forzaremos con el preorden

$$\mathbb{P}_0 := \{f \subseteq \aleph_3 \times 2 \big| f \text{ es función} \wedge |f| \leq \aleph_0\} = \mathrm{Fn}(\aleph_3, 2, \aleph_1),$$

ordenados mediante $f \leq g \iff f \supseteq g$. Habremos de ver que $\mathbb{P}_0$ no destruye nuestra $\clubsuit$-sucesión.

Lema 7 *Sea $\kappa > \omega$ un cardinal regular. Entonces, todo preorden $\mathbb{P}$ que tenga la κ-c.c. preserva subconjuntos estacionarios de κ.*

Demostración: Sea $S \subseteq \kappa$ un estacionario en el modelo base M, y sea $\mathring{C}$ un $\mathbb{P}$-nombre de cena de κ. Sea G un $\mathbb{P}$-genérico en el modelo base, y $p \in G$ tal que $p \Vdash$ "$\mathring{C}$ es cena en κ". Para cada $\alpha < \kappa$, sea $\mathcal{I}_\alpha$ una anticadena maximal de extensiones de p tal que para cada $q \in \mathcal{I}_\alpha$ hay un $\beta(q)$ tal que $q \Vdash$ "$\beta(q) = \text{mín}(\mathring{C} \setminus \alpha)$" (para cada $\alpha < \kappa$ existe un q de estas características, luego aplicamos el lema de Zorn). Sea ahora B_α el conjunto de posibles valores de $\text{mín}(C \setminus \alpha)$ en $M[G]$, es decir,

$$B_\alpha = \{\gamma < \kappa \big| (\exists q \in \mathcal{I}_\alpha)(q \Vdash \text{“}\gamma = \text{mín}(\mathring{C} \setminus \alpha)\text{”})\}.$$

Entonces, $|B_\alpha| \leq |\mathcal{I}_\alpha| < \kappa$, luego B_α es acotado en κ.

Ahora bien, por el mismo argumento de siempre (en esta ocasión lo dejamos enteramente a cargo del lector), tenemos que el conjunto $C^* := \{\delta < \kappa \big| (\forall \alpha < \delta)(B_\alpha \subseteq \delta)\}$ es un cena en κ. Dado que este conjunto fue definido en el modelo base, esto significa que él ya era un cena en el modelo base, lo cual implica que $C^* \cap S \neq \varnothing$. Tomemos,

[3]Por ejemplo, $\mathfrak{M} = \langle \aleph_2, <, >\rangle$: $<$ es un orden parcial, si $\beta < \gamma$ entonces $\beta > x \Rightarrow \gamma > x$, y finalmente para cualesquiera α y β podemos tomar $\xi := \text{máx}\{\alpha, \beta\} + 1$ y $\gamma := \xi + 1$ de modo que $\gamma > \xi > \alpha$, $\xi > \beta$ y $\gamma > \xi$.

pues, $\delta \in C^* \cap S$, y observemos que para cada $\alpha < \delta$ tenemos que $\mathcal{I}_\alpha \cap G \neq \varnothing$ (pues si $\mathcal{D} := \{q \in \mathbb{P} \big| (q \perp p) \vee (\exists r \in \mathcal{I}_\alpha)(q \leq r)\}$, entonces $\mathcal{D}$ es denso; luego $\mathcal{D} \cap G \neq \varnothing$, pero como $p \in G$ entonces no puede haber $q \in G$ con $q \perp p$; de modo que hay un $q \in G$ tal que para algún $r \in \mathcal{I}_\alpha$ tenemos que $q \leq r$, pero esto implica que $r \in G \cap I_\alpha$), de modo que hay un $q \in G \cap \mathcal{I}_\alpha$, es decir, $q \in G$ y $q \Vdash$ "$\beta(q) = \text{mín}(\mathring{C} \setminus \alpha)$", lo cual implica que $\beta(q) \in B_\alpha \subseteq \delta$, es decir $\beta(q) \in \delta$. Hemos demostrado que para cada $\alpha < \delta$, $[\text{mín}(C \setminus \alpha) \in \delta)]^{M[G]}$, lo cual quiere decir que para cada $\alpha < \delta$ existe un $\gamma > \alpha$ con $\gamma \in C$ y $\gamma < \delta$, luego hay una sucesión en $\mathring{C}_G$ que converge a δ y dado que C es un cena en $M[G]$, entonces $(\delta \in C)^{M[G]}$. Luego $(S \cap C \neq \varnothing)^{M[G]}$, y por lo tanto, en $M[G]$, S es un estacionario. $\square$

Lema 8 $\mathbb{P}_0$ *tiene la* $\aleph_2$*-c.c.*

Demostración: Sea χ un cardinal regular lo suficientemente grande como para que $\wp(\mathbb{P}_0) \subseteq H(\chi)$, y sea $\mathcal{I}$ una anticadena maximal de $\mathbb{P}_0$ tal que $|\mathcal{I}| > \aleph_1$. Definiremos una sucesión creciente de submodelos elementales de $\langle H(\chi), \in \rangle$, $\langle \mathfrak{N}_\alpha \big| \alpha < \aleph_1 \rangle$ de tal forma que se satisfaga lo siguiente:

1. $\mathbb{P}_0, \mathcal{I} \in \mathfrak{N}_0$, $|\mathfrak{N}_0| \leq \aleph_0$ y $|\mathfrak{N}_\alpha| \leq \aleph_1$.
2. $[\mathfrak{N}_\alpha]^{\leq \aleph_0} \subseteq \mathfrak{N}_{\alpha+1}$.
3. $\alpha < \beta \Rightarrow \mathfrak{N}_\alpha \prec \mathfrak{N}_\beta$.

Una sucesión tal se va construyendo con el teorema de Löwenheim-Skolem, en los ordinales límite se toman las uniones y el hecho de que se cumpla la segunda parte viene de que estamos trabajando en un modelo donde se satisface $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, lo cual nos garantiza que $|[\mathfrak{N}_\alpha]^{\leq \aleph_0}| = \aleph_1$. Si finalmente definimos $\mathfrak{N} := \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathfrak{N}_\alpha$, entonces tendremos que $\mathfrak{N} \prec \langle H(\chi), \in \rangle$, $|\mathfrak{N}| = \aleph_1$ y, dado que $\aleph_1$ es regular, $\mathfrak{N}$ será cerrado bajo subconjuntos numerables (si $X \in [\mathfrak{N}]^{\leq \aleph_0}$ entonces hay un α tal que $X \in [\mathfrak{N}_\alpha]^{\leq \aleph_0}$, luego $X \in \mathfrak{N}_{\alpha+1}$), y $\mathbb{P}_0, \mathcal{I} \in \mathfrak{N}$. Dado que $|\mathcal{I}| > \aleph_1 \geq |\mathfrak{N}|$, debe tenerse entonces que existe un $p \in \mathcal{I} \setminus \mathfrak{N}$. Observemos el elemento $p' := p \cap \mathfrak{N}$: dado que $|p| \leq \aleph_0$, entonces $|p'| \leq \aleph_0$ y, dado que $\mathfrak{N}$ es cerrado bajo subconjuntos numerables, tenemos que $p' \in \mathfrak{N}$. Ahora bien, observemos que $\langle H(\chi), \in \rangle \vDash (\exists q \in \mathcal{I})(q \leq p')$ (pues p es testigo de ello), dado que $\mathfrak{N} \prec \langle H(\chi), \in \rangle$, debemos tener entonces que existe un $q \in \mathcal{I} \cap \mathfrak{N}$ tal que $\mathfrak{N} \vDash q \leq p'$. Dado que $|q| \leq \aleph_0$, debe de haber una enumeración de q en $\mathfrak{N}$, lo cual implica que $q \subseteq \mathfrak{N}$. De esta forma, si consideramos $q \cup p$ tenemos que este elemento extiende a la parte de p que está en $\mathfrak{N}$ (es decir, a p'), y por otra parte q no puede contradecir nada de la información fuera de $\mathfrak{N}$ (ya que q está enteramente contenido en $\mathfrak{N}$), luego $q \cup p$ es una extensión común de p y q, por lo tanto estos dos son compatibles siendo ambos elementos de $\mathcal{I}$. Esto es una contradicción. $\square$

De este modo, los lemas 7 y 8 nos garantizan que, si tomamos un filtro $\mathbb{P}_0$-genérico G_0, entonces en el modelo $V_1 := V_0[G_0]$ nuestro conjunto S' donde definimos la $\clubsuit$-sucesión de la construccion 5 sigue siendo estacionario. Sin embargo, en esta ocasión algunas cardinalidades han cambiado. Recordemos un par de hechos importantes:

Teorema 9

(i) *Si θ es un cardinal regular y $\mathbb{P}$ es un preorden con la θ-c.c., entonces $\mathbb{P}$ preserva cardinales y cofinalidades $\geq \theta$.*

(ii) *Si θ es un cardinal regular y $\mathbb{P}$ es un preorden θ-cerrado, entonces $\mathbb{P}$ preserva cardinales y cofinalidades $\leq \theta$.*

Demostración:

(i) [Kunen 2006, Chapter VII, §6, Lemma 6.9, p. 213].

(ii) [Kunen 2006, Chapter VII, §6, Lemma 6.15, p. 215].

$\square$

Ahora, notemos que $\mathbb{P}_0$ claramente es $\aleph_1$-cerrado, por lo cual preserva cardinales y cofinalidades $\leq \aleph_1$. Por otra parte, como el lema 8 garantiza que $\mathbb{P}_0$ tiene la $\aleph_2$-c.c., entonces este preorden también preserva cardinales y cofinalidades $\geq \aleph_2$. Entonces, $\mathbb{P}$ de hecho preserva todos los cardinales y las cofinalidades, de modo que V_1 tiene los mismos cardinales que V_0, pero ahora $\aleph_1$ tiene $\aleph_3$ subconjuntos. Como enseguida mostraremos, nuestra $\clubsuit$-sucesión lo seguirá siendo en V_1. Así, hemos obtenido el modelo V_1 el cual satisface

$$V_1 \vDash 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_2} = \aleph_3 + \clubsuit_{\aleph_2},$$

y aún resta forzar por última vez para colapsar $\aleph_1$.

Proposición 10 *La sucesión $\langle D_\delta \big| \delta \in S' \rangle$ sigue siendo una $\clubsuit$-sucesión en V_1.*

Demostración: Sean $\mathring{X}$ un $\mathbb{P}$-nombre y $p \in \mathbb{P}_0$ tal que

$$p \Vdash \text{“}\mathring{X} \subseteq \aleph_2 \text{ es no acotado”}$$

Basta demostrar que el conjunto

$$\{q \in \mathbb{P}_0 \big| (q \leq p) \wedge (q \Vdash \text{“}(\exists \delta \in S' \cap \text{lím}(\omega_2))(D_\delta \subseteq \mathring{X})\text{”})\}$$

es denso por abajo de p. De manera análoga a como se hizo en la demostración del lema 8, fijemos un submodelo elemental $\mathfrak{N} \prec \langle H(\chi), \in \rangle$ con $|\mathfrak{N}| = \aleph_2$, que sea cerrado bajo subconjuntos de cardinalidad $\leq \aleph_1$ y tal que $p, \mathbb{P}_0, \mathring{X} \in \mathfrak{N}$. Enumeremos los miembros de $\mathbb{P}_0 \cap \mathfrak{N}$ que están por debajo de p, mediante la sucesión $\langle p_\alpha \big| \alpha < \omega_2 \rangle$. Definimos una estructura $\mathfrak{M}$ para el lenguaje $\mathcal{L}$ con universo $\aleph_2$ y tal que $\alpha <^* \beta \iff p_\alpha \geq p_\beta$, y $R(\alpha, x) \iff p_\alpha \Vdash \text{“}x \in \mathring{X}\text{”}$. Como $\mathring{X}_G$ es no acotado en V_1, es fácil ver que se cumple $\varphi(\mathfrak{M})$. Esto nos permite concluir que el conjunto $S'' := \{\alpha \in S' \big| \mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{M} \upharpoonright \alpha \prec \mathfrak{M}\} \cap \text{lím}(\omega_2)$ es estacionario. Tomemos un $\alpha \in S''$. Entonces tenemos que $D_\alpha = \{\xi_n^\alpha \big| n < \omega\}$ con $\xi_n^\alpha < \xi_{n+1}^\alpha < \alpha = \bigcup_{n<\omega} \xi_n^\alpha$, $\mathfrak{N} \vDash \gamma_n^\alpha <^*{}_\alpha \gamma_{n+1}^\alpha$ y $\mathfrak{N} \vDash R_\alpha(\gamma_n^\alpha, \xi_n^\alpha)$. De esta forma, haciendo $q_n^\alpha := p_{\gamma_n^\alpha}$, tenemos una sucesión decreciente (por la definición de $<^*{}_\alpha$) de condiciones en $\mathbb{P}_0$, $\langle q_n^\alpha \big| n < \omega \rangle$ tales que $q_n^\alpha \Vdash \text{“}\xi_n^\alpha \in \mathring{X}\text{”}$. En este punto, observemos que $\mathbb{P}_0$ es $\aleph_1$-completo, lo cual implica que hay una $q^\alpha \in \mathbb{P}_0$ tal que $(\forall n < \omega)(q^\alpha \leq q_n^\alpha)$, luego $(\forall n < \omega)(q^\alpha \Vdash \text{“}\xi_n^\alpha \in \mathring{X}\text{”})$ y eso significa que $q^\alpha \Vdash \text{“}D_\alpha \subseteq \mathring{X}\text{”}$, y ciertamente q^α extiende a p. □

Así, en V_1 seguimos teniendo nuestra $\clubsuit$-sucesión. Aún hace falta forzar por última vez para colapsar $\aleph_1$. Tomemos $\mathbb{P}_1 := \text{Fn}(\aleph_0, \aleph_1)$ el colapso de Lévy para $\aleph_1$. Esta es una noción de forzamiento que satisface $|\mathbb{P}_1| = \aleph_1$ (pues esencialmente, $\mathbb{P}_1 = \omega_1^{<\omega}$). Esto implica que $\mathbb{P}_1$ es $\aleph_2$-c.c., de modo que forzar con $\mathbb{P}_1$ deja los cardinales $\geq \aleph_2$ sin cambios. De esta forma, si G_1 es algún filtro $\mathbb{P}_1$-genérico en V_1, tomaremos $V_2 := V_1[G_1]$ y tendremos que $\aleph_1^{V_1}$ es numerable en V_2, lo cual implica que $\aleph_2^{V_1} = \aleph_1^{V_2}$, $2^{\aleph_0^{V_2}} = 2^{\aleph_1^{V_1}} = \aleph_3^{V_1} = \aleph_2^{V_2}$, por lo cual $V_2 \vDash 2^{\aleph_0} = \aleph_2$, es decir, $V_2 \vDash \neg\mathsf{HC}$. Tan sólo resta ver que $V_2 \vDash \clubsuit$, lo cual se sigue del hecho de que nuestra $\clubsuit_{\aleph_2}$-sucesión de la construcción 5 lo sigue siendo en V_2 (en cuyo caso, dado que $\aleph_2^{V_1} = \aleph_1^{V_2}$, nuestra sucesión pasa a ser en verdad una $\clubsuit$-sucesión). Pero esto será inmediato del siguiente lema.

Lema 11 *En V_2, todo $X \subseteq \aleph_1$ no acotado incluye un “viejo” conjunto no acotado de $\aleph_2$.*

Demostración: Agarremos un $\mathbb{P}_1$-nombre $\mathring{X}$ para un subconjunto no acotado de $\aleph_2^{V_1} = \aleph_1^{V_2}$, y $p \in \mathbb{P}_1$ tal que $p \Vdash \text{“}\mathring{X}$ es no acotado en $\aleph_2\text{”}$. Así, para cada $\alpha < \omega_2$ hay un número ordinal $\tau(\alpha)$ y un $q(\alpha) \leq p$ de tal suerte que $q(\alpha) \Vdash \text{“}(\aleph_2 > \tau(\alpha) > \alpha) \wedge (\tau(\alpha) \in \mathring{X})\text{”}$. Dado que $|\mathbb{P}_1| = \aleph_1$, por el principio de las casillas debe de haber $\aleph_2$ distintos αs tales que sus respectivos $q(\alpha)$ coinciden, digamos que en $q(*)$. Sea $X' := \{\tau(\alpha) \big| q(*) = q(\alpha)\} \in V_1$, luego X' es claramente no acotado, de modo que $q(*) \leq p$ y $q(*) \Vdash \text{“}X' \subseteq \mathring{X} \wedge X'$ es no acotado”, lo cual implica que X' es no acotado en $\aleph_2$, en V_1, y que $X' \subseteq X$ en V_2. □

De esta forma, $\mathbb{P}_1$ preserva estacionarios (por la $\aleph_2$-c.c) y además preserva a nuestra $\clubsuit$-sucesión, ya que para adivinar un nuevo conjunto basta adivinar uno viejo.

Referencias

[Shelah 1998] Shelah, Saharon. *Proper and Improper Forcing*, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1998.

[Devlin 1977] Devlin, Keith J., *Constructibility: A Guide for the Matematician.* Lecture Notes in Mathematics 617. Springer, 1977.

[Hernández-Hernández 2005] Hernández-Hernández, Fernando, “Submodelos elementales en topología”. *Aportaciones Matemáticas, Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana* **35** (2005), 131-158.

[Kunen 2006] Kunen, Kenneth; *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics (102), Elsevier, 2006.