Teoría de Ramsey en Estructuras Aditivas Infinitas

David J. Fernández Bretón

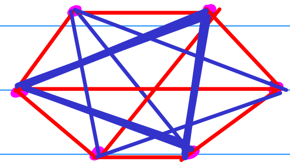
Escuela Superior de Física y Matemáticas,
Instituto Politécnico Nacional

Seminario de Combinatoria, Control y Optimización (UAM-A)
Martes 14 de septiembre de 2021

Teoría de Ramsey

"El caos total es imposible"

Ejemplo: Si en una fiesta hay ≥ 6 invitados, entonces o bien hay 3 de ellos que se conocen mutuamente, o bien hay 3 de ellos que no se conocen mutuamente



COMBINATORIA ADITIVA

TEOREMA (SCHUR, 1912): SI COLOREAMOS LOS ELEMENTOS DE $\mathbb{N}$ ($c: \mathbb{N} \longrightarrow \{rojo, azul\}$), ENTONCES HAY $a, b \in \mathbb{N}$ TALES QUE a, b Y $a+b$ TIENEN EL MISMO COLOR ($c(a) = c(b) = c(a+b)$, O BIEN $\{a, b, a+b\}$ ES UN CONJUNTO MONOCROMÁTICO).

$\longrightarrow$ TAMBIÉN ES CIERTO QUE: PARA TODA $c: \mathbb{N} \to \{rojo, azul\}$ HAY a, b, c TALES QUE $\{a, b, c, a+b, a+c, b+c, a+b+c\}$ ES MONOCROMÁTICO

TEOREMA (FOLKMAN, RADO, SANDERS 1968/1969): PARA TODO $n \geq 2$, PARA TODA $c: \mathbb{N} \longrightarrow \{rojo, azul\}$, HAY ELEMENTOS $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$ TALES QUE $FS(a_1, \cdots, a_n)$ ES MONOCROMÁTICO.

$$\longrightarrow FS(a_1, \cdots, a_n) = \{ a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_k;\ k \in \{1, \cdots, n\} \}$$

TEOREMA (HINDMAN 1974): PARA TODA $c: \mathbb{N} \longrightarrow \{rojo, azul\}$, HAY ELEMENTOS $a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots$ TALES QUE $FS(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ES MONOCROMÁTICO.

$$\longrightarrow FS(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{ a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_k;\ k \in \mathbb{N} \}$$

Generalizando el Teorema de Hindman

"Argumento de Galvin-Glazer": Si G es un grupo abeliano infinito y $c: G \longrightarrow$ finito, entonces hay un subconjunto infinito $X \subseteq G$ tal que $FS(X)$ es monocromático.

$$\longrightarrow FS(X) = \{x_1 + \cdots + x_n \mid x_1, \dots, x_n \in X \text{ distintos}; n \in \mathbb{N}\}$$

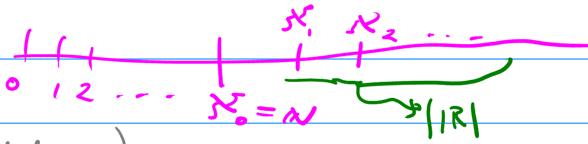
Proposición (F.B., Lee, 2016): Si G es un grupo abeliano infinito, entonces existe $c: G \to \aleph_0$ tal que $FS(X)$ no puede ser monocromático si $X \subseteq G$ es infinito.

Teorema (Malykhin 60's; Protasov 90's; F.B. 2010's): Si G es un grupo abeliano no numerable, entonces hay $c: G \longrightarrow \{\text{rojo}, \text{azul}\}$ tal que $FS(X)$ no puede ser monocromático si $X \subseteq G$ es no numerable.

Teorema (F.B., Rinot 2016/2017): Si G es un grupo abeliano no numerable, entonces hay $c: G \longrightarrow \aleph_0$ tal que: siempre que $X \subseteq G$ es no numerable, entonces $FS(X)$ contiene elementos de todos los colores posibles.

($FS(X)$ es "pancromático")

Teorema (F.B., Rinot 2016/2017)



① Es consistente con ZFE (si $V=L$):

Para todo grupo abeliano no numerable G, existe $c: G \longrightarrow \aleph_1$ tal que, siempre que $X \subseteq G$ es no-numerable, entonces $FS(X)$ es pancromático.

$FS_2(X)$

② Es consistente con ZFE (después de añadir un ω_1-Erdős de reales de Cohen):

Para todo $c: \mathbb{R} \longrightarrow \aleph_1$, existe un $X \subseteq \mathbb{R}$ no numerable tal que $FS(X)$ únicamente alcanza una cantidad numerable de colores.

Teorema (Komjáth, 2017)

Dados $n \geq 2$ finito, y κ infinito, existe un grupo abeliano G tal que para toda $c: G \longrightarrow \kappa$, hay $x_1, \dots, x_n \in G$ con $FS(x_1, \dots, x_n)$ monocromático.

Teorema (F.B., Lee, 2018):

① Dado κ infinito, hay un $\lambda > \kappa$ (de hecho $\lambda = (2^\kappa)^+$) tal que: para todo grupo abeliano G, si $|G| = \lambda$, entonces $\forall c: G \longrightarrow \kappa$ hay $x, y \in G$ con $\{x, y, x+y\}$ monocromático.

② El λ de arriba es óptimo

③ Para $n \geq 3$, el análogo de ① es falso.

El problema de Owings

Pregunta (Owings, 1974): ¿Es cierto que $\forall c: \mathbb{N} \to 2$ existe un $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $X+X$ es monocromático?

$\longrightarrow X+X = \{x+y \mid x,y \in X\}$ (suma de Minkowski)
$= FS_2(X) \cup 2X$

Teorema (Hindman, 1979): Existe una $c: \mathbb{N} \to 3$ tal que, si $X \subseteq \mathbb{N}$ es infinito, entonces $X+X$ no es monocromático.

Teorema (Hindman, Leader, Strauss, 2016): Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

1. Si $\dim(V) = \aleph_n$, entonces hay $c: V \longrightarrow 9 \cdot 2^{4+n}$ tal que, si $X \subseteq V$ es infinito, entonces $X+X$ no es monocromático.
2. Si $\dim(V) = \aleph_\omega$, entonces hay $c: V \longrightarrow$ finito tal que, si $X \subseteq V$ es infinito, entonces $X+X$ no es monocromático

En particular: Es consistente con ZFC que haya $c: \mathbb{R} \to$ finito tal que, si $X \subseteq \mathbb{R}$ es infinito, entonces $X+X$ no es monocromático.

Teorema (Leader, Russell, 2016): Hay un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial V (con $\dim(V) = \beth_\omega = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{\aleph_0}}}}}}$ (∞)) tal que, si $c: V \to$ finito, entonces existe $X \subseteq V$ infinito con $X+X$ monocromático.

$\longrightarrow$ Pero... $\dim(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0} < \beth_\omega$

Teorema (Komjáth, Leader, Russell, Shelah, D. Soukup, Vidnyánszki, 2018): Si existe un cardinal ω_1-Erdős, entonces es consistente con ZFE que $\forall\, c: \mathbb{R} \to$ finito $\exists\, X \subseteq \mathbb{R}$ infinito tal que $X+X$ es monocromático.

Teorema (Zhang, 2019):
Es consistente con ZFE que $\forall\, c: \mathbb{R} \to$ finito $\exists\, X \subseteq \mathbb{R}$ infinito tal que $X+X$ es monocromático.

Teorema (Zhang, 2019): Para todo $c: \mathbb{R} \longrightarrow \{\text{rojo}, \text{azul}\}$ existe $X \subseteq \mathbb{R}$ infinito tal que $X+X$ es monocromático.

Pregunta: Si $h(\mathbb{R}) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \forall c: \mathbb{R} \to n\ \exists X \subseteq \mathbb{R}$ infinito con $X+X$ monocromático$\}$, ¿Qué valores podría tomar $h(\mathbb{R})$? ($h(\mathbb{R}) \geq 2$)

Pregunta: Si $h(G) = \text{máx}\{n \in \mathbb{N} \mid \forall c: G \to n \ \exists X \subseteq G$ infinito con $X + X$ monocromático$\}$, ¿Qué valores podría tomar $h(G)$, cuando G es un semigrupo conmutativo infinito?

→ Hindman: $h(\mathbb{N}) < 3$.
Owings: ¿Será el caso que $h(\mathbb{N}) = 2$?

¿Qué opciones hay para $h(G)$ si G es un grupo abeliano infinito de torsión?

¿Qué pasa si pedimos $|X| = n$, para n fijo, en vez de infinito?

Sumas/productos finitas/os adyacentes

Definición: Dado un grupo G, y una sucesión $\langle g_\alpha \mid \alpha \in \lambda \rangle$ (e.g. $\lambda = \omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$), definimos

$$AFS(g_\alpha \mid \alpha \in \lambda) := \left\{ g_\alpha + g_{\alpha+1} + \cdots + g_{\alpha+n} \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \in \lambda,\ n \in \mathbb{N}, \\ \alpha + n \in \lambda \end{array} \right\} \subsetneq FS(\cdots)$$

ó

$$AFP(g_\alpha \mid \alpha \in \lambda) := \left\{ g_\alpha \cdot g_{\alpha+1} \cdot \cdots \cdot g_{\alpha+n} \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \in \lambda,\ n \in \mathbb{N}, \\ \alpha + n \in \lambda \end{array} \right\}$$

Teorema (F.B., Carlucci, 2021): Si G es un grupo infinito, entonces $\forall c: G \to$ finito $\exists \langle g_\alpha \mid \alpha \in |G| \rangle$ inyectiva tal que $AFS(g_\alpha \mid \alpha \in |G|) / AFP(g_\alpha \mid \alpha \in |G|)$ es monocromático.

Teorema (F.B., Carlucci, 2020):

① Dado κ cardinal infinito, existe un $\lambda > \kappa$ (de hecho, $\lambda = (2^{\kappa})^{+}$) tal que:
Si G es un grupo con $|G| = \lambda$, entonces $\forall c: G \longrightarrow \kappa$, existe una sucesión $\langle g_\alpha \mid \alpha \in \lambda \rangle$ inyectiva tal que
$AFS(g_\alpha \mid \alpha \in \lambda) / AFP(g_\alpha \mid \alpha \in \lambda)$ es monocromático

② El λ de ① es óptimo: Si G es abeliano, o $G \in \{S_\kappa, F_\kappa\}$, entonces existe $c: G \longrightarrow \kappa$ tal que para cualesquiera $x, y \in G$ distintos, $\{x, y, x+y\} / \{x, y, xy\}$ no es monocromático.

con $|G| = 2^{\kappa}$

→ En particular: Si $G \in \{Sym(\mathbb{N}), \mathbb{R}\}$ entonces $\exists c: \mathbb{R} \longrightarrow \aleph_0$ tal que ningún conjunto $\{x, y, x+y\} / \{\sigma, \pi, \sigma\pi\}$ es monocromático.

$AFS(x_n \mid n \in \omega)$

Pregunta: ¿Existe algún grupo G y κ, tales que:
$\forall c: G \to \kappa \quad \exists \langle g_\alpha \mid \alpha \in \lambda \rangle$ con $AFP(g_\alpha \mid \alpha \in \lambda)$ monocromático, y $\lambda > 2$, pero sin que sea posible que $\lambda = |G|$?

$\rightsquigarrow$