CAPÍTULO 1

Un problema de álgebra que resultó indecidible

David J. FernándezBretón [1]
Instituto de Matemáticas UNAM, campus Morelia
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

1. Introducción

Un resultado bastante célebre es aquél conocido como *segundo teorema de incompletitud de Gödel*. Lo que este resultado afirma es, en esencia, que en cualquier sistema axiomático "suficientemente fuerte", necesariamente habrá proposiciones indecidibles (es decir, proposiciones que no son demostrables ni refutables dentro del sistema). En particular, en un sistema axiomático tan fuerte como lo es ZFE, es decir, los axiomas de Zermelo-Fraenkel con axioma de elección, necesariamente han de existir proposiciones indecidibles. Sin embargo, la construcción de Gödel consistió básicamente en elaborar, dentro del sistema, una proposición que en cierto sentido afirmara de sí misma que no es demostrable. En virtud de ello, uno podría pensar que toda proposición indecidible resulta ser demasiado "artificial", tal y como la que construyó Gödel (y hay sistemas axiomáticos en los cuales todas las proposiciones indecidibles que hasta la fecha se conocen, son de este tipo). Es a causa de esto que resulta importante hallar ejemplos de proposiciones indecidibles que no parezcan tan artificiales, que sí "tengan cara" de ser proposiciones matemáticas genuinas. Una de estas proposiciones es la hipótesis del continuo[2], denotada por HC, que asegura que $\mathfrak{c} = 2^\omega = \omega_1$. Hay varios otros ejemplos en diversas áreas de la matemática, tales como la topología de conjuntos o el análisis matemático. Conocer este tipo de proposiciones arroja nueva luz sobre la relación entre la matemática y la lógica, y sin duda nos permite conocer más de cerca las limitaciones del método axiomático. En esta ocasión presentamos cierta proposición del álgebra, junto con la demostración de que ésta es indecidible, con lo cual se hará patente que ni siquiera áreas como el álgebra se libran de "sufrir" las consecuencias del segundo teorema de incompletitud de Gödel.

Poco se requiere para comprender esta nota, apenas lo que se cubre en cualquier curso estándar de teoría de grupos. Por el lado de la teoría de conjuntos, aún cuando no se conozcan los axiomas de Zermelo-Fraenkel, basta "tener fé" en que estos axiomas, junto con las reglas de la lógica, permiten implementar cualquier

---

[1]Quisiera agradecer a Raúl Escobedo Conde por invitarme a presentar el contenido de este artículo en un minicurso que fue impartido del 16 al 18 de diciembre de 2009 en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

[2]De hecho, esta es históricamente la primera proposición de este tipo que fue considerada por la comunidad matemática. Para demostrar la indecidibilidad de esta proposición, Paul Joseph Cohen desarrolló la técnica del forzamiento, lo que le valió ser galardonado con la Medalla Fields en 1966, la única Medalla Fields de la historia que ha sido otorgada por un trabajo en lógica matemática.

razonamiento de los que comúnmente realiza un matemático al confeccionar sus demostraciones. Lo que sí es indispensable es conocer de cerca a los números ordinales y el principio de inducción transfinita (ambos están muy bien explicados en [**4**]). También se requiere creer que los axiomas adicionales a ZFE que utilizaremos aquí, son efectivamente consistentes con el resto de ZFE, es decir, que añadir dichos axiomas no arrojará contradicciones. Esto puede demostrarse rigurosamente, pero es preciso conocer muy de cerca la teoría de conjuntos, así como la lógica involucrada. Para el lector interesado, es ampliamente recomendable consultar [**6**]. También se recomienda revisar [**3**, Capítulo I], donde los mismos resultados que se presentan aquí son detallados con mucha más precisión, para el lector que desee profundizar en el tema.

2. Recordatorio: Hechos básicos acerca de grupos abelianos

A lo largo del presente artículo, la terminología referente a la teoría de conjuntos es estándar. Un número ordinal es un conjunto transitivo (es decir, un conjunto que está contenido en su propio conjunto potencia) que está bien ordenado por la relación $\in$; es decir, cada número ordinal es exactamente el conjunto de números ordinales menores a él. **Ord** denota a la clase de los números ordinales. Un número cardinal es un número ordinal que no es equipotente a ninguno de los ordinales menores a él, y a la clase de los números cardinales la denotamos por **Card**. El axioma de elección implica que todo conjunto X es equipotente a algún número cardinal (el cual necesariamente ha de ser único), que denotamos por $|X|$. La sucesión de números cardinales se define, por inducción transfinita, de la manera siguiente: $\omega = \omega_0 = |\mathbb{N}|$, y si ya conocemos ω_α entonces $\omega_{\alpha+1}$ es el mínimo cardinal que como ordinal es mayor que ω_α; finalmente, si α es un ordinal límite y conocemos a ω_β para todo ordinal $\beta < \alpha$, entonces $\omega_\alpha = \sup\limits_{\beta<\alpha} \omega_\beta$. En ocasiones se denota a ω_α por $\aleph_\alpha$, teniendo de esta forma dos símbolos distintos para el mismo objeto matemático, en el presente trabajo no utilizaremos esta última notación. A continuación comenzaremos a recordar los principales resultados acerca de grupos abelianos que utilizaremos en lo sucesivo.

Definición 2.1. Un grupo abeliano A es **libre** si tiene una base, es decir, un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\langle X \rangle = A$ (es decir, X genera a A) y siempre que $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i = 0$, para $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$, y $x_1, \ldots, x_n$ elementos distintos de X, entonces $(\forall i \in n+1 \setminus \{0\})(m_i = 0)$ (es decir, X es $\mathbb{Z}$-linealmente independiente).

Equivalentemente, $X \subseteq A$ es una base si y sólo si cumple con la propiedad universal de los grupos abelianos libres: dado cualquier grupo abeliano B y cualquier función $f : X \longrightarrow B$, existe un único morfismo de grupos $\hat{f} : A \longrightarrow B$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\forall f"'] & A \arrow[d, dashed, "\exists! \hat{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

La siguiente es una de las caracterizaciones más útiles de los grupos abelianos libres.

DEFINICIÓN 2.2. Sea $\pi : A \longrightarrow B$ un morfismo de grupos abelianos. Decimos que π **se escinde** si existe un morfismo $\rho : B \longrightarrow A$ (llamado la **escisión** de π) tal que $\pi\rho = \mathrm{id}_B$.

Es decir, π se escinde sii tiene una inversa derecha en la categoría de grupos abelianos. Nótese que, si π se escinde con escisión ρ, entonces necesariamente π será epimorfismo y ρ será monomorfismo.

TEOREMA 2.3. Un grupo abeliano A es libre $\iff$ todo epimorfismo con rango A se escinde.

DEMOSTRACIÓN:

- **$\Rightarrow$:** Supóngase que A es libre, digamos que con base X, y sea $\pi : B \longrightarrow A$ un epimorfismo. Para cada $x \in X$ seleccionamos un $b_x \in B$ tal que $\pi(b_x) = x$, luego por la propiedad universal de los grupos abelianos libres, hay un único $\rho : A \longrightarrow B$ tal que $(\forall x \in X)(\rho(x) = b_x)$, es claro que ρ es escisión para π.
- **$\Leftarrow$:** Consideremos un grupo libre F con una base de la misma cardinalidad que A, $X = \{x_a \big| a \in A\}$. Sea, por la propiedad universal de los grupos abelianos libres, $\pi : F \longrightarrow A$ el único morfismo tal que $(\forall a \in A)(\pi(x_a) = a)$. Por hipótesis, hay una escisión $\rho : A \longrightarrow F$ para π, misma que debe de ser inyectiva. Luego A es isomorfo a un subgrupo de F y por lo tanto, por el teorema que a continuación enunciaremos, A es libre.

$\square$

A continuación listamos algunas propiedades importantes y básicas (suelen verse en cualquier curso estándar de álgebra) de los grupos libres, que nos serán útiles más adelante (de hecho, ya utilizamos una de ellas). Recordemos que un grupo es **libre de torsión** si todos sus elementos son de orden infinito (a los elementos de orden finito en un grupo A se les conoce como los **elementos de torsión**, y forman un subgrupo denotado por $\mathrm{tor}(A)$).

PROPOSICIÓN 2.4.

(i) Un subgrupo de un grupo abeliano libre es libre.
(ii) Un grupo abeliano finitamente generado y libre de torsión es libre.
(iii) Sean A grupo abeliano y $B \leq A$ tal que tanto B como A/B son libres. Entonces A es libre, más aún, toda base de B se extiende a una base de A, y $A \cong (A/B) \oplus B$.

Resulta interesante mencionar que la demostración de la Proposición 2.4 (i) requiere por necesidad del axioma de elección para ser demostrada.

Finalmente, para cerrar esta sección, ofrecemos la prueba de un resultado que, posteriormente, resultará tan útil como la técnica utilizada para demostrarlo.

DEFINICIÓN 2.5. Consideremos una sucesión de conjuntos $\langle A_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$, para algún $\alpha \in \mathbf{Ord}$.

(i) Diremos que la sucesión es una **cadena** si $(\forall \beta, \gamma \in \mathbf{Ord})(\beta < \gamma < \alpha \Rightarrow A_\beta \subseteq A_\gamma)$.
(ii) Diremos que la cadena es **suave** si para cada ordinal límite $\beta < \alpha$, se tiene que $A_\beta = \bigcup_{\gamma < \beta} A_\gamma$.

(*iii*) Diremos que la cadena es **estricta** si para cada $\beta \in \mathbf{Ord}$ tal que $\beta + 1 < \alpha$, se cumple $A_\beta \neq A_{\beta+1}$. Equivalentemente, si reemplazamos las contenciones $\subseteq$ en la parte (*i*) por contenciones propias $\subsetneq$.

(*iv*) Finalmente, diremos que se trata de una **cadena de grupos** si los A_β son grupos para todo $\beta < \alpha$, y en tal forma que para $\beta < \gamma < \alpha$ se tiene que $A_\beta \leq A_\gamma$.

Teorema 2.6. Sea $\langle A_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$ una cadena suave de grupos tal que A_0 es libre y para cada $\beta \in \mathbf{Ord}$ que satisface $\beta + 1 < \alpha$, se cumple que $A_{\beta+1}/A_\beta$ es libre. Entonces, $A = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ es libre. Más aún, para cada $\beta < \alpha$, A/A_β es libre.

Demostración: Sea X_0 base de A_0. Construiremos por inducción transfinita una cadena suave de conjuntos $\langle X_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$ tal que para cada $\beta < \alpha$, X_β será base de A_β. Si conocemos X_β, entonces en particular A_β será libre y, dado que $A_{\beta+1}/A_\beta$ es libre, la Proposición 2.4 (*iii*) nos asegura que $A_{\beta+1}$ es libre y que tiene una base $X_{\beta+1}$ que es extensión de X_β. Ahora, supongamos que $\beta < \alpha$ es un ordinal límite, y que conocemos X_γ para todo $\gamma < \beta$. En este caso, dado que por hipótesis la cadena de grupos es suave, tendremos que $X_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} X_\gamma$ será una base para $A_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} A_\gamma$. Finalmente, notemos que, una vez construida la cadena $\langle X_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$, entonces $X = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$ será una base para $A = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ y por consiguiente A será libre; más aún, es claro que, para cada $\beta < \alpha$, $\{x + A_\beta \big| x \in X \setminus X_\beta\}$ será una base para A/A_β. $\square$

3. El problema de la extensión

Definición 3.1. Sean A, B y G grupos abelianos. Diremos que G es una **extensión de A por medio de B** si $A \leq G$ y $G/A \cong B$.

Obsérvese que G es (isomorfo a) una extensión de A por medio de B sii existen un monomorfismo $\iota : A \hookrightarrow G$ y un epimorfismo $\pi : G \twoheadrightarrow B$ tales que la sucesión

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow A \overset{\iota}{\hookrightarrow} G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

es exacta corta.

Si tenemos A, G grupos abelianos con $A \leq G$, entonces hay un único B tal que G es una extensión de A por medio de B, a saber, $B = G/A$. El problema de la extensión plantea la pregunta recíproca: Dados A y B grupos abelianos, determinar todas las posibles extensiones de A por medio de B. Nótese que al menos hay una de estas extensiones, la suma directa $A \oplus B$. Pero puede haber varias: por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es una extensión de $2\mathbb{Z}$ por medio de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pues la siguiente sucesión es exacta corta,

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow 2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

pero es claro que $\mathbb{Z} \ncong 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pues el miembro derecho tiene torsión, mientras que $\mathbb{Z}$ es libre de torsión.

Desde luego, sólo nos interesa caracterizar hasta isomorfismo las extensiones de A por medio de B. Por ello, si G y G' son dos de tales extensiones, es decir, si hay monomorfismos $\iota : A \hookrightarrow G$, $\iota' : A \hookrightarrow G'$ y epimorfismos $\pi : G \twoheadrightarrow B$, $\pi' : G' \twoheadrightarrow B$ tales que ambas sucesiones

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow A \xhookrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

y

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow A \xhookrightarrow{\iota'} G' \xrightarrow{\pi'} B \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

son exactas cortas, entonces

Definición 3.2. Diremos que $G \sim G'$ (G es **isomorfo como extensión de** A **por medio de** B a G') si existe un isomorfismo $\psi : G \xrightarrow{\sim} G'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dd, "\psi"', "\wr"] \arrow[dr, two heads, "\pi"] & \\
A \arrow[ur, hook, "\iota"] \arrow[dr, hook, "\iota'"'] & & B \\
 & G' \arrow[ur, two heads, "\pi'"'] &
\end{tikzcd}$$

Es fácil ver que la relación $\sim$ es de equivalencia, y es una relación más fuerte que sólo el "ser isomorfo". Baer definió una operación binaria entre las clases de equivalencia de estas extensiones, dotando al conjunto cociente de estructura de grupo. Este grupo se denota por $\operatorname{Ext}(B, A)$, y su elemento neutro resulta ser justamente la clase de equivalencia de $A \oplus B$. El siguiente teorema resulta fundamental para el estudio del problema de la extensión que realizaremos durante el presente artículo.

Teorema 3.3. Sea A un grupo abeliano. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\operatorname{Ext}(A, \mathbb{Z})$ es el grupo trivial.
- Todo epimorfismo $\pi : B \twoheadrightarrow A$ tal que $\ker \pi$ es cíclico infinito se escinde.

Demostración: Supongamos la primera condición, y sea $\pi : B \twoheadrightarrow A$ un epimorfismo tal que $\ker \pi \cong \mathbb{Z}$. Esto quiere decir que la sucesión

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow \mathbb{Z} \xhookrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

es exacta, y entonces por hipótesis ha de tenerse que $B \cong A \oplus \mathbb{Z}$. Esto automáticamente implica que π se escinde (esencialmente, $B = A \times \mathbb{Z}$, entonces $a \longmapsto (a, 0)$ funciona como escisión para π).

Recíprocamente, si la segunda condición se cumple, entonces si B es una extensión de $\mathbb{Z}$ por medio de A ello significa que

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow \mathbb{Z} \xhookrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

es exacta corta, por hipótesis esto implica que π se escinde y por lo tanto, un hecho conocido en teoría de los grupos abelianos nos garantiza que $B \cong A \oplus \mathbb{Z}$. □

Definición 3.4. Si A es un grupo abeliano que cumple con cualquiera de las dos (y consecuentemente con las dos) equivalencias del teorema anterior, se le denominará un **W-grupo**.

Recordemos que los grupos abelianos libres son exactamente aquellos grupos abelianos A que escinden a todo epimorfismo $\pi : B \longrightarrow A$. En particular, los grupos abelianos libres A escinden a todo epimorfismo $\pi : B \longrightarrow A$ con núcleo cíclico infinito. Eso es el contenido del siguiente corolario.

Corolario 3.5. Todo grupo abeliano libre es un W-grupo. $\square$

El problema de Whitehead consiste en decidir si se cumple el recíproco del corolario anterior. Es decir, ¿se cumple que todo W-grupo es libre? A continuación analizaremos la solución que dio Shelah al problema de Whitehead. En primer lugar, desarrollaremos bastante teoría que entrelaza el estudio de los W-grupos con el de la teoría de conjuntos, dejando todo listo para finalmente demostrar que el problema de Whitehead es indecidible. Comenzaremos por enunciar un importante teorema, que no demostraremos aquí[3] por requerir una gran cantidad de álgebra homológica (y porque creo que en este caso es mucho más interesante mostrar las relaciones del problema de Whitehead con la Teoría de Conjuntos).

Teorema 3.6.
(i) Todo subgrupo de un W-grupo es un W-grupo.
(ii) Todo W-grupo es libre de torsión.
(iii) Si $A \leq B$, en donde B es un W-grupo pero B/A no es un W-grupo, entonces existe un morfismo de grupos abelianos $\psi : A \longrightarrow \mathbb{Z}$ que no puede extenderse a un morfismo con dominio B (i.e. todo morfismo $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{Z}$ es tal que $\varphi \restriction A \neq \psi$).

. $\square$

3.1. W-grupos numerables. Ahora nos encaminaremos a demostrar que, en el caso de los grupos numerables, sí se cumple que todo W-grupo es libre.

Definición 3.7. Sea A un grupo abeliano libre de torsión y $B \leq A$.
(i) Decimos que B es **puro** en A si A/B es libre de torsión.
(ii) Definimos la **cerradura pura** de B en A como el conjunto

$$\mathrm{C.P.}(B) = \{a \in A \big| (\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})(na \in B)\}.$$

Es fácil ver que $\mathrm{C.P.}(B)$ es un subgrupo puro de A: si $a, b \in \mathrm{C.P.}(B)$ entonces hay $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tales que $na, mb \in B$, luego $(nm)(a - b) = m(na) - n(mb) \in B$, y por consiguiente $a - b \in \mathrm{C.P.}(B)$. Por lo tanto, $\mathrm{C.P.}(B) \leq A$. Ahora, si $x + \mathrm{C.P.}(B) \in A/\mathrm{C.P.}(B)$ es un elemento de torsión, esto quiere decir que hay un $n \in \mathbb{N}$ con $nx + \mathrm{C.P.}(B) = n(x + \mathrm{C.P.}(B)) = \mathrm{C.P.}(B)$, luego $nx \in \mathrm{C.P.}(B)$ y por tanto, hay un $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $(mn)x = m(nx) \in B$, luego $x \in \mathrm{C.P.}(B)$ y la parte de torsión de $A/\mathrm{C.P.}(B)$ es trivial. De hecho, $\mathrm{C.P.}(B)$ es el subgrupo puro más pequeño de A que contiene a B: Si $B \subseteq C \leq A$ es otro subgrupo puro en A, y $a \in \mathrm{C.P.}(B)$, entonces hay un $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $na \in B \subseteq C$, luego $C = na + C = n(a + C)$ y por consiguiente, $a + C$ es un elemento de torsión en A/C, el cual es por hipótesis libre de torsión y por consiguiente $a + C = C$, lo que implica $a \in C$ y luego $\mathrm{C.P.}(B) \subseteq C$.

Aunque B sea finitamente generado, no necesariamente $\mathrm{C.P.}(B)$ lo es. Por ejemplo, considérese el grupo (libre de torsión) $\mathbb{Q}$. En él, $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ es finitamente generado. Pero es fácil comprobar que $\mathrm{C.P.}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$, y es bien conocido el hecho

[3]Para el lector interesado, es conveniente consultar [**3**, Capítulo I, Teorema I.7, pp. 26-27] o [**2**, Sección 3, pp. 777-779].

de que $\mathbb{Q}$ no es finitamente generado (si $a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n \in \mathbb{Q}$, con $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ y $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{N}$; entonces basta tomar un número primo p que no divide a $b_1, \ldots, b_n$ y es inmediato comprobar que $1/p \notin \langle a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n \rangle$).

Sin embargo, en el caso cuando A es un grupo libre abeliano, A es libre de torsión, y entonces si $B \leq A$ es finitamente generado, tenemos que C.P.(B) es finitamente generado. En efecto, siendo A libre entonces B lo es. Si X es base para A y $\{b_1, \ldots, b_n\}$ es base para B, de tal forma que cada $b_i = m_{i,1}x_1 + \ldots + m_{i,k}x_k$ con $x_1, \ldots, x_k \in X$ y $m_{i,j} \in \mathbb{Z}$ (posiblemente algunos $m_{i,j} = 0$), entonces para cada $1 \leq i \leq n$ sea l_i el máximo común divisor de $\{m_{i,1}, \ldots, m_{i,k}\}$. De esta manera, si para cada $1 \leq i \leq n$ definimos $y_i := (m_{i,1}/l_i)x_1 + \cdots + (m_{i,k}/l_i)x_k$, es fácil comprobar que C.P.(B) tiene a $\{y_1, \ldots, y_n\}$ como base. En particular, si A es un grupo libre abeliano, entonces todo subgrupo finitamente generado $B \leq A$ está contenido en un subgrupo puro finitamente generado (como acabamos de ver, C.P.(B) testifica esto). El siguiente teorema nos proporciona una recíproca parcial (para grupos numerables) de lo que acabamos de afirmar.

Teorema 3.8 (Criterio de Pontryagin). *Sea A un grupo abeliano numerable libre de torsión tal que todo subgrupo finitamente generado de A está contenido en un subgrupo puro en A que es finitamente generado. Entonces, A es libre.*

Demostración: Sea $A = \{a_n \big| n < \omega\}$. Definimos por inducción una cadena suave $\langle B_n \big| n < \omega \rangle$ de subgrupos puros finitamente generados de A. En primer lugar, $B_0 = \langle 0 \rangle$. Si ya conozco B_n, sea B_{n+1} un subgrupo puro finitamente generado de A que contenga a $\langle B_n \cup \{a_n\} \rangle$. Es claro que $\bigcup\limits_{n<\omega} B_n = A$. Ahora, al ser B_n puro en A, ello implica que A/B_n es libre de torsión. Por tanto, $B_{n+1}/B_n \leq A/B_n$ es libre de torsión, además de ser finitamente generado ya que B_{n+1} lo es. Por lo tanto, por la Proposición 2.4 (ii), B_{n+1}/B_n es libre para todo $n < \omega$; como además B_0 es libre (con base $\varnothing$), el Teorema 2.6 nos asegura que A es libre. $\square$

En adelante, como una cuestión de notación, siempre que tengamos un grupo abeliano B, π denotará la primera proyeción $\pi : B \times \mathbb{Z} \longrightarrow B$, es decir, $(b, n) \overset{\pi}{\longmapsto} b$, para todo $(b, n) \in B \times \mathbb{Z}$.

Definición 3.9. Sea B un grupo abeliano. Un $(B, \mathbb{Z})$**-grupo** es un grupo C tal que su conjunto subyacente es $B \times \mathbb{Z}$ y tal que $\pi : C \longrightarrow B$ es morfismo de grupos abelianos, amén de que $(\forall m, n \in \mathbb{Z})((0, n) + (0, m) = (0, m + n))$.

Para un grupo abeliano B, el ejemplo más sencillo de un $(B, \mathbb{Z})$-grupo es $B \oplus \mathbb{Z}$. Lo importante de esta definición, es que si se logra encontrar un $(B, \mathbb{Z})$-grupo C tal que $\pi : C \longrightarrow B$ no se escinde, se habrá demostrado que B no es un W-grupo, pues $\ker \pi = \langle 0 \rangle \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.

Lema 3.10. *Sea C un $(B, \mathbb{Z})$-grupo tal que $\pi : C \longrightarrow B$ se escinde. Entonces, $C \cong B \oplus \mathbb{Z}$. Más aún, puede construirse el isomorfismo $\varphi : C \xrightarrow{\sim} B \oplus \mathbb{Z}$ de modo que preserve tanto a π como a su escisión $\rho : B \longrightarrow C$, en el sentido de que los dos siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, hook] & C \arrow[d, "\varphi"', "\wr"] \\ & B \oplus \mathbb{Z} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\pi"] & B \\ B \oplus \mathbb{Z} \arrow[u, "\wr", "\varphi^{-1}"'] \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

en donde la inclusión $B \hookrightarrow B \oplus \mathbb{Z}$ del primer diagrama es la evidente $b \longmapsto (b,0)$; y las dos π del segundo diagrama son la misma, vistas como funciones entre los conjuntos subyacentes.

Demostración: Observemos primero un par de propiedades importantes que satisface todo $(B,\mathbb{Z})$-grupo C. En primer lugar, aún sin saber cuál es la operación de grupo para C, el hecho de que $\pi : C \longrightarrow B$ sea morfismo implica que, para cada $(b,n),(c,m) \in C$, $(b,n)+(c,m) = (b+c,k)$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Más aún, $(0,0)$ es el elemento neutro de C ya que $(0,0)+(0,0) = (0,0)$. Por último, tenemos que, para cada $b \in B$, $\rho(b) = (b,n)$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, debido a que $\pi(\rho(b)) = b$. Sea $\psi : B \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow C$ definido por $\psi(b,n) = \rho(b)+(0,n)$. En efecto ψ es un morfismo por la definición de $(B,\mathbb{Z})$-grupo $(\psi((b,n)+(c,m)) = \psi(b+c,n+m) = \rho(b+c)+(0,n+m) = \rho(b)+\rho(c)+(0,n)+(0,m) = \psi(b,n)+\psi(c,m))$. Además, ψ es monomorfismo, pues si $\psi(b,n) = \psi(c,m)$, esto quiere decir que $\rho(b)+(0,n) = \rho(c)+(0,m)$, lo cual implica que $\rho(b-c) = (0,m-n)$, luego la primera entrada de $\rho(b-c)$ (que como hicimos notar arriba, es justamente $b-c$) es igual a 0, i. e. $b = c$. También se sigue que $(0,m-n) = \rho(0) = (0,0)$ y por tanto $m = n$. Así, ψ es inyectiva. Ahora, para ver que ψ es suprayectiva, tomemos un $(b,n) \in C$. Sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que $(0,m) = (b,n) - \rho(b)$. Entonces, $\psi(b,m) = \rho(b)+(0,m) = (b,n)$ y ψ es, por tanto, un isomorfismo cuya inversa φ claramente satisface lo pedido. $\square$

Lo que nos está diciendo el Lema 3.10, es que siempre que C sea un $(B,\mathbb{Z})$-grupo cuya proyección $\pi : C \longrightarrow B$ se escinde, entonces esencialmente podemos suponer sin pérdida de generalidad que C es en realidad $B \oplus \mathbb{Z}$ y que la escisión $\rho : B \longrightarrow B \oplus \mathbb{Z}$ viene dada por $\rho(b) = (b,0)$. Utilizaremos esto para demostrar el siguiente resultado.

Lema 3.11. Sean $B \leq A$, con A un W-grupo y tal que A/B no es W-grupo. Sea C un $(B,\mathbb{Z})$-grupo y ρ una escisión para $\pi : C \longrightarrow B$. Entonces, existe un $(A,\mathbb{Z})$-grupo D que es extensión de C tal que ρ no puede extenderse a una escisión para $\pi : D \longrightarrow A$.

Demostración: Por el Lema 3.10, podemos suponer que $C = B \oplus \mathbb{Z}$ y $(\forall b \in B)(\rho(b) = (b,0))$.Sea $\tilde{D} = A \oplus \mathbb{Z}$. Por el Teorema 3.6 parte (iii), sea $\psi : B \longrightarrow \mathbb{Z}$ el morfismo de grupos abelianos que no puede extenderse a uno con dominio A. Definimos $\gamma : C \longrightarrow \tilde{D}$ como $\gamma(b,n) = (b, n+\psi(b))$. Supongamos que $\tilde{\sigma} : A \longrightarrow \tilde{D}$ es una escisión para $\pi : \tilde{D} \longrightarrow A$ tal que $\tilde{\sigma} \restriction B = \gamma\rho$. Sea $\varphi = \pi_{\mathbb{Z}}\tilde{\sigma} : A \longrightarrow \mathbb{Z}$. Entonces, para $b \in B$, tenemos que $\varphi(b) = \pi_{\mathbb{Z}}\tilde{\sigma}(b) = \pi_{\mathbb{Z}}\gamma\rho(b) = \pi_{\mathbb{Z}}(\gamma(b,0)) = \pi_{\mathbb{Z}}(b,\psi(b)) = \psi(b)$, y por lo tanto φ es una extensión de ψ, lo cual es contradictorio. Por lo tanto, no existen tales $\tilde{\sigma}$. Si γ fuera una inclusión, habríamos terminado. En caso de que no lo sea, definimos $f : \tilde{D} \longrightarrow A \times \mathbb{Z}$ como

$$f(b,n) = \begin{cases} (b,n); & b \notin B \\ (b, n-\psi(b)); & b \in B. \end{cases}$$

Es fácil ver que f es una biyección, además, $f\gamma : B \times \mathbb{Z} \longrightarrow A \times \mathbb{Z}$ es inyectiva. Definimos D como el grupo cuyo conjunto subyacente es $A \times \mathbb{Z}$ dotado con la estructura de grupo que hace de f un isomorfismo (i.e. $(\forall u,v \in A \times \mathbb{Z})(u+v = f(f^{-1}(u)+f^{-1}(v))))$. Luego, D es una extensión de C, y no hay escisiones $\sigma : A \longrightarrow D$ para $\pi : D \longrightarrow B$ que extiendan a $\rho : B \longrightarrow C$. $\square$

El siguiente teorema fue demostrado por Stein en 1951. Existen demostraciones más sencillas, pero esta nos servirá como modelo para generalizar al caso de cardinalidad ω_1.

TEOREMA 3.12. Todo W-grupo numerable es libre.

DEMOSTRACIÓN: Sea A un W-grupo. Entonces, A es libre de torsión (por el Teorema 3.6 (ii)). Bastará con ver que se satisface el criterio de Pontryagin. Supongamos que esto no ocurre, es decir, que hay un $B_0 \leq A$ finitamente generado que no está contenido en ningún subgrupo puro finitamente generado de A. En particular, si $B = \mathrm{C.P.}(B_0)$, entonces B no será finitamente generado. Por consiguiente, B es la unión de una cadena estricta de grupos finitamente generados $\langle B_n \big| n < \omega\rangle$. Por la definición de cerradura pura, B/B_0 es de torsión. Construiremos una cadena de grupos estricta $\langle C_n \big| n < \omega\rangle$ tal que cada C_n es un $(B_n, \mathbb{Z})$-grupo libre de torsión, y tal que $\pi : C = \bigcup_{n<\omega} C_n \longrightarrow B$ no se pueda escindir. Sea S un conjunto finito de generadores de B_0. Afirmamos que todo morfismo de grupos abelianos $\rho : B \longrightarrow D$ con codominio libre de torsión está completamente determinado por sus valores en S: Si $b \in B$ entonces hay un $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $nb \in B_0$, y $\rho(nb)$ sí está determinado por los valores de ρ en S; al ser D libre de torsión, $\rho(b)$ es la única solución de la ecuación $nX = \rho(nb)$. Así, sean $\{g_n \big| n < \omega\}$ todas las funciones que van de S en $B \times \mathbb{Z}$. Definimos C_0 como $B_0 \oplus \mathbb{Z}$. Una vez que ya conocemos C_n, hay dos casos:

1: Si g_n puede extenderse a una escisión ρ para $\pi : C_n \longrightarrow B_n$, entonces, debido a que el grupo $B_{n+1}/B_n \cong (B_{n+1}/B_0)/(B_n/B_0)$ es de torsión, luego B_{n+1}/B_n no es un W-grupo, B_{n+1} lo es y C_n es un $(B_n, \mathbb{Z})$-grupo tal que $\pi : C_n \longrightarrow B_n$ se escinde, por lo tanto por el Lema 3.11 existe un $(B_{n+1}, \mathbb{Z})$-grupo, al cual definimos como C_{n+1}, que es extensión de C_n y tal que ρ no se extiende a una escisión para $\pi : C_{n+1} \longrightarrow B_{n+1}$.

2: En caso contrario, tomamos ρ como cualquier escisión para $\pi : C_n \longrightarrow B_n$ (hay al menos una dado que B_n es finitamente generado y libre de torsión, luego es libre); y, dado que nuevamente B_{n+1}/B_n no es un W-grupo al ser de torsión, entonces podemos definir, como en el caso anterior, a C_{n+1} como un $(B_{n+1}, \mathbb{Z})$-grupo extensión de C_n tal que ρ no puede extenderse a una escisión para $\pi : C_{n+1} \longrightarrow B_{n+1}$.

Así, tendremos que $\pi : C = \bigcup_{n<\omega} C_n \longrightarrow B$ no se escinde, pues si lo hiciera mediante $\rho : B \longrightarrow C$, entonces $(\exists n < \omega)(\rho \restriction S = g_n)$, luego $\rho \restriction B_n$ será una escisión para $\pi : C_n \longrightarrow B_n$ que extiende a g_n y que se extiende a una escisión para $\pi : C_{n+1} \longrightarrow B_{n+1}$ (a saber, $\rho \restriction B_{n+1}$), lo cual contradice a la construcción de los C_n. De esta forma, concluimos que B no es un W-grupo, y debería serlo al ser subgrupo de un W-grupo por el Teorema 3.6 (i). Esto es una contradicción. □

3.2. W-grupos de cardinalidad ω_1. Ahora deseamos generalizar estos razonamientos para W-grupos de cardinalidades mayores. Para tal fin, debemos ir generalizando varias de las nociones que utilizamos anteriormente. En particular, generalizaremos la noción de ser "libre de torsión" y de ser "puro".

DEFINICIÓN 3.13. Sean $\kappa \in \mathbf{Card}$, con $\kappa \geq \omega_1$ y A un grupo abeliano.

(i) Decimos que A es **κ-libre** si $(\forall B \leq A)(|B| < \kappa \Rightarrow B \text{ es libre})$.

(*ii*) Siendo A κ-libre y $B \leq A$, decimos que B es **κ-puro** en A si A/B es κ-libre.

Claramente, ser ω_1-libre, que significa que todo subgrupo numerable sea libre, generaliza a la noción de ser libre de torsión, la cual es equivalente a que todo subgrupo finitamente generado sea libre. Similarmente, ser ω_1-puro generaliza a la noción de ser puro. De hecho, es inmediato que, para cada $\kappa, \lambda \in \mathbf{Card}$, con $\omega_1 \leq \lambda < \kappa$, si A es κ-libre entonces A es λ-libre y libre de torsión, y por consiguiente si $B \leq A$ es κ-puro entonces es λ-puro y también puro. Es por ello que afirmábamos que estas nociones generalizaban otras que se utilizaron anteriormente.

Corolario 3.14. Todo W-grupo es ω_1-libre.

Demostración: Inmediato del Teorema 3.6 (*i*) y del Teorema 3.12. □

Lo que sigue a continuación, es generalizar las hipótesis del Criterio de Pontryagin. Recordemos que dicho criterio asegura que todo grupo abeliano numerable libre de torsión tal que todo subgrupo finitamente generado está contenido en un subgrupo puro finitamente generado es libre. En esta ocasión, la idea es reemplazar "libre de torsión" por "ω_1-libre", "puro" por "ω_1-puro", y "finitamente generado" por "'numerable". Eventualmente, acabaremos por utilizar grupos de cardinalidad ω_1, pero no necesariamente seremos capaces de demostrar que bajo estas condiciones los grupos deben de ser libres.

Definición 3.15. Sea A un grupo abeliano. Diremos que A satisface la **condición de Chase** si A es un grupo ω_1-libre tal que todo subgrupo numerable de A está contenido en un subgrupo numerable ω_1-puro en A.

Esta condición lleva el nombre de Chase debido a que fue él quien demostró, suponiendo la HC débil (es decir, $2^\omega < 2^{\omega_1}$, una condición de la cual la HC, $2^\omega = \omega_1$, es un caso particular), que todo W-grupo satisface esta condición[4]. Nótese que, si A satisface la condición de Chase, entonces A satisface exactamente las hipótesis del criterio de Pontryagin (salvo la numerabilidad). Esto es, A es libre de torsión (por ser ω_1-libre) y todo subgrupo $B \leq A$ finitamente generado está contenido en un subgrupo finitamente generado puro en A. Pues si B es finitamente generado, entonces es numerable. Luego, la condición de Chase asegura la existencia de un subgrupo numerable ω_1-puro (en particular, puro) en A que contiene a B, luego C.P.(B) es a lo sumo numerable. Pero entonces, al ser A un grupo ω_1-libre, ha de tenerse que C.P.(B) es libre, y B es un subgrupo de C.P.(B) que es finitamente generado. Por lo tanto, la cerradura pura de B, calculada dentro de C.P.(B), ha de ser finitamente generada. Pero dicha cerradura pura es exactamente C.P.(B), luego C.P.(B) es finitamente generado, como queríamos demostrar. A continuación traduciremos la condición de Chase en términos de cadenas transfinitas de grupos.

Lema 3.16. Sea A un grupo abeliano de orden ω_1. Entonces, A satisface la condición de Chase $\iff$ A es la unión de una cadena suave de grupos libres

[4]De hecho, Chase le dio el nombre de "fuertemente $\aleph_1$-libre" a esta condición. Al parecer, la demostración original se encuentra en "On group extensions and a problem of J. H. C. Whitehead", pp. 173-197 de *Topics in Abelian Groups*, Scott-Foresman, 1963; artículo por demás difícil de conseguir al ser un capítulo de un libro que actualmente está fuera de imprenta. Sin embargo, el artículo [**5**] contiene una demostración (presumiblemente más sencilla que la de Chase) de este mismo hecho.

numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que $A_0 = \langle 0 \rangle$ y que para todo $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}$ es ω_1-puro en A.

DEMOSTRACIÓN:

⇒: Si A satisface la condición de Chase, tomando $A = \{a_\alpha \big| \alpha < \omega_1\}$, definimos la cadena de los A_α por inducción: $A_0 = \langle 0 \rangle$, y si conocemos A_α entonces definimos $A_{\alpha+1}$ como un subgrupo numerable ω_1-puro de A que contenga a $\langle A_\alpha \cup \{a_\alpha\} \rangle$; finalmente, si ya conocemos A_γ para todo $\gamma < \alpha$ y α es un ordinal límite entonces $A_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma$.

⇐: Todo subgrupo numerable $B \leq A$ está contenido en alguno de los $A_{\alpha+1}$, con $\alpha < \omega_1$.

□

A continuación, presentamos el último resultado de esta sección, que realmente es el resultado crucial para trabajar el problema de Whitehead en grupos abelianos de orden ω_1, y que será de gran ayuda para demostrar que la solución a este problema es independiente de ZFE. Para ello, necesitaremos algunos conceptos de teoría de conjuntos. Un conjunto **cerrado y no acotado** en ω_1 es, como su nombre indica, un subconjunto de ω_1 que es no acotado, según el orden de los ordinales; y que es cerrado de acuerdo a la topología del orden en ω_1.

DEFINICIÓN 3.17. Un subconjunto $E \subseteq \omega_1$ es **estacionario** si para cada $C \subseteq \omega_1$ cerrado y no acotado, se tiene que $E \cap C \neq \varnothing$.

Una analogía muy útil es imaginar a los subconjuntos de ω_1 que contienen a un cerrado y no acotado como conjuntos de medida 1, mientras que los estacionarios son los conjuntos de medida positiva. Las propiedades más elementales de los conjuntos cerrados y no acotados, así como de los estacionarios, se encuentran magistralmente expuestas en [**4**, pp. 208-212]. En esta nota únicamente se utilizará el hecho de que la intersección de dos conjuntos cerrados y no acotados vuelve a ser cerrado y no acotado (y algunas consecuencias de este hecho, por ejemplo: la intersección de un estacionario y un cerrado y no acotado vuelve a ser estacionario; y todo subconjunto de ω_1 que contiene a un estacionario es también estacionario).

TEOREMA 3.18. Sea A un grupo abeliano que satisface la condición de Chase, y que por lo tanto es, por el Lema 3.16, la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ con $A_0 = \langle 0 \rangle$ y $A_{\alpha+1}$ ω_1-puro en A para todo $\alpha < \omega_1$. Sea

$$E = \{\alpha < \omega_1 \big| A_\alpha \text{ no es } \omega_1\text{−puro en } A\}$$

(nótese que E consta únicamente de ordinales límite). Entonces, A es libre $\iff$ E no es estacionario en ω_1.

DEMOSTRACIÓN:

⇐: Si E no es estacionario, sea $\langle \alpha_\beta \big| \beta < \omega_1 \rangle$ la enumeración creciente de los elementos de un conjunto cerrado y no acotado C tal que $C \cap E = \varnothing$, y consideremos los grupos $B_\beta = A_{\alpha_\beta}$. Entonces, tendremos que, al ser C un cerrado, $\langle B_\beta \big| \beta < \omega_1 \rangle$ será una cadena suave de grupos, cuya unión, debido a que C es no acotado, es A. Al ser $C \cap E = \varnothing$, tenemos que B_β es ω_1-puro en A, para todo $\beta < \omega_1$, por lo tanto A/B_β es ω_1-libre. Entonces, siendo

$B_{\beta+1}$ numerable, podemos concluir que para todo $\beta < \omega_1$, $B_{\beta+1}/B_\beta$ es libre. Dado que $0 \notin E$, sin perder generalidad se puede cambiar C por $C \cup \{0\}$ y suponer que $B_0 = A_0 = \langle 0 \rangle$. De esta forma, el Teorema 2.6 nos permite asegurar que A es libre.

$\Rightarrow$: Supongamos que A es un grupo abeliano libre con base X. Construiremos por inducción transfinita una cadena suave $\langle X_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de subconjuntos de X y una función normal $f : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$, X_α será una base de $A_{f(\alpha)}$. Ponemos $X_0 = \varnothing$ y $f(0) = 0$. Para el caso cuando $\alpha < \omega_1$ es un ordinal límite y conocemos X_β para todo $\beta < \alpha$, basta poner $X_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} X_\beta$ y $f(\alpha) = \sup\{f(\beta) \big| \beta < \alpha\}$, de modo que X_α será una base de $A_{f(\alpha)} = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A_{f(\beta)}$. Ahora, si ya conocemos X_α para $\alpha < \omega_1$, tomemos un subconjunto a lo sumo numerable $Y_0 \subseteq X$ tal que $X_\alpha \subsetneq Y_0$, y $\sigma_0 \in \mathbf{Ord}$ tal que $Y_0 \subseteq A_{\sigma_0}$, a continuación tomamos otro subconjunto a lo sumo numerable $Y_1 \subseteq X$ tal que $A_{\sigma_0} \subseteq \langle Y_1 \rangle$, y así por inducción obtenemos una cadena $\langle Y_n \big| n < \omega \rangle$ de subconjuntos numerables de X que contienen a X_α, y una sucesión creciente de ordinales $\langle \sigma_n \big| n < \omega \rangle$ mayores que $f(\alpha)$ tales que para cada $n < \omega$, se tiene que $Y_n \subseteq A_{\sigma_n} \subseteq \langle Y_{n+1} \rangle$. Si hacemos $X_{\alpha+1} = \bigcup\limits_{n<\omega} Y_n$ y $f(\alpha+1) = \sup\{\sigma_n \big| n < \omega\}$, entonces $X_{\alpha+1}$ será base de $A_{f(\alpha+1)} = \bigcup\limits_{n<\omega} A_{\sigma_n} = \bigcup\limits_{n<\omega} \langle Y_n \rangle$.

De esta forma, esa cadena nos dice que E no es estacionario en ω_1 debido a que para cada $\alpha < \omega_1$, al ser $A/A_{f(\alpha)}$ grupo libre con base $\{x + A_{f(\alpha)} \big| x \in X \setminus X_\alpha\}$, en particular es ω_1-libre y por lo tanto $A_{f(\alpha)}$ será ω_1-puro en A, por lo cual $\{f(\alpha) \big| \alpha < \omega_1\}$ será un conjunto cerrado y no acotado que no intersecta a E.

$\square$

4. "Todo W-grupo es libre" es consistente

A continuación, veremos que hay un modelo de ZFE en el cual se cumple que todo W-grupo de cardinalidad ω_1 es libre. De hecho, habremos de tomar un modelo para $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, el axioma de constructibilidad. En este momento, no resulta demasiado importante saber qué es exactamente lo que afirma dicho axioma. La importancia del axioma $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ radica en que, si encontráramos una contradicción en la teoría $\mathsf{ZFE} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$, esta contradicción puede traducirse a una contradicción en ZFE. Es por ello que, suponiendo que ZFE es consistente (una suposición indemostrable básica para todo matemático, posiblemente el único artículo de fe que debe defender cualquier matemático), tendremos que $\mathsf{ZFE} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$ también lo será. Y, por consiguiente, toda consecuencia del axioma $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ también será consistente con ZFE, lo cual significa que en ZFE jamás seremos capaces de elaborar una refutación del enunciado en cuestión.

Por ejemplo, la hipótesis generalizada del continuo, HGC (es decir, la afirmación de que para todo $\alpha \in \mathbf{Ord}$ se satisface que $2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}$) es una de las consecuencias más famosas de $\mathbf{V} = \mathbf{L}$. Los detalles más básicos acerca de este axioma se encuentran en [**1**, Capítulo II, §1-5; pp. 56-85].

Formulemos ahora el principio que nos permitirá probar el resultado deseado acerca de los grupos de Whitehead. Para $\kappa \in \mathbf{Card}$ regular y E un subconjunto estacionario en κ, el principio combinatorio conocido como $\diamondsuit_\kappa(E)$ asegura que hay una sucesión $\langle S_\alpha \big| \alpha \in E\rangle$ con $S_\alpha \subseteq \alpha$ para todo $\alpha \in E$ y tal que dado cualquier $X \subseteq \kappa$, el conjunto $\{\alpha \in E \big| X \cap \alpha = S_\alpha\}$ es estacionario en κ. A $\diamondsuit_\kappa(\kappa)$ se le conoce simplemente como $\diamondsuit_\kappa$, a $\diamondsuit_{\omega_1}$ se le denota simplemente como $\diamondsuit$. Este principio combinatorio es un **principio de adivinanza**, pues la sucesión de los S_α funcionan como una especie de "predicción" de lo que será el segmento inicial $X \cap \alpha$ de cualquier conjunto $X \subseteq \kappa$; el principio $\diamondsuit_\kappa(S)$ asegura que estas "predicciones" son correctas en un conjunto estacionario, es decir, en un conjunto que no es precisamente pequeño (recuérdese la analogía con los conjuntos de medida positiva). El siguiente teorema es la consecuencia más importante del axioma $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ que utilizaremos en el resto de esta sección. Para quienes no desean estudiar a detalle la estructura del universo construíble, conviene que en vez de pensar en $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, piensen en el consecuente del siguiente teorema como el axioma adicional que utilizaremos para realizar nuestra demostración de consistencia.

Teorema 4.1. Sea $E \subseteq \omega_1$ un conjunto estacionario. Entonces, $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ implica que se satisface $\diamondsuit(E)$.

Demostración: Ver [**1**, pp. 138-139]. $\square$

Proposición 4.2. Supongamos el axioma $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, y sea C la unión de una cadena suave estricta de conjuntos numerables $\langle C_\alpha \big| \alpha < \omega_1\rangle$ y $E \subseteq \omega_1$ un estacionario. Entonces, hay una sucesión $\langle S_\alpha \big| \alpha \in E\rangle$ tal que $S_\alpha \subseteq C_\alpha$ para todo $\alpha \in E$ y tal que para cualquier $X \subseteq C$, el conjunto $\{\alpha \in E \big| X \cap C_\alpha = S_\alpha\}$ es estacionario.

Demostración: Construimos por recursión, para $\alpha < \omega_1$, funciones inyectivas $f_\alpha : C_\alpha \longrightarrow \omega_1$ tales que cumplan $f_\alpha \subsetneq f_\beta$ para $\alpha < \beta$ y $\alpha \subseteq \operatorname{ran}(f_\alpha) \in \omega_1$, de la manera siguiente: $f_0 : C_0 \longrightarrow |C_0|$ es cualquier biyección, si conocemos f_β para cualquier $\beta < \alpha$ y $\alpha < \omega_1$ es un ordinal límite, ponemos simplemente $f_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta$. Finalmente, si conocemos f_α entonces hacemos $f_{\alpha+1} : C_{\alpha+1} \longrightarrow \operatorname{ran}(f_\alpha) + |C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha|$ de tal forma que $f_{\alpha+1} \restriction C_\alpha = f_\alpha$ y que $f_{\alpha+1} \restriction (C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha) : C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha \longrightarrow (\operatorname{ran}(f_\alpha) + |C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha|) \setminus \operatorname{ran}(f_\alpha)$ sea una biyección. Ahora, si hacemos $f = \bigcup_{\alpha<\omega_1} f_\alpha : C \longrightarrow \omega_1$, claramente tendremos que f es biyección. Más aún, afirmamos que $T = \{\alpha < \omega_1 \big| \operatorname{ran}(f_\alpha) = \alpha\}$ es un conjunto cerrado y no acotado en ω_1. En efecto, si $\langle \alpha_n \big| n < \omega\rangle \in {}^\omega T$, observamos que $\alpha = \sup_{n<\omega} \alpha_n \in T$, debido a que $\operatorname{ran}(f_\alpha) = \bigcup_{n<\omega} \operatorname{ran}(f_{\alpha_n}) = \bigcup_{n<\omega} \alpha_n = \alpha$. Por lo tanto T es cerrado, para ver que es no acotado, dado $\beta < \omega_1$ definimos $\alpha_0 = \beta+1$, $\alpha_1 = \operatorname{ran}(f_{\alpha_0}) \geq \alpha_0$, y así sucesivamente $\alpha_{n+1} = \operatorname{ran}(f_{\alpha_n}) \geq \alpha_n$, entonces puede verse que $\alpha = \sup_{n<\omega} \alpha_n \in T$ ($\alpha \subseteq \operatorname{ran}(f_\alpha)$ por construcción de las f_α, pero además $\alpha \geq \alpha_{n+1} = \operatorname{ran}(f_{\alpha_n})$ para todo $n < \omega$ por construcción de las α_n, si además notamos que $\operatorname{ran}(f_\alpha) = \sup_{n<\omega} \operatorname{ran}(f_{\alpha_n})$ entonces tenemos lo afirmado). Por lo tanto T es no acotado, luego es un subconjunto cerrado y no acotado en ω_1. En este momento, tomamos una $\diamondsuit_{\omega_1}(E)$-sucesión $\langle T_\alpha \big| \alpha \in E\rangle$, cuya existencia está garantizada por el Teorema 4.1 y definimos, para cada $\alpha \in E$, $S_\alpha = f^{-1}[T_\alpha]$. Así, dado $\alpha \in E$, $T_\alpha \subseteq \alpha \subseteq \operatorname{ran}(f_\alpha)$, por lo cual $S_\alpha \subseteq f^{-1}[\operatorname{ran}(f_\alpha)] = C_\alpha$. Ahora, si $X \subseteq C$, entonces $\{\alpha \in E \big| X \cap C_\alpha = S_\alpha\} \supseteq$

$T\cap\{\alpha\in E\big|f[X]\cap\alpha=T_\alpha\}$, el cual es estacionario por hipótesis. Luego $\langle S_\alpha\big|\alpha\in\omega_1\rangle$ es la sucesión requerida. □

Corolario 4.3. Supóngase que se satisface $\mathbf{V}=\mathbf{L}$. Sea B la unión de una cadena suave estricta de conjuntos numerables $\langle B_\alpha\big|\alpha<\omega_1\rangle$, Y un conjunto numerable, y $E\subseteq\omega_1$ estacionario. Entonces, hay una sucesión $\langle g_\alpha : B_\alpha\longrightarrow B_\alpha\times Y\big|\alpha\in E\rangle$ tal que para toda función $h: B\longrightarrow B\times Y$ que satisface $(\forall\alpha\in E)(h[B_\alpha]\subseteq B_\alpha\times Y)$, existe $\alpha\in E$ tal que $h\restriction B_\alpha=g_\alpha$.

Demostración: Para cada $\alpha\in E$, definimos $C_\alpha=B_\alpha\times(B_\alpha\times Y)$ y $C=B\times(B\times Y)$ de modo que podamos aplicar la Proposición 4.2, y sea $\langle S_\alpha\big|\alpha\in E\rangle$ la sucesión cuya existencia garantiza dicha Proposición, luego $S_\alpha\subseteq B_\alpha\times(B_\alpha\times Y)$. Definimos g_α de acuerdo a dos posibles casos. Si S_α es una función con dominio B_α, entonces ponemos simplemente $g_\alpha=S_\alpha$. En caso contrario, tomamos una función $g_\alpha: B_\alpha\longrightarrow B_\alpha\times Y$ arbitraria. De esta forma, si $h: B\longrightarrow B\times Y$ entonces $h\subseteq B\times(B\times Y)$, luego tendremos que $\{\alpha\in E\big|h\cap(B_\alpha\times(B_\alpha\times Y))=S_\alpha\}$ es estacionario, en particular es no vacío. Por lo tanto hay un $\alpha\in E$ tal que $h\cap(B_\alpha\times(B_\alpha\times Y))=S_\alpha$. Si además h es tal que $h[B_\alpha]\subseteq B_\alpha\times Y$, esto quiere decir que $S_\alpha=h\cap(B_\alpha\times(B_\alpha\times Y))=h\restriction B_\alpha$. Entonces, S_α era una función con dominio B_α, luego por la definición de las g_α, se tiene que $g_\alpha=S_\alpha=h\restriction B_\alpha$. □

Hemos terminado con las consecuencias técnicas de $V=L$. Finalmente, ha llegado la hora de utilizar esas consecuencias para establecer el resultado de consistencia que hemos venido anunciando a lo largo de esta sección.

Teorema 4.4. Sea B la unión de una cadena suave estricta $\langle B_\alpha\big|\alpha<\omega_1\rangle$ de grupos libres numerables tales que $E=\{\alpha<\omega_1\big|B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre$\}$ es estacionario en ω_1. Entonces, $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ implica que B no es un W-grupo.

Demostración: Nuestro método de demostración consistirá en definir, por inducción transfinita, una cadena de grupos $\langle C_\alpha\big|\alpha<\omega_1\rangle$ tal que cada C_α sea un $(B_\alpha,\mathbb{Z})$-grupo y su unión C sea un $(B,\mathbb{Z})$-grupo tal que $\pi: C\longrightarrow B$ no se escinda. Por el corolario anterior, tenemos funciones $\{g_\alpha: B_\alpha\longrightarrow B_\alpha\times\mathbb{Z}\big|\alpha\in E\}$ tales que para cada $h: B\longrightarrow B\times\mathbb{Z}$ que cumpla $\pi h=\mathrm{id}_B$, tendremos que $\mathrm{id}_{B_\alpha}=\mathrm{id}_B\restriction B_\alpha=(\pi h)\restriction B_\alpha=\pi(h\restriction B_\alpha)$, lo cual nos dice que $h[B_\alpha]\subseteq B_\alpha\times\mathbb{Z}$. Por lo tanto, hay un $\beta\in E$ tal que $h\restriction B_\beta=g_\beta$.

Comenzamos haciendo de C_0 cualquier $(B_0,\mathbb{Z})$-grupo, por ejemplo, $C_0=B_0\oplus\mathbb{Z}$. Si conocemos C_β para todo $\beta<\alpha$ y $\alpha<\omega_1$ es un ordinal límite, entonces hacemos $C_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}C_\beta$. Ahora, si conocemos C_α, para definir $C_{\alpha+1}$ hay dos casos:

1: Si $\alpha\in E$ y $g_\alpha: B_\alpha\longrightarrow B_\alpha\times\mathbb{Z}$ es una escisión para $\pi: C_\alpha\longrightarrow B_\alpha$. Entonces, dado que $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre (pues $\alpha\in E$) y, al ser numerable, esto implica por el Teorema 3.12 que no es un W-grupo, amén de que $B_{\alpha+1}$ sí es W-grupo por ser libre, entonces por el Lema 3.11 hay una extensión $C_{\alpha+1}$ de C_α tal que es un $(B_{\alpha+1},\mathbb{Z})$-grupo de tal suerte que g_α no puede extenderse a una escisión para $\pi: C_{\alpha+1}\longrightarrow B_{\alpha+1}$.

2: Si $\alpha\notin E$ o bien si $g_\alpha: B_\alpha\longrightarrow B_\alpha\times\mathbb{Z}$ no es una escisión para $\pi: C_\alpha\longrightarrow B_\alpha$, entonces tomamos $C_{\alpha+1}$ como cualquier $(B_{\alpha+1},\mathbb{Z})$-grupo que extienda a C_α (nótese que por hipótesis B_α es libre, luego $\pi: C_\alpha\longrightarrow B_\alpha$ tiene al menos una escisión y esto significa que esencialmente $C_\alpha=B_\alpha\oplus\mathbb{Z}$, luego es natural hacer $C_{\alpha+1}=B_{\alpha+1}\oplus\mathbb{Z}$).

Así las cosas, hacemos $C = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$. Si hubiera una escisión $\rho : B \longrightarrow C$, entonces habría un $\alpha \in E$ tal que $\rho \restriction B_\alpha = g_\alpha$, pero esto contradiría la definición de $C_{\alpha+1}$. Es por ello que π no se escinde y consecuentemente B no es un W-grupo.

□

Finalmente, hemos llegado al momento de cumplir el objetivo que motivó a desarrollar toda la teoría anterior. El siguiente resultado es el más importante de esta sección.

TEOREMA 4.5 (Shelah). $\mathsf{ZFE} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$ implica que todo W-grupo de cardinalidad ω_1 es libre.

DEMOSTRACIÓN: Supóngase el axioma $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, y sea A un W-grupo de orden ω_1. Veremos que A satisface la condición de Chase. En primer lugar, por ser A un W-grupo, el Corolario 3.14 asegura que A es ω_1-libre. Si A no satisfaciera la condición de Chase, habría un $B_0 \leq A$ numerable tal que para todo $C \leq A$ numerable con $B_0 \subseteq C$, se tiene que C no es ω_1-puro en A, es decir, A/C no es ω_1-libre, esto es, hay un $C' \leq A$ tal que C'/C es numerable y no es libre, en particular C' es numerable. En particular, hay un $B_1 \leq A$ numerable tal que B_1/B_0 no es libre. Y si conocemos $B_\alpha \leq A$ numerable, para $\alpha < \omega_1$, con $B_0 \subseteq B_\alpha$, entonces existirá un $B_{\alpha+1} \leq A$ numerable tal que $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre. Si $\alpha < \omega_1$ es un ordinal límite y conocemos B_β para cada $\beta < \alpha$, definimos simplemente $B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$. Por lo tanto, tenemos una cadena suave estricta de subgrupos numerables de A, $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1\rangle$, tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre y tal que $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$. En particular, $\{\alpha < \omega_1 \big| B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no es libre}\} = \omega_1$, el cual es estacionario en ω_1, por lo que el teorema anterior asegura que A no es un W-grupo y esto es autocontradictorio. Por lo tanto A satisface la condición de Chase.

Así, por el Lema 3.16, A es la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1\rangle$ con $A_0 = \langle 0\rangle$ y tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}$ es ω_1-puro en A. Sea $E = \{\alpha < \omega_1 \big| A_\alpha \text{ no es } \omega_1\text{−puro en } A\}$ y $E' = \{\alpha < \omega_1 \big| A_{\alpha+1}/A_\alpha \text{ no es libre}\}$. Por el teorema anterior, dado que A es un W-grupo entonces E' no es estacionario. Pero afirmamos que $E' = E$. En efecto, si $\alpha \in E'$ entonces $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ no es libre, luego A/A_α no es ω_1-libre, por lo tanto A_α no es ω_1-puro en A y $\alpha \in E$, por consiguiente $E' \subseteq E$. Ahora, supóngase que $\alpha \notin E'$. Entonces, $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ es libre. Para $\lambda > \alpha$, $A_\lambda/A_{\alpha+1}$ es libre dado que $A_{\alpha+1}$ es, por hipótesis, ω_1-puro en A (lo cual significa que $A/A_{\alpha+1}$ es ω_1-libre). Luego, $A_\lambda/A_{\alpha+1} \cong (A_\lambda/A_\alpha)/(A_{\alpha+1}/A_\alpha)$ es libre para todo $\lambda > \alpha$, al ser $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ libre, la Proposición 2.4 (*iii*) nos asegura que A_λ/A_α es libre, para todo $\lambda > \alpha$. Por lo tanto, A/A_α es ω_1-libre, debido a que si $B/A_\alpha \leq A/A_\alpha$ es numerable, habrá un $\lambda > \alpha$ tal que $B \subseteq A_\lambda$, luego $B/A_\alpha \leq A_\lambda/A_\alpha$ y B/A_α será libre (por ser subgrupo de un libre, Proposición 2.4 (*i*)). Por consiguiente, tenemos que A_α es ω_1-puro en A y por lo tanto $\alpha \notin E$, lo que implica que $E \subseteq E'$, luego $E = E'$ y E no es estacionario, por el Teorema 3.18 esto implica que A es libre. □

De esta forma, podemos concluir que no es posible refutar, en ZFE, que todo W-grupo de cardinalidad ω_1 es libre. En la siguiente sección, probaremos que este enunciado tampoco puede demostrarse en ZFE. Es posible demostrar, por inducción sobre la cardinalidad de los W-grupos, que $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ implica que todo W-grupo es libre. En el caso de κ un cardinal regular, la demostración resulta ser muy similar a la que acabamos de llevar a cabo (utilizando la noción de grupo κ-libre, subgrupo κ-puro y algo así como la "κ-condición de Chase"), y para los cardinales singulares hay que usar el siguiente resultado de Shelah: Si A es un grupo abeliano κ-libre de cardinalidad κ, para κ un cardinal singular, entonces A es libre. Este resultado tiene una estrecha relación con un resultado de Shelah acerca de cierto tipo de compacidad (en el sentido de la Teoría de Modelos, más que en el sentido topológico) que poseen los cardinales singulares, resultado que se demuestra únicamente en ZFE sin necesidad de agregar axiomas adicionales. Por lo tanto, la respuesta "todo W-grupo es libre" al problema de Whitehead es consistente con ZFE, al ser implicada por el axioma $\mathbf{V} = \mathbf{L}$.

5. "Todo W-grupo es libre" es independiente

En la presente sección, veremos que también la respuesta "hay W-grupos que no son libres" al problema de Whitehead es consistente con ZFE, lo cual nos dirá que la respuesta al problema de Whitehead es independiente de ZFE. Comenzaremos por realizar una construcción importante, si bien ésta se realiza asumiendo únicamente los axiomas de ZFE.

Construcción 5.1. Construiremos un grupo abeliano de cardinalidad ω_1 que satisface la condición de Chase pero que no es libre. Lo haremos definiendo por inducción una cadena suave estricta $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de grupos numerables, con $A_0 = \langle 0 \rangle$, que satisfagan

(1) $(\forall \alpha < \omega_1)(A_\alpha$ es libre$)$, $(\forall \beta < \alpha < \omega_1)(A_\alpha / A_{\beta+1}$ es libre$)$
(2) $(\forall \alpha \in \lim(\omega_1))(A_{\alpha+1}/A_\alpha$ no es libre$)$.

Una vez que tengamos esto, bastará poner $A = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ para obtener lo deseado: en efecto, la primer condición nos garantiza que para cada $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}$ es ω_1-puro en A (pues todo subgrupo numerable de $A/A_{\alpha+1}$ está contenido en algún $A_\beta/A_{\alpha+1}$, y los subgrupos de grupos libres son también libres), luego el Lema 3.16 nos asegura que A satisface la condición de Chase. Por otra parte, la última condición de la cadena nos dice que el conjunto de $\alpha < \omega_1$ tales que A_α no es ω_1-libre consta al menos de todos los ordinales límite, luego dicho conjunto es estacionario y el Teorema 3.18 nos garantiza que A no es libre.

Ahora vamos con la construcción. Como ya dijimos, $A_0 = \langle 0 \rangle$. Si α es ordinal límite y conocemos A_β para cada $\beta < \alpha < \omega_1$, entonces escogemos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ cofinal en α tal que cada α_n sea un ordinal sucesor. Ponemos $A_\alpha = \bigcup\limits_{n<\omega} A_{\alpha_n}$. El Teorema 2.6 nos garantiza que A_α es libre (debido a que A_{α_0} es libre y para cada $n < \omega$, $A_{\alpha_{n+1}}/A_{\alpha_n}$ lo es por ser todos los α_n ordinales sucesores), más aún, nos garantiza que A_α/A_{α_n} es libre para cada $n < \omega$. Además, para $\beta < \alpha$, hay un $n < \omega$ tal que $A_{\beta+1} \subseteq A_{\alpha_n}$, luego se tiene que $(A_\alpha/A_{\beta+1})/(A_{\alpha_n}/A_{\beta+1}) \cong A_\alpha/A_{\alpha_n}$ que es libre, como además el divisor en el cociente de la izquierda es libre, la Proposición 2.4 (*iii*) nos permite asegurar que $A_\alpha/A_{\beta+1}$ es libre. Por lo tanto, la nueva cadena de longitud α que obtenemos al agregar A_α, sigue cumpliendo con la primera condición (la segunda, en este caso, ni siquiera necesita ser verificada). Ahora supóngase que conocemos A_α, y que queremos definir $A_{\alpha+1}$, para $\alpha < \omega_1$. Entonces tenemos dos casos:

1: α no es límite. Entonces, hacemos $A_{\alpha+1} = A_\alpha \oplus \mathbb{Z}$. Veamos que con este $A_{\alpha+1}$, la cadena seguirá cumpliendo lo que tiene que cumplir. Es claro que $A_{\alpha+1}$ es libre, ahora para $\beta < \alpha$, por hipótesis inductiva tenemos que $A_\alpha/A_{\beta+1}$ es libre, y también $(A_{\alpha+1}/A_{\beta+1})/(A_\alpha/A_{\beta+1}) \cong A_{\alpha+1}/A_\alpha = (A_\alpha \oplus \mathbb{Z})/A_\alpha \cong \mathbb{Z}$ lo es, luego por la Proposición 2.4 (*iii*) concluimos que $A_{\alpha+1}/A_{\beta+1}$ es libre. Así, nuevamente se sigue cumpliendo la primera condición en la cadena, la segunda no necesita checarse en este caso.

2: α es un ordinal límite. Este es el caso más complicado de tratar. Elegimos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ cofinal en α que conste de puros ordinales sucesores salvo en el caso de α_0, que tomaremos igual a 0. Por como se hizo la demostración del Teorema 2.6, sabemos que hay una cadena suave estricta de conjuntos $\langle X_n \big| n < \omega \rangle$ de tal forma que cada X_n es base de A_{α_n} y $X := \bigcup\limits_{n<\omega} X_n$ es base de $A_\alpha = \bigcup\limits_{n<\omega} A_{\alpha_n}$. Para cada $1 \leq n < \omega$ escogemos un $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$. Sea, para cada $n < \omega$, $Y_n = X_n \setminus \{x_i\}_{i=1}^{n}$ y sea B el subgrupo de A_α generado por $\bigcup\limits_{n<\omega} Y_n = X \setminus \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Esto es, $B = \bigoplus\limits_{X\setminus\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} \mathbb{Z} \leq \bigoplus\limits_{x\in X} \mathbb{Z} = A_\alpha$.

Ahora, tomemos el producto directo de ω copias de $\mathbb{Z}$ (que indexaremos por medio de los x_i), es decir, sea $P = \prod\limits_{i=1}^{\infty} \langle x_i \rangle \cong \prod\limits_{x_i \in \{x_i\}_{i=1}^{\infty}} \mathbb{Z}$. En P, para cada $1 \leq m < \omega$, sea

$$\begin{aligned} z_m &= \text{“}\sum_{n\geq m} \frac{n!}{m!} x_n\text{”} \\ &= (\underbrace{0,\ldots,0}_{m-1 \text{ entradas}}, 1, (m+1), (m+1)(m+2), \ldots) \in P. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$B \oplus P = \left(\bigoplus_{X\setminus\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} \mathbb{Z} \right) \oplus \left(\prod_{x_i\in\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} \mathbb{Z} \right) \supseteq \left(\bigoplus_{X\setminus\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} \mathbb{Z} \right) \oplus \left(\bigoplus_{x_i\in\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} \mathbb{Z} \right) = A_\alpha,$$

por lo tanto tiene sentido considerar que $B \oplus P$ contiene como subgrupo a (una copia isomorfa a) A_α, y definir $A_{\alpha+1}$ como el subgrupo de $B \oplus P$ generado por $A_\alpha \cup \{z_m \big| 1 \leq m < \omega\}$.

Se puede verificar que $\bigcup\limits_{n<\omega} Y_n \cup \{z_m \big| 1 \leq m < \omega\}$ es base de $A_{\alpha+1}$. En primer lugar, la independencia lineal es bastante inmediata de verificar, y para ver que este conjunto efectivamente genera a $A_{\alpha+1}$, lo único que podría causarnos problemas es ver que con los z_i podemos generar a los x_i, que son elementos de A_α. Pero un cálculo rápido a partir de la definición de los z_i nos confirma que, para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $z_m - (m+1)z_{m+1} = x_m$. Por consiguiente, $A_{\alpha+1}$ es libre. Ahora, para $k < \omega$, se tiene que $A_{\alpha+1}/A_{\alpha_k}$ es isomorfo al subgrupo de $A_{\alpha+1}$ generado por $\bigcup\limits_{n>k} (Y_n \setminus Y_k) \cup \{z_m \big| k+1 \leq m < \omega\}$ (piénsese que en la expresión de $A_{\alpha+1}$ como suma directa de copias de $\mathbb{Z}$, hacer cociente sobre A_{α_k} es equivalente a tomar como triviales todos los factores que vienen indexados por un generador de A_{α_k}, así como hacer iguales a 0 a estos mismos generadores), luego es libre. Dado $\beta < \alpha$, hay un $n < \omega$ tal que $A_{\beta+1} \subseteq A_{\alpha_n}$, por lo tanto, dado que $A_{\alpha_n}/A_{\beta+1}$ es libre y $(A_{\alpha+1}/A_{\beta+1})/(A_{\alpha_n}/A_{\beta+1}) \cong A_{\alpha+1}/A_{\alpha_n}$ lo es, la Proposición 2.4 (iii) nos permite asegurar que $A_{\alpha+1}/A_{\beta+1}$ es libre. Ahora, sólo resta ver la segunda condición, a saber, que $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ no es libre: observemos que para cada $1 \leq m < \omega$, se tiene que $m!z_m - z_1 = -\sum_{n=1}^{m-1} n!x_n = (-1, -2, -3!, \ldots, -(m-1)!, 0, 0, \ldots) \in A_\alpha$, luego $z_1 + A_\alpha = m!z_m + A_\alpha$. Como $z_1 \notin A_\alpha$, entonces $z_1 + A_\alpha$ es un elemento no cero de $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ que puede dividirse por cada $m \in \mathbb{N}$ (debido a que $z_1 + A_\alpha = m(m-1)!z_m + A_\alpha$). Un grupo libre abeliano no tiene elementos que sean divisibles por todos los enteros positivos: pues si algún grupo libre abeliano A tiene base Y y $x = m_1x_1 + \cdots + m_nx_n \in A$, con $m_i \in \mathbb{Z}$ y $x_i \in Y$, entonces es claro que para cada k que sea mayor que el máximo común divisor de $\{m_i\}_{i=1}^{n}$, la ecuación $kX = x$ no tiene solución en A. Entonces, podemos concluir que $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ es libre.

En este momento, para demostrar la consistencia de la existencia de un W-grupo no es libre, nuevamente debemos enriquecer ZFE con axiomas adicionales. Para ello, necesitamos enunciar ciertas definiciones.

Definición 5.2.

(i) Un **conjunto preordenado** (a veces también denominado una **noción de forzamiento**) es un par $(\mathbb{P}, \leq)$ tal que $\leq$ es una relación reflexiva y transitiva (no necesariamente antisimétrica) en $\mathbb{P}$.

(ii) Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ de un conjunto preordenado es **denso** si $(\forall p \in \mathbb{P})(\exists q \in D)(q \leq p)$.

(iii) Un subconjunto $G \subseteq \mathbb{P}$ de un conjunto preordenado es un **filtro** si ocurre que $(\forall p, q \in G)(\exists r \in G)(r \leq p \wedge r \leq q)$, amén de que $(\forall p, q \in \mathbb{P})((p \in G \wedge p \leq q) \Rightarrow q \in G)$.

(iv) Si $\mathcal{D} \subseteq \wp(\mathbb{P})$ es una familia de densos en un conjunto preordenado $\mathbb{P}$, y $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro, entonces G es **$\mathcal{D}$-genérico** si $(\forall D \in \mathcal{D})(G \cap D \neq \varnothing)$.

(v) Decimos que dos elementos $p, q \in \mathbb{P}$ de un conjunto preordenado son **incompatibles**, denotado $p \perp q$, si no existe ningún $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$.

(vi) Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ de un conjunto preordenado es una **anticadena** si $(\forall p, q \in A)(p \perp q)$.

(vii) Un conjunto preordenado $\mathbb{P}$ **tiene la c.c.c.** (condición de cadena contable) si toda anticadena de $\mathbb{P}$ es a lo más numerable.

Definición 5.3. El **axioma de Martin**, denotado por AM, es la siguiente afirmación: siempre que $\mathbb{P}$ sea un conjunto preordenado (no vacío) que tiene la c.c.c., y $\mathcal{D}$ es una familia de densos en $\mathbb{P}$ con $|\mathcal{D}| < \mathfrak{c}$ (en donde $\mathfrak{c}$ denota a $|\mathbb{R}| = 2^\omega$, la cardinalidad del continuo), entonces existe un filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ que es $\mathcal{D}$-genérico.

Al igual que el axioma $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, el axioma de Martin es consistente con ZFE. Es decir, si pudiéramos encontrar una contradicción en la teoría ZFE+AM, ésta podría traducirse a una contradicción dentro de ZFE. De esta forma, toda consecuencia de AM será una proposición de la cual no puede elaborarse una refutación dentro de ZFE, esto es, será una proposición consistente con ZFE. Para demostrar la consistencia de AM, es preciso utilizar el forzamiento iterado, que fue desarrollado por Solovay y Tennenbaum basado en la técnica original del forzamiento de Cohen.

Puede verse que, suponiendo la hipótesis del continuo, el axioma de Martin "no tiene mucho chiste" (es decir, $\mathsf{ZFE}+\mathsf{HC}\vdash\mathsf{AM}$). Es por ello que trabajaremos con la teoría $\mathsf{ZFE}+\mathsf{AM}+\mathfrak{c}>\omega_1$, que también es consistente con ZFE, y con ella realizaremos esta prueba de consistencia. Veremos que en este modelo existe un W-grupo de tamaño ω_1 que no es libre. De hecho, este grupo será exactamente aquél que presentamos en la Construcción 5.1, pero el axioma de Martin nos permitirá demostrar que en efecto este grupo es un W-grupo.

Teorema 5.4 (Shelah). $\mathsf{AM}+\neg\mathsf{HC}$ implica que todo grupo abeliano de cardinalidad ω_1 que satisface la condición de Chase es un W-grupo.

Demostración: Sea A un grupo de cardinalidad ω_1 que satisface la condición de Chase, y $\pi : B \longrightarrow A$ un epimorfismo cuyo kernel es isomorfo a $\mathbb{Z}$ (en realidad, nos basta con que el kernel sea numerable). Sea

$$\begin{aligned}\mathbb{P}=\{\varphi : S\longrightarrow B \quad \big| \quad & (\varphi \text{ es un homomorfismo})\wedge(\pi\varphi=\mathrm{id}_S)\\ & \wedge(S \text{ es un subgrupo finitamente generado puro en } A)\},\end{aligned}$$

equipado con la relación de preorden $\varphi\leq\psi \iff \psi\subseteq\varphi$. Entonces, $\mathbb{P}$ es un conjunto preordenado no vacío (el único homomorfismo : $\langle 0\rangle\longrightarrow B$ es un elemento de $\mathbb{P}$, ya que al ser A un grupo ω_1-libre (pues satisface la condición de Chase) es libre de torsión, luego $\langle 0\rangle$ es un subgrupo puro en A que obviamente es finitamente generado).

Supongamos por el momento que $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c.. Para cada $a\in A$, sea $D_a=\{\varphi\in\mathbb{P}\big| a\in\mathrm{dom}(\varphi)\}$. Veamos que D_a es denso en $\mathbb{P}$: sea $\varphi\in\mathbb{P}$, si $a\in\mathrm{dom}(\varphi)$ entonces $\varphi\in D_a$ y ya terminamos. Si no, sea $S=\mathrm{dom}(\varphi)$ y T un subgrupo puro en A finitamente generado que contiene a $S\cup\{a\}$ (dado que A satisface la condición de Chase, C.P.$(S+\langle a\rangle)$ es finitamente generado). Ahora, T/S es finitamente generado y, al ser S puro en A, también es libre de torsión. Por lo tanto, la Proposición 2.4 (*ii*) nos asegura que T/S es libre, luego la misma Proposición 2.4 (*iii*) nos asegura la existencia de una base para T de la forma $X\cup Y$ con X una base de S, $X\cap Y=\varnothing$. Definimos, pues, $\psi : T\longrightarrow B$ haciendo, por la propiedad universal de los grupos abelianos libres,

$$\psi(x)=\begin{cases}\phi(x);\ x\in X\\ b_x;\ x\in Y \text{ y } b_x\in B \text{ con } \pi(b_x)=x\end{cases}$$

luego $\psi\in D_a$ con $\psi<\varphi$ (como consecuencia de esto, por inducción, podemos extender cualquier $\varphi\in\mathbb{P}$ a alguna $\varphi'\in\mathbb{P}$ tal que $F\subseteq\mathrm{dom}(\varphi')$, siempre que F sea cualquier subconjunto finito de A). Por lo tanto, AM nos asegura que, si $\mathcal{D}=\{D_a\big| a\in A\}$, entonces hay un filtro G que es $\mathcal{D}$-genérico. Es claro que, si $g=\bigcup G$, al ser G filtro, g será una función, y por ser $\mathcal{D}$-genérico tendremos que $A=\mathrm{dom}(g)$. Por otra parte, g cumple con la siguiente propiedad: Para cada subconjunto finito $F\subseteq A$ hay una $f\in\mathbb{P}$ tal que $F\subseteq\mathrm{dom}(f)$ y $g\restriction F=f\restriction F$. En efecto, al ser $F=\{a_1,\ldots,a_n\}$, hay elementos $g_1,\ldots,g_n\in\mathbb{P}$ tales que $(\forall i\in$

$n+1\setminus\{0\})(g_i \in G\cap D_{a_i})$, al ser G un filtro y n finito, existe una $h \in G$ que extiende a todas las f_i, h es el elemento que estamos buscando.

Por si esto fuera poco, tenemos que necesariamente g es homomorfismo: pues si $a, b \in A$ entonces hay una $f \in \mathbb{P}$ tal que $f \restriction \{a, b, a+b\} = g \restriction \{a, b, a+b\}$, luego $g(a+b) = f(a+b) = f(a) + f(b) = g(a) + g(b)$. Además, tenemos que $\pi g(a) = \pi(f(a)) = a$, luego $\pi g = \mathrm{id}_A$ y g es escisión para π, con lo cual concluimos que A es un W-grupo.

En este momento, tan sólo nos resta ver que $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c., para tal fin demostramos el siguiente lema.

Lema 5.5. Sea $I \subseteq \mathbb{P}$ no numerable. Entonces, hay un subgrupo $A' \leq A$ libre y puro en A, así como un subconjunto no numerable $J \subseteq I$ tal que $(\forall\varphi \in J)(\mathrm{dom}(\varphi) \subseteq A')$.

Demostración: Sea $I = \{\varphi_\alpha \big| \alpha < \omega_1\}$, y para cada $\alpha < \omega_1$ sea $S_\alpha = \mathrm{dom}(\varphi_\alpha)$, que por hipótesis es un subgrupo puro en A finitamente generado; y (dado que S_α es finitamente generado y libre de torsión, la Proposición 2.4 (*ii*) nos garantiza que es libre) sea Z_α una base de S_α. Sin perder generalidad, podemos suponer que para cierto $m < \omega$, $(\forall\alpha < \omega_1)(|Z_\alpha| = m)$. Más aún, por el Lema del $\triangle$-sistema[5], podemos suponer que los Z_α forman un $\triangle$-sistema, digamos que con raíz R. Entonces, C.P.$(\langle R\rangle)$ es un subgrupo puro en A que está contenido en todos los S_α, por lo tanto podemos tomar un subgrupo T puro en A que esté contenido en una cantidad no numerable de S_α, maximal respecto de esta propiedad (se cumplen las hipótesis del lema de Zorn ya que si tenemos una cadena de subgrupos con esta propiedad, la cerradura pura de su yunta es una cota superior para la cadena), luego hay una sucesión estrictamente creciente $\langle\delta_\alpha \big| \alpha < \omega_1\rangle$ tal que $(\forall\alpha < \omega_1)(T \subseteq S_{\delta_\alpha})$. T es libre debido a que es subgrupo de un grupo libre (cualquiera de los S_{δ_α} atestigua esto), luego podemos tomar una base X para T. Entonces, por la Proposición 2.4 (*iii*), sabemos que para cada $\alpha < \omega_1$ existe un conjunto Y_α ajeno con X tal que $Y_\alpha \cup X$ es base de S_{δ_α}.

Construiremos a A' como la unión de una cadena suave $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1\rangle$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $A_\alpha \leq A$ sea un subgrupo puro en A y $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ sea libre. Entonces, siempre que A_0 sea libre, el Teorema 2.6 nos garantizará que A' es libre. Más aún, al ser la unión de subgrupos puros en A, A' también será puro en A: si $x + A' \in \mathrm{tor}(A/A')$ entonces para cierto $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $nx + A' = n(x + A') = A'$, con lo cual $nx \in A' = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$; de modo que para cierto $\alpha < \omega_1$ tenemos que $nx \in A_\alpha$ (i.e. $n(x + A_\alpha) = A_\alpha$ y por tanto $x + A_\alpha \in \mathrm{tor}(A/A_\alpha)$), siendo A_α puro en A no queda más opción que $x \in A_\alpha \subseteq A'$ y por lo tanto $\mathrm{tor}(A/A') = \langle 0\rangle$.

De esta forma, comenzamos haciendo $A_0 := T$, que es libre. Una vez que conocemos $\langle A_\gamma \big| \gamma < \alpha\rangle$, entonces si α es límite hacemos $A_\alpha = \bigcup\limits_{\gamma<\alpha} A_\gamma$. Y finalmente, supongamos que conocemos $\langle A_\gamma \big| \gamma \leq \alpha\rangle$ y una sucesión estrictamente creciente de ordinales $\langle\sigma_{\gamma+1} \big| \gamma < \alpha\rangle$ tal que para cada $\gamma < \alpha$, $Y_{\sigma_{\gamma+1}} \subseteq A_{\gamma+1}$. Sea C_α un subgrupo numerable ω_1-puro que contiene a A_α, el cual existe debido a que A satisface la condición de Chase. Observemos que debe de existir un $\sigma_{\alpha+1}$ tal que

[5] El Lema del $\triangle$-sistema dice que todo conjunto no numerable A cuyos elementos son únicamente conjuntos finitos tiene un subconjunto no numerable B que forma un **$\triangle$-sistema**, es decir, hay un r (llamado la **raíz** del $\triangle$-sistema) tal que para cualesquiera dos $a, b \in B$ distintos, $a \cap b = r$. La demostración puede verse en [**6**, pp. 49-50, o ej. 1 p. 86].

$(\forall\gamma < \alpha)(\sigma_{\alpha+1} > \sigma_{\gamma+1} \wedge \langle Y_{\sigma_{\alpha+1}}\rangle \cap C_\alpha = \langle 0\rangle)$, pues en caso contrario, al ser C_α numerable, entonces existiría un $c \in C_\alpha \setminus \{0\}$ y una cantidad no numerable de $\tau < \omega_1$ tales que $\tau > \sup\{\sigma_{\gamma+1} \big| \gamma \leq \alpha\}$ y con $c \in \langle Y_\tau\rangle$. Pero esto implicaría que C.P.$(T + \langle c\rangle) \subseteq S_{\delta_\tau}$ para esos mismos τ (la inclusión se debe a que $c \in \langle Y_\tau\rangle \leq S_{\delta_\tau}$ y $T \subseteq S_{\delta_\tau}$, y S_{δ_τ} es puro en A), y esto contradice la maximalidad de T. Entonces, hacemos $A_{\alpha+1} :=$ C.P.$(A_\alpha + \langle Y_{\sigma_{\alpha+1}}\rangle)$. Por construcción, $\langle Y_{\sigma_{\alpha+1}}\rangle \cap C_\alpha = \langle 0\rangle$, entonces $A_{\alpha+1} \cap C_\alpha = A_\alpha$ (ya que si $x \in A_{\alpha+1} \cap C_\alpha$ entonces para cierto $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $nx \in A_\alpha + \langle Y_{\sigma_{\alpha+1}}\rangle$ y también $nx \in C_\alpha \supseteq A_\alpha$, con lo cual necesariamente se concluye que $nx \in A_\alpha$ y al ser A_α puro en A, tenemos que $x \in A_\alpha$), lo cual significa que $A_{\alpha+1}/A_\alpha = A_{\alpha+1}/(A_{\alpha+1} \cap C_\alpha) \cong (A_{\alpha+1} + C_\alpha)/C_\alpha$, este último es un subgrupo numerable de A/C_α, que es un grupo ω_1-puro (pues C_α es ω_1-libre), y por lo tanto este cociente es libre.

Entonces, basta hacer $J := \{\varphi_{\sigma_{\alpha+1}} \big| \alpha < \omega_1\}$, para que el lema quede demostrado en virtud de que $\mathrm{dom}(\varphi_{\sigma_{\alpha+1}}) = S_{\sigma_{\alpha+1}} = \langle X \cup Y_{\sigma_{\alpha+1}}\rangle \subseteq A_{\alpha+1} \subseteq A'$, en donde la penúltima inclusión es consecuencia de que $Y_{\sigma_{\alpha+1}} \subseteq A_{\alpha+1}$ y $X \subseteq T = A_0 \subseteq A_{\alpha+1}$. $\square$

Finalmente tenemos la herramienta necesaria para demostrar que $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c.. Sea $I \subseteq \mathbb{P}$ no numerable. Por el Lema 5.5, hay un subgrupo $A' \leq A$ que es libre y puro en A tal que, sin perder generalidad, contiene a $\mathrm{dom}(\varphi)$ para todos los $\varphi \in I$. Sea $X = \{x_\alpha \big| \alpha < \omega_1\}$ una base de A'. Dado que para cada $\varphi \in \mathbb{P}$ y cada subconjunto finito $F \subseteq A$ podemos encontrar un $\varphi' \in \mathbb{P}$ que extiende a φ y tal que $F \subseteq \mathrm{dom}(\varphi')$, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que para cada $\varphi \in I$ hay un subconjunto finito $Z \subseteq X$ tal que $\mathrm{dom}(\varphi) = \langle Z\rangle$ (basta tomar un Z que contenga suficientes elementos de X como para generar a los generadores de $\mathrm{dom}(\varphi)$ (claramente hay un Z finito con esta propiedad), extender φ a una φ' cuyo dominio contenga a Z, y restringir esta última a $\langle Z\rangle$, el cual es puro en A (pues $(A/\langle Z\rangle)/(A'/\langle Z\rangle) \cong (A/A')$, en donde el grupo de la derecha es libre de torsión por ser A' puro en A, y el divisor de la izquierda es libre, de donde es fácil concluir que el dividendo de la izquierda también es libre de torsión) y finitamente generado). Sea $I = \{\varphi_\alpha \big| \alpha < \omega_1\}$ y para cada $\alpha < \omega_1$, por la observación anterior, $Y_\alpha \subseteq X$ un subconjunto finito que sea base para $\mathrm{dom}(\varphi_\alpha)$. Por el Lema del $\triangle$-sistema, hay una cantidad no numerable de Y_α que forman un $\triangle$-sistema con raíz $R \subseteq X$. Así, podemos escoger un $T \subseteq X$ maximal respecto de estar contenido en una cantidad no numerable de los Y_α.

Contemos las posibles funciones $f : T \longrightarrow B$ que podrían llegar a extenderse a un elemento de $\mathbb{P}$. Necesitamos que, para cada $t \in T$, $\pi(f(t)) = t$. Como $\pi : B \longrightarrow A$ es epimorfismo, entonces π induce una biyección $\hat{\pi} : B/\ker(\pi) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Z$ dada por $\hat{\pi}(b + \ker(\pi)) = \pi(b)$. Por ello, es necesario que $f(t)$ sea un elemento de la única clase lateral cuyo valor bajo $\hat{\pi}$ sea t. Pero cada clase lateral tiene la cardinalidad de $\ker(\pi)$, que es numerable, por lo tanto hay ω posibles valores de $f(t)$ para cada $t \in T$, y habiendo una cantidad finita de elementos de T no puede haber más que ω posibles f. Tenemos entonces que, para una cantidad no numerable de α, $T \subseteq Y_\alpha$ y por el conteo anterior sólo puede haber una cantidad numerable de $\varphi_\alpha \restriction T$ distintos. Por lo tanto, existe un subconjunto no numerable $L \subseteq \omega_1$ tal que $(\forall\alpha \in L)(T \subseteq Y_\alpha)$ y $(\forall\alpha,\beta \in L)(\varphi_\alpha \restriction T = \varphi_\beta \restriction T)$. Por el Lema del $\triangle$-sistema, podemos suponer sin perder generalidad que $\{\mathrm{dom}(\varphi_\alpha) \big| \alpha \in L\}$ forma un $\triangle$-sistema, digamos que con raíz R. Es claro que debe tenerse que $T \subseteq R$, y además si la contención fuera propia, escogiendo $y \in R \setminus T$ se tendría que $T \cup \{y\}$

contradice la maximalidad de T. Por lo tanto, la raíz del $\triangle$-sistema es exactamente T, en particular podemos hallar dos $\alpha, \beta \in L$ distintos tales que $Y_\alpha \cap Y_\beta = T$. Entonces, $\varphi_\alpha \upharpoonright \langle T \rangle = \varphi_\beta \upharpoonright \langle T \rangle$, con $\langle T \rangle = \mathrm{dom}(\varphi_\alpha) \cap \mathrm{dom}(\varphi_\beta)$. Por lo tanto, el único homomorfismo $\psi : \langle Y_\alpha \cup Y_\beta \rangle \longrightarrow B$ que extiende a $\varphi_\alpha \cup \varphi_\beta$, será una extensión común de φ_α y φ_β, lo cual nos permitirá concluir que I no era una anticadena tan pronto como logremos demostrar que $\psi \in \mathbb{P}$. Para ello, basta ver que $\langle Y_\alpha \cup Y_\beta \rangle$ es un subgrupo puro en A (pues claramente es finitamente generado y también es claro que $\pi\psi = \mathrm{id}_{\langle Y_\alpha \cup Y_\beta \rangle}$). Primero veamos que este grupo es puro en A', debido a que $A'/\langle Y_\alpha \cup Y_\beta \rangle$ es isomorfo al grupo libre con base $\{x_\delta \big| \delta \in \omega_1 \setminus (Y_\alpha \cup Y_\beta)\}$. Ahora bien, $(A/\langle Y_\alpha \cup Y_\beta \rangle)/(A'/\langle Y_\alpha \cup Y_\beta \rangle) \cong A/A'$ que es libre de torsión, siendo a su vez el dividendo del lado izquierdo libre de torsión por ser A' puro en A y $\langle Y_\alpha \cup Y_\beta \rangle$ puro en A'. Pero esto implica que $A/\langle Y_\alpha \cup Y_\beta \rangle$ es libre de torsión. En efecto, en general, si A/B y B son libres de torsión, entonces $\mathrm{tor}(A) \subseteq B$ y al ser B libre de torsión ha de tenerse que $\mathrm{tor}(A) = \langle 0 \rangle$ y por lo tanto también A es libre de torsión. Con esto finaliza la demostración del teorema. $\square$

Al considerar el teorema anterior junto con la construcción 5.1, podemos concluir que en cualquier modelo de $\mathsf{ZFE} + \mathsf{AM} + \neg\mathsf{HC}$ existen W-grupos que no son libres. Por lo tanto, es imposible refutar esto último sobre la base de ZFE, y entonces es imposible demostrar que todo W-grupo es libre. En resumen, hemos visto que para grupos de cardinalidad ω_1 no es posible demostrar ni refutar en ZFE el enunciado "todo W-grupo es libre". El problema de Whitehead es indecidible, como lo establece en resumidas cuentas el siguiente corolario.

Corolario 5.6. Sea $\varphi \equiv$ "todo W − grupo es libre". Entonces, $\mathsf{ZFE} \nvdash \varphi$ y $\mathsf{ZFE} \nvdash \neg\varphi$. Es decir, φ es indecidible en ZFE. $\square$

Referencias

[1] Devlin, Keith J. *Constructibility*, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag.

[2] Eklof, Paul C., "Whitehead Problem is Undecidable"; *American Mathematical Monthly* **83** 10 (1976), 775-788.

[3] Fernández Bretón, David J., *Algunas Aplicaciones de los Métodos de la Teoría de Conjuntos a Problemas de Álgebra*. Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México y Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo; 2010.

[4] Hrbacek, Karel y Jech, Thomas; *Introduction to set theory.* 3rd. ed., Pure and Applied Mathematics (220), Marcel Dekker, 1999.

[5] Huber, Martin, "A Simple Proof for a Theorem of Chase"; *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* **74** (1985), 45-49.

[6] Kunen, Kenneth; *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics (102), Elsevier, 2006.

[7] Shelah, Saharon, "Infinite abelian groups, whitehead problem and some constructions"; *Israel Journal of Mathematics*; **18** (1974), 243-256.

Correo electrónico: `davidfb@matmor.unam.mx`